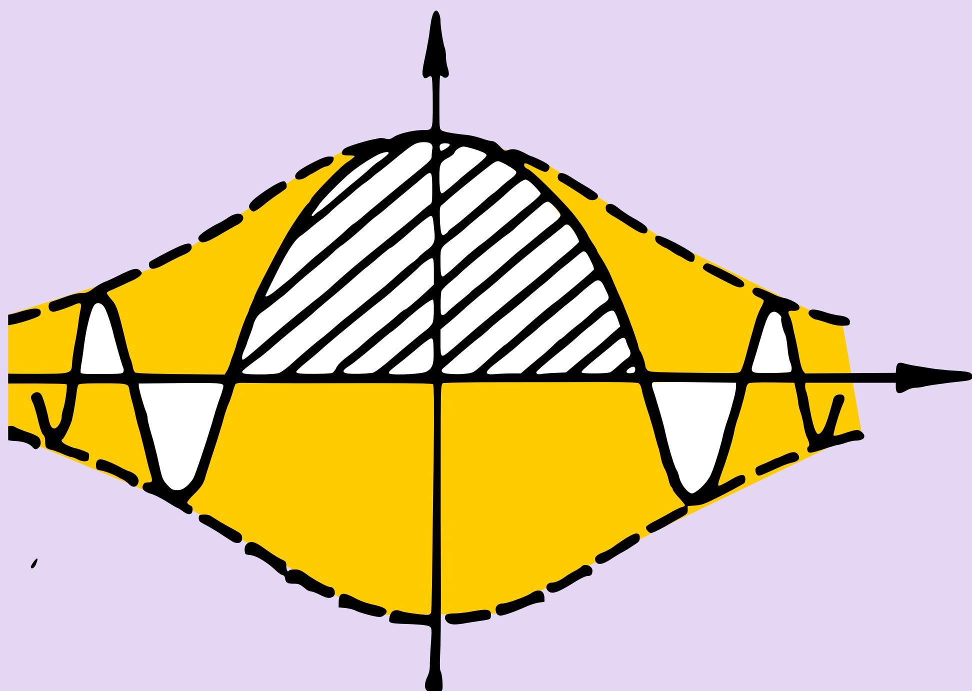
V. Arnold, A. Varchenko,
S. Goussein-Zade

SINGULARITÉS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

Tome 2



Éditions Mir Moscou

В. И. АРНОЛЬД, А. Н. ВАРЧЕНКО, С. М. ГУСЕЙН-ЗАДЕ

ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

в 2-х частях

Часть 2

Монодромия и асимптотики интегралов

Под редакцией В. И. Арнольда

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. ARNOLD, A. VARCHENKO, S. GOUSSEIN-ZADE

SINGULARITÉS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

(en deux parties)

2e partie

Monodromie et comportement asymptotique des intégrales

Sous la direction de V. ARNOLD



ÉDITIONS MIR MOSCOU

Traduit du russe
par V. KOTLIAR

На французском языке

© Издательство «Наука». Главная редакция
физико-математической литературы, 1984
© traduction française, Editions Mir, 1986

PRÉFACE À L'ÉDITION FRANÇAISE

« Comme les objets matériels et les êtres vivants, les fonctions sont caractérisées par leurs singularités », a dit P. Montel (Travaux du Ier congrès des mathématiciens de l'U.R.S.S., Kharkov, 1930).

Cet ouvrage est consacré à un domaine appelé souvent « théorie quantique des singularités ». Il s'agit des singularités de certaines fonctions spéciales qu'on rencontre dans toutes les applications: intégrales dépendant de paramètres. Ces fonctions sont multivoques si on les traite comme des fonctions de paramètres complexes. L'étude du caractère de leur ramification conduit à considérer des questions topologiques, à savoir la théorie de la monodromie, qui fait l'objet du chapitre I. Cette théorie constitue, à certains égards, une généralisation de la topologie élémentaire des surfaces riemanniennes et de la géométrie des coupures et des chemins sur ces surfaces.

Certains problèmes d'application (notamment ceux de la théorie des ondes liés au comportement asymptotique des ondes courtes en optique ou en mécanique quantique) conduisent à étudier le développement asymptotique des intégrales oscillantes (du type de Fresnel) ou des intégrales de la méthode du point selle (du type de Laplace), lorsque plusieurs points critiques se confondent. Ainsi, par exemple, une concentration de lumière des caustiques lumineuses traduit la coïncidence de deux points critiques. Les singularités des intégrales correspondantes se laissent décrire par des fonctions d'Airy.

De même, à toute dégénérescence (confusion) de points critiques de fonctions holomorphes correspond un type particulier de fonctions spéciales. Les plus élémentaires d'entre elles (les fonctions d'Airy et les intégrales elliptiques) sont utilisées depuis longtemps en physique mathématique, tandis que l'étude systématique d'autres fonctions spéciales n'en est qu'à ses débuts. Les plus simples de ces nouvelles fonctions spéciales sont liées aux groupes de Coxeter ou aux groupes de Weyl des groupes de Lie simples ($A_k \sim SU_{k+1}$, $D_k \sim SO_{2k}$, . . .). La fonction d'Airy est, dans cette optique, une fonction spéciale correspondant à A_2. Les chapitres II et III sont

consacrés au comportement asymptotique de fonctions de ces classes dans les domaines réel (ch. II) et complexe (ch. III).

Ces questions sont intimement liées à de multiples problèmes d'analyse, de physique, de géométrie algébrique et même de théorie des nombres *). Nous nous sommes efforcés de donner une idée de ces liens multiples, dans les limites autorisées par le cadre restreint d'un manuel.

A l'occasion de l'édition en langue française de notre ouvrage, entreprise par les Editions Mir, nous tenons à souligner l'apport fondamental des chercheurs français à la théorie des singularités.

Les bases de cette théorie furent jetées par Christian Huygens, premier président de l'Académie, fondateur de la théorie des singularités de l'optique géométrique (caustiques, développées et développantes, principe de Huygens, fronts d'onde). Le crochet de Lagrange et la transformation de Legendre mènent tout droit aux singularités lagrangiennes et legendriennes que nous traitons dans les deux livres de notre ouvrage. Citons également les intégrales, déjà mentionnées, du type de Laplace et du type de Fresnel : elles ouvrent la théorie quantique des singularités.

L'étude des propriétés topologiques des intégrales dans le domaine complexe est liée, avant tout, aux noms de Picard et de Poincaré (ce problème, né de l'étude des fonctions perturbatrices de la méthode des moyennes de la mécanique céleste, a servi à Poincaré de point de départ pour la création de la topologie multidimensionnelle). La *Thèse* de Poincaré contient, entre autres, le germe de la théorie des déploiements versels, fondamentale pour la théorie des singularités.

Poincaré, comme d'ailleurs nombre d'auteurs de son temps, fait systématiquement usage de considérations génériques.

Or, à l'époque où prédominait l'approche algébro-axiomatique des mathématiques, ces considérations n'ont pas été reconnues rigoureuses jusqu'à ce que R. Thom ne les ait justifiées par des théorèmes généraux de transversalité. L'enthousiasme de Thom fut très important pour la renaissance des idées de Poincaré après de longues années de réaction axiomatico-déductive.

La théorie moderne des intégrales doit beaucoup à J. Leray, dont le nom se rencontre souvent dans les pages qui suivent. Soulignons l'apport fondamental de B. Malgrange et P. Deligne (évident, nous croyons, à la lecture des chapitres II et III).

Les spécialistes de la théorie des singularités connaissent les travaux de J. Martinet, F. Pham, B. Teissier et ceux de l'active et féconde école française (N. A'Campo, M. Audin, Y. Colin de Verdier,

*) S'agissant de ce dernier domaine, outre la théorie des structures mixtes de Hodge-Deligne et la théorie des points entiers dans les domaines (Y. Colin de Verdier et autres), notons l'impulsion qu'a donné un mémoire de J.-P. Serre consacré à l'icosaèdre au développement de la théorie des singularités H_3 et H_4.

N.T. Dai, M. Demazure, N.H. Duc, J.P. Dufour, M. Guisti, D.T. Le, B. Morin, P. Perron, M. Sebastiani).

Les auteurs se sont efforcés de rendre le second volume de l'ouvrage aussi indépendant que possible du premier, visant surtout non pas les spécialistes, mais les usagers qui n'en sont qu'à leurs débuts. Pourtant, nous nous plaisons à penser que les spécialistes y trouveront également un certain nombre d'éléments nouveaux.

Pour cette édition française, les auteurs ont revu l'édition russe de 1984, corrigé les coquilles et erreurs qui s'y sont glissées et y ont ajouté de nouveaux résultats parus entre les deux éditions de l'ouvrage.

Les auteurs
Moscou, Iassénévo
novembre 1985

AVANT-PROPOS

Ce livre fait suite à notre ouvrage *Singularités des applications différentiables. Classification des points critiques, des caustiques et des fronts d'onde* paru en 1986 aux Editions Mir en langue française. (Référence *Première partie* dans le texte.)

Si la Première partie était consacrée à la « zoologie » des singularités des applications différentiables, i.e. à la description des types de singularités et des conditions de leur apparition, le présent livre s'occupe de « l'anatomie » et de la « physiologie » des singularités des fonctions différentiables. Cela veut dire que nous y étudions les particularités de structure et de fonctionnement des singularités.

Un autre trait particulier de cette Deuxième partie est l'accent mis sur les questions pour lesquelles le cas complexe revêt une très grande importance, alors que dans la Première partie on se désintéressait le plus souvent de savoir sur quel corps commutatif (réel ou complexe) on opère. En passant au cas complexe, on arrive à éclaircir toute une série de questions, telles que la décomposition des singularités, leur lien avec les algèbres de Lie, le comportement asymptotique d'intégrales dépendant de paramètres.

Le livre se compose de trois chapitres. Le premier est réservé à la structure topologique des points critiques isolés de fonctions holomorphes, notamment à leurs caractéristiques topologiques fondamentales: cycles évanescents, bases distinguées, matrices des intersections, groupe de monodromie, opérateur de variation, au rapport existant entre ces caractéristiques et aux méthodes de leur calcul.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du comportement asymptotique des intégrales dites de la méthode de la phase stationnaire que l'on rencontre souvent dans les applications. Nous décrivons les méthodes de calcul des développements asymptotiques, nous discutons le lien entre le comportement asymptotique et diverses caractéristiques du point critique de la phase de l'intégrale (désingularisation, polyèdres de Newton, etc.) et nous donnons des tableaux des caractéristiques des séries asymptotiques pour les points critiques

de la phase qui ont été classifiés dans la Première partie (il s'agit, en particulier, des points simples, unimodaux et bimodaux).

Dans le troisième chapitre on s'occupe du calcul intégral sur les variétés de niveau du point critique d'une fonction holomorphe. On y étudie les intégrales des formes holomorphes définies au voisinage du point critique, étendues aux cycles situés sur les hypersurfaces de niveau de la fonction. L'intégrale d'une forme holomorphe suivant un cycle varie de façon holomorphe quand le cycle passe par déformation continue d'une hypersurface de niveau à l'autre. On voit alors apparaître des fonctions holomorphes multiformes définies sur la droite complexe au voisinage de la valeur critique de la fonction. Il se trouve que les fonctions multiformes en question (ou, plus exactement, leurs intégrales) présentent un comportement asymptotique qui est défini par différentes caractéristiques propres au point critique initial de la fonction holomorphe lorsque le niveau considéré tend vers le niveau critique.

La théorie des singularités étant un chapitre en pleine expansion des mathématiques, nous n'avons pas cherché à embrasser toutes ses multiples ramifications.

Une bibliographie placée en fin de volume contient des travaux en rapport direct avec le texte (même s'il n'y a pas de référence directe), ainsi que certains articles se rapportant à la Première partie mais omis pour une raison quelconque dans la liste bibliographique jointe au premier volume.

Les auteurs tiennent à exprimer leur reconnaissance aux participants du séminaire sur les singularités de l'Université de Moscou, et notamment à D. Fuchs, A. Gabrielov, A. Givental, A. Hovanski, A. Kushnirenko. Les auteurs remercient Mmes V. Varchenko et T. Ogorodnikova pour le concours important qu'elles ont apporté à la préparation matérielle du manuscrit.

CHAPITRE PREMIER

STRUCTURE TOPOLOGIQUE DES POINTS CRITIQUES ISOLÉS DES FONCTIONS

Introduction

L'étude de la structure topologique d'un point critique isolé d'une fonction analytique complexe comporte la description de la topologie de son ensemble de niveau. La topologie de l'ensemble de niveau ou de l'ensemble des valeurs plus petites d'une fonction différentiable à valeurs réelles sur une variété peut être étudiée par la théorie de Morse (voir [244]). Cette théorie décrit les métamorphoses subies par l'ensemble des valeurs plus petites et l'ensemble de niveau de la fonction au moment où celle-ci passe par une de ses valeurs critiques. Dans le cas complexe, aucune métamorphose n'a lieu sur l'ensemble de niveau quand la fonction passe par une valeur critique, vu que tous les ensembles de niveau non singuliers voisins d'un même ensemble critique sont identiques en tant qu'espaces topologiques et même en tant que variétés différentiables. L'analogue complexe de la théorie de Morse décrivant la topologie de l'ensemble de niveau d'une fonction analytique complexe est la théorie de Picard-Lefschetz (chronologiquement antérieure). En théorie de Picard-Lefschetz, on s'intéresse non pas à la traversée par la fonction d'une valeur critique mais au contournement autour de cette valeur dans le plan $\mathbf{C}$ des valeurs de la fonction.

Fixons un cercle de centre la valeur critique. Chaque point du cercle est une valeur de la fonction. Les ensembles de niveau correspondant à ces valeurs forment un fibré au-dessus du cercle. En parcourant ce cercle, on obtient une application de l'ensemble de niveau au-dessus du point initial du cercle dans lui-même. Cette application est appelée *monodromie* (classique) du point critique.

L'exemple le plus élémentaire illustrant nos propos et permettant d'effectuer tous les calculs et constructions est une fonction de deux variables

$$f(z, w) = z^2 + w^2, \quad (z, w) \in \mathbf{C}^2.$$

Elle admet un point critique unique $z = w = 0$. La valeur critique est $f = 0$. L'ensemble de niveau critique $V_0 = \{(z, w) : z^2 + w^2 = 0\}$ se compose de deux droites complexes qui se coupent en 0. Tous les

autres ensembles de niveau

$$V_\lambda = \{(z, w) : z^2 + w^2 = \lambda\} \quad (\lambda \neq 0)$$

sont topologiquement identiques : ils sont difféomorphes au cylindre $S^1 \times \mathbf{R}^1$ (fig. 1).

Pour nous en rendre compte, considérons la surface riemanienne de la fonction $w = \sqrt{\lambda - z^2}$ (fig. 2). Elle est obtenue par recollement

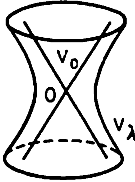


Fig. 1

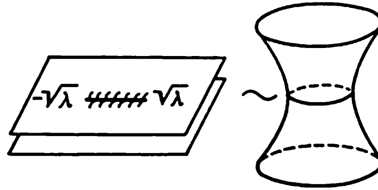


Fig. 2

de deux exemplaires du plan de la variable complexe z suivant la ligne de coupe $(-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda})$. Chaque exemplaire du plan coupé est homéomorphe à un demi-cylindre ; la ligne de coupe passe en un cercle sur le cylindre. Tout l'espace $\mathbf{C}^2$ (de $\mathbf{R}$-dimension 4) est donc partagé en une fibre singulière V_0 et des fibres non singulières V_λ difféomorphes à des cylindres, fibres qui sont images réciproques de la valeur critique 0 et des valeurs non critiques $\lambda \neq 0$ par l'application

$$f : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0).$$

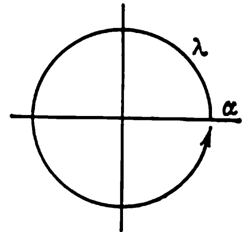


Fig. 3

Passons à la construction de la monodromie. Soit, sur le plan des valeurs de la fonction, un chemin qui tourne dans le sens positif (antihoraire) autour de la valeur critique 0 : $\lambda(t) = \exp(2\pi i t)\,\alpha$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\alpha > 0$ (fig. 3). Voyons ce que devient la fibre $V_{\lambda(t)}$ lorsque t varie de 0 à 1. A cet effet, considérons les surfaces riemaniennes des fonctions

$$w = \sqrt{\lambda(t) - z^2}$$

Quand le paramètre t croît, les deux points de ramification $z = \pm\sqrt{\lambda(t)} = \exp(\pi i t)(\pm\sqrt{\alpha})$ tournent dans le sens positif autour de $z = 0$. Pendant que t croît de 0 à 1, chacun de ces points parcourt un demi-cercle et vient à la place de l'autre. Ainsi donc, au chemin $\lambda(t)$ autour de la valeur critique 0 correspond une série de surfaces riemaniennes dont la première et la dernière sont une seule et même surface V_α (fig. 4).

On construit maintenant sans peine une famille de difféomorphismes de la fibre initiale $V_{\lambda(0)} = V_\alpha$ dans la fibre $V_{\lambda(t)}$ au-dessus du point $\lambda(t)$:

$$\Gamma_t : V_{\lambda(0)} \to V_{\lambda(t)}.$$

Cette famille, qui dépend continûment de t, commence par la transformation identique Γ_0 et se termine par la *monodromie* $\Gamma_1 = h$.

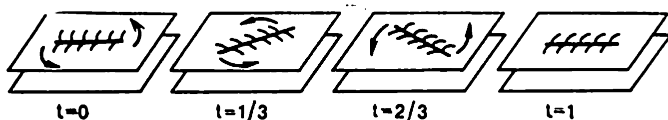


Fig. 4

On peut par exemple définir Γ_t comme suit. Choisissons une « fonction de troncature » différentiable $\chi(r)$ telle que $\chi(r) = 1$ pour $0 \leqslant r \leqslant 2\sqrt{\alpha}$ et $\chi(r) = 0$ pour $r \geqslant 3\sqrt{\alpha}$. Posons

$$g_t(z) = \exp\{\pi it \cdot \chi(|z|)\} \cdot z.$$

La famille des difféomorphismes g_t du plan de la variable complexe z dans lui-même définit la famille cherchée des difféomorphismes Γ_t.

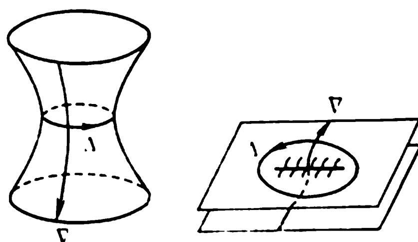


Fig. 5

Le difféomorphisme obtenu $h = \Gamma_1 : V_\alpha \to V_\alpha$ du cylindre est identique en dehors d'un compact suffisamment grand (pour $|z| > 3\sqrt{\alpha}$).

Considérons à présent l'action de la monodromie h sur le groupe d'homologie d'une fibre non singulière V_α. Le groupe d'homologie de dimension 1

$$H_1(V_\alpha; Z) \approx Z$$

du cylindre V_α est engendré par la classe d'homologie du cercle « étranglement » Δ (fig. 5). Quand $\alpha \to 0$, le cercle Δ se rétrécit vers le point 0: on l'appelle *cycle évanescent de Picard-Lefschetz*.

Considérons aussi le groupe d'homologie de dimension 1 d'une fibre V_α à supports fermés $H_1^{\text{ferm}}(V_\alpha; Z)$. Par dualité de Poincaré, il est isomorphe aussi au groupe des entiers Z. Il est engendré par la classe d'homologie du « cycle coévanescent » ∇: c'est la ligne sur le cylindre qui va de l'infini à l'infini et rencontre transversalement

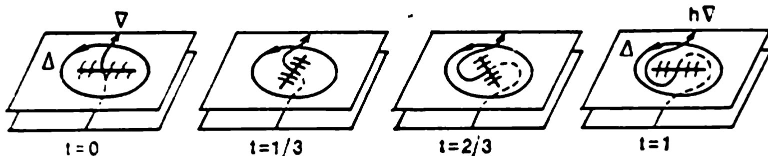


Fig. 6

le cycle évanescent Δ en un point (voir fig. 5). L'orientation de ∇ est supposée telle que l'indice d'intersection $(\nabla \circ \Delta)$ de ∇ avec le cycle évanescent Δ défini par l'orientation complexe de la fibre V_α soit égal à $+1$.

La figure 4 permet de suivre l'action des difféomorphismes Γ_t sur les cycles évanescent et coévanescent (fig. 6).

Remarquons que le difféomorphisme $h = \Gamma_1$ du cylindre $V_\alpha \approx \approx S^1 \times \mathbf{R}^1$ peut être représenté comme suit: laissant immobile le domaine en dehors d'un anneau, h fait tourner de différents angles, variant de 0 (sur un bord) jusqu'à 2π (sur l'autre), les cercles constitutifs de l'anneau. Ainsi donc, à la suite de la transformation de monodromie h le cycle évanescent Δ revient à lui-même, tandis que le cycle coévanescent s'enroule une fois autour du cylindre (fig. 7).

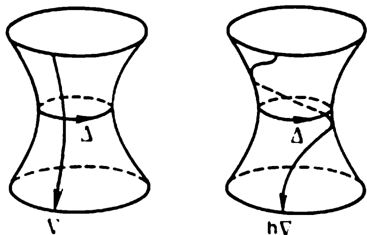


Fig. 7

Le difféomorphisme h est fixe en dehors d'un compact. Les cycles ∇ et $h\nabla$ se confondent en dehors de ce compact, aussi le cycle $h\nabla - \nabla$ est-il contenu tout entier dans la partie compacte du cylindre. En regardant la figure 7 (ou 6), on voit que

$$h\nabla - \nabla = -\Delta.$$

D'une manière analogue, pour tout cycle δ à support fermé on obtient un cycle à support compact $h\delta - \delta$. On a donc une application d'homologies à supports fermés d'une fibre V_α dans ses homologies à supports compacts, appelée *variation*:

$$\mathrm{Var}: H_1^{\text{ferm}}(V_\alpha; Z) \to H_1(V_\alpha; Z).$$

De la figure 7 (ou 6) on voit que pour tout cycle $\delta \in H_1^{\text{ferm}}(V_\alpha; Z)$ on a la relation

$$\operatorname{Var} \delta = (\Delta \circ \delta)\, \Delta$$

appelée *formule de Picard-Lefschetz.* $(\Delta \circ \delta)$ est l'indice d'intersection des cycles Δ et δ défini par l'orientation complexe de la fibre V_α.

Remarquons qu'en général les difféomorphismes Γ_t ne sont définis qu'à une homotopie près et que la transformation Γ_1 n'est pas nécessairement fixe à priori en dehors d'un compact. C'est ainsi que la famille de difféomorphismes qui vient tout naturellement à l'esprit

$$\Gamma'_t : (z, w) \mapsto (z \cdot \exp(\pi i t), w \cdot \exp(\pi i t))$$

définit l'application

$$\Gamma'_1 = h' : (z, w) \mapsto (-z, -w)$$

qui n'est pas fixe en dehors d'un compact et ne convient donc pas à la définition de la variation (bien qu'elle convienne à la définition de l'action de la monodromie sur les homologies compactes).

Nous venons d'envisager les notions fondamentales de la théorie de Picard-Lefschetz : les cycles évanescents, la monodromie et la variation pour un cas élémentaire de $f(z, w) = z^2 + w^2$.

Dans le cas général d'une fonction arbitraire d'un nombre quelconque de variables, la topologie d'une fibre V_λ n'est pas aussi simple que dans l'exemple que nous venons de considérer. L'étude de la topologie de V_λ, de la monodromie et de la variation dans le cas général est un problème difficile, qui n'a reçu de solutions complètes que pour quelques singularités particulières. Le présent chapitre expose quelques méthodes d'étude et résultats obtenus dans cette voie.

Nous nous servirons essentiellement de la méthode des petites déformations. En faisant subir à une fonction de n variables une (petite) déformation (ou, comme on dit encore, en faisant bouger la fonction), on obtient que son point critique se décompose en points critiques élémentaires. Chacun de ces points élémentaires a la structure du point critique 0 de la fonction $f(z_1, \ldots, z_n) = z_1^2 + \ldots + z_n^2$ et se prête aisément à l'étude, comme dans le cas de $n=2$ que nous avons vu plus haut. Dans le cas général, la fibre non singulière (variété de niveau $V_\lambda = \{(z_1, \ldots, z_n) : z_1^2 + \ldots + z_n^2 = \lambda\}$, $\lambda \neq 0$) qu'on obtient au lieu du cylindre V_λ pour $n = 2$ est difféomorphe à l'espace TS^{n-1} de la fibration tangente d'une sphère de dimension $n - 1$ (un cylindre pour $n = 2$). Le cycle évanescent dans V_1 est une sphère réelle $S^{n-1} = \{z \in \mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n : z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 1\}$.

Si un point critique moins élémentaire se décompose par déformation en μ points élémentaires, la fonction déformée admet en général μ valeurs critiques (fig. 8). On peut alors tourner, dans le plan des

valeurs de la fonction déformée, autour de toutes ses μ valeurs critiques : au lieu d'un difféomorphisme unique de monodromie h, on obtient un *groupe de monodromie* $\{h_\gamma\}$, où γ parcourt le groupe fondamental de l'ensemble des valeurs non critiques.

La structure d'une fibre non singulière V_λ de la fonction déformée (à l'intérieur d'une boule centrée au point critique de la fonction non déformée) est la même que pour une fibre non singulière de la fonction non déformée. Quand λ approche d'une des valeurs critiques

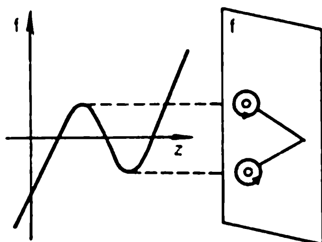


Fig. 8

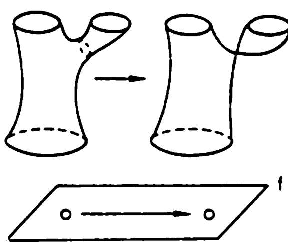


Fig. 9

de la fonction déformée, on voit s'évanouir, sur la fibre non singulière, un cycle, plus exactement une sphère de dimension égale à la demi-dimension (réelle) de la fibre V_λ (fig. 9). En approchant ainsi de toutes les μ valeurs critiques, nous définissons dans la fibre non singulière μ cycles évanescents, ou sphères de dimension moyenne. Il se trouve que la fibre non singulière est homotopiquement équivalente au bouquet de ces sphères.

Au cas où la dimension réelle de la fibre non singulière se divise par 4 (i.e. quand le nombre n des variables est impair), l'indice d'intersection définit dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\lambda; Z)$ de la variété de niveau non singulière une forme bilinéaire symétrique. L'indice de self-intersection de chacun des cycles évanescents est égal à $+2$ ou à -2, en fonction du nombre n des variables. L'action de contournement d'une valeur critique correspondant à un cycle évanescent n'est autre que la réflexion dans un miroir orthogonal à ce cycle au sens du produit scalaire défini par l'indice d'intersection.

Par exemple, pour la fonction de trois variables

$$f(z_1, z_2, z_3) = z_1^{k+1} + z_2^2 + z_3^2$$

il est commode de faire une déformation

$$\tilde{f}(z_1, z_2, z_3) = f(z_1, z_2, z_3) - \varepsilon z_1.$$

C'est une fonction qui admet $\mu = k$ points critiques $(\sqrt[k]{\varepsilon/(k+1)}\xi_m, 0, 0)$, où ξ_m $(m = 1, \ldots, k)$ sont les racines k-ièmes de l'unité. On peut choisir les cycles évanescents correspondants

$\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ de façon à avoir les indices d'intersection suivants: $(\Delta_i \circ \Delta_i) = -2$, $(\Delta_1 \circ \Delta_2) = (\Delta_2 \circ \Delta_3) = \ldots = (\Delta_{k-1} \circ \Delta_k) = 1$ (les autres intersections étant nulles). Le groupe de monodromie est engendré par les réflexions dans les complémentaires orthogonaux des cycles Δ_m et se confond avec le groupe de Weyl A_k (voir [50]), i.e. avec le groupe $S(k+1)$ des permutations de $(k+1)$ éléments.

Partout dans ce chapitre, sauf le § 5, nous aurons affaire à des singularités isolées des fonctions. Par « singularité », nous sous-entendrons donc toujours un germe de fonction holomorphe $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ qui a en 0 un point critique isolé (i.e. un point en lequel toutes les dérivées partielles de f s'annulent).

Soient $G: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ un germe en 0 d'application analytique, U un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$ sur lequel est défini un représentant de G, et G_λ une famille d'applications $U \to \mathbf{C}^p$ analytique en λ du voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$, telle que $G_0 = G$. On appelle *déformée* $\tilde{G}$ de G une application G_λ pour un λ suffisamment petit, sans écrire explicitement la famille ni la restriction imposée à λ.

Les groupes d'homologie partout absolus sont considérés comme des groupes d'homologie réduits modulo un point, et les groupes d'homologie relatifs du couple variété-bord, comme des groupes d'homologie réduits modulo le cycle fondamental (nous omettrons au-dessus de H le signe $\sim$ qu'on met habituellement pour désigner un groupe d'homologie réduit). A moins d'indication contraire, on admet que tous les groupes d'homologie sont à coefficients dans le groupe Z des entiers.

Soit $\mathbf{C}^n$ un espace vectoriel complexe de dimension n muni de coordonnées $x_j = u_j + iv_j$ ($j = 1, \ldots, n$; u_j et v_j sont réelles). L'espace $\mathbf{C}^n$ assimilé à un espace vectoriel réel $\mathbf{R}^{2n}$ de dimension $2n$ admet une orientation privilégiée que nous appellerons complexe et qu'on définit en déclarant positivement orienté dans $\mathbf{R}^{2n}$ le système de coordonnées $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n$. A moins d'indication contraire, on admet que toute variété complexe est munie de son orientation complexe. Avec une telle orientation, l'indice d'intersection des sous-variétés complexes est toujours non négatif.

§ 1. Eléments de théorie de Picard-Lefschetz

Dans ce paragraphe seront définies les notions fondamentales de la théorie de Picard-Lefschetz, telles que cycles évanescents, opérateurs de monodromie et de variation, opérateurs de Picard-Lefschetz... Comme nous l'avons déjà dit, elles sont utilisées pour l'étude topologique des points critiques des fonctions holomorphes.

1.1. Opérateurs de monodromie et de variation. Soient $f: M^n \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur une variété complexe M^n de dimension

n à bord lisse ∂M^n (au sens réel), et U un domaine compact contractile à frontière lisse ∂U dans le plan C. Supposons vérifiées les conditions suivantes:

1° pour un certain voisinage U' de U la restriction de f à l'image réciproque de U' est une application propre $f^{-1}(U') \to U'$, i.e. une application par laquelle tout ensemble compact a pour image réciproque un compact;

2° la restriction de f à $\partial M^n \cap f^{-1}(U')$ est une application régulière sur U', i.e. une application dont la différentielle est épimorphe;

3° la fonction f admet sur l'image réciproque $f^{-1}(U')$ de U' un nombre fini de points critiques p_i $(i = 1, \ldots, \mu)$ à valeurs critiques $z_i = f(p_i)$ intérieures à U, i.e. dans $U - \partial U$.

De la condition 2° il ressort que la restriction de f à $\partial M^n \cap$ $\cap f^{-1}(U)$ définit une fibration $\partial M^n \cap f^{-1}(U) \to U$ localement triviale et triviale, puisque U est contractile par définition. La structure du produit direct dans l'espace fibré correspondant est unique à une homotopie près. De plus la restriction de f à l'image réciproque $f^{-1}(U - \{z_i\})$ de l'ensemble des valeurs non critiques est une fibration localement triviale.

Désignons par F_z, $z \in U$, l'ensemble de niveau de f $(F_z = f^{-1}(z))$. Si $z \in U$ est une valeur non critique de f, l'ensemble de niveau correspondant F_z est une variété complexe compacte de dimension $(n - 1)$ à bord lisse $\partial F_z = F_z \cap \partial M^n$. Fixons une valeur non critique z_0 appartenant à la frontière ∂U de U. Soit γ un lacet dans le complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques $U - \{z_i \mid i = 1, \ldots, \mu\}$ ayant son origine et son extrémité en z_0 $(\gamma : [0, 1] \to U - \{z_i\}, \gamma(0) = = \gamma(1) = z_0)$. (On peut admettre sans diminuer la généralité que tous les lacets et chemins rencontrés sont différentiables par morceaux.) Le parcours de γ engendre une famille continue d'applications $\Gamma_t : F_{z_0} \to M^n$ (notion d'homotopie) pour laquelle Γ_0 est l'application identique de la variété de niveau F_{z_0} dans elle-même, $f(\Gamma_t(x)) = = \gamma(t)$, i.e. l'application Γ_t envoie la variété de niveau F_{z_0} dans la variété de niveau $F_{\gamma(t)}$. On peut choisir (et on choisira) l'homotopie Γ_t de telle façon qu'elle soit compatible à la structure de produit direct sur $\partial M^n \cap f^{-1}(U)$ *). Dans ce cas l'application $h_\gamma = = \Gamma_1 : F_{z_0} \to F_{z_0}$ est identique au bord ∂F_{z_0} de la variété de niveau F_{z_0}. Elle est définie de façon unique à l'homotopie (fixe sur ∂F_{z_0}) près par la classe du lacet γ dans le groupe fondamental $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ du complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques.

Définition. La transformation h_γ d'un ensemble de niveau non singulier F_{z_0} en lui-même s'appelle *monodromie* du lacet γ. L'action $h_{\gamma*}$ de h_γ dans le groupe d'homologie $H_*(F_{z_0})$ de l'ensemble de niveau non singulier s'appelle *opérateur de monodromie* de γ.

*) On peut en réalité choisir comme $\{\Gamma_t\}$ une famille de difféomorphismes $F_{z_0} \to F_{\gamma(t)}$, mais nous n'en aurons pas besoin par la suite.

L'opérateur de monodromie est défini de façon unique par la classe de γ dans le groupe fondamental du complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques.

Nous considérerons aussi l'automorphisme $h_{\gamma *}^{(r)}$ induit par h_γ dans le groupe d'homologie relatif $H_* (F_{z_0}, \partial F_{z_0})$ de l'ensemble de niveau non singulier modulo son bord. Dans l'introduction à ce chapitre, au lieu du groupe d'homologie relatif $H_* (F_{z_0}, \partial F_{z_0})$, nous avons utilisé le groupe d'homologie à supports fermés $H_1^{\text{ferm}} (V_\alpha)$ (vu l'isomorphisme $H_* (F_{z_0}, \partial F_{z_0}) \cong H_*^{\text{ferm}} (F_{z_0} - \partial F_{z_0})$).

Soit δ un cycle relatif dans le couple $(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$. Puisque la transformation h_γ est identique sur le bord ∂F_{z_0} de F_{z_0}, la frontière du cycle $h_\gamma\delta$ se confond avec celle du cycle δ. La différence $h_\gamma\delta - \delta$ est donc un cycle absolu dans F_{z_0}. On voit sans peine que la correspondance $\delta \mapsto h_\gamma\delta - \delta$ détermine un homomorphisme bien défini $\operatorname{var}_\gamma: H_* (F_{z_0}, \partial F_{z_0}) \to H_* (F_{z_0})$.

Définition. L'homomorphisme $\operatorname{var}_\gamma: H_* (F_{z_0}, \partial F_{z_0}) \to H_* (F_{z_0})$ est appelé *opérateur de variation* de γ.

On voit sans peine que les automorphismes $h_{\gamma *}$, $h_{\gamma *}^{(r)}$ et l'opérateur de variation sont liés par les relations

$$h_{\gamma *} = \mathrm{id} + \operatorname{var}_\gamma \cdot i_*, \quad h_{\gamma *}^{(r)} = \mathrm{id} + i_* \cdot \operatorname{var}_\gamma,$$

où $i_*: H_* (F_{z_0}) \to H_* (F_{z_0}, \partial F_{z_0})$ est l'homomorphisme canonique induit par l'inclusion $F_{z_0} \hookrightarrow (F_{z_0}, \partial F_{z_0})$. Si la classe du lacet γ dans le groupe fondamental $\pi_1 (U - \{z_i\}, z_0)$ du complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques est égale au produit $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ des classes γ_1 et γ_2, on a

$$\operatorname{var}_\gamma = \operatorname{var}_{\gamma_1} + \operatorname{var}_{\gamma_2} + \operatorname{var}_{\gamma_2} \cdot i_* \cdot \operatorname{var}_{\gamma_1},$$
$$h_{\gamma *} = h_{\gamma_2 *} \cdot h_{\gamma_1 *},$$
$$h_{\gamma *}^{(r)} = h_{\gamma_2 *}^{(r)} \cdot h_{\gamma_1 *}^{(r)}.$$

La correspondance $\gamma \mapsto h_{\gamma *}$ est donc un (anti)homomorphisme du groupe fondamental $\pi_1 (U - \{z_i\}, z_0)$ du complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques dans le groupe $\operatorname{Aut} H_*(F_{z_0})$ des automorphismes du groupe d'homologie $H_*(F_{z_0})$ de l'ensemble de niveau non singulier.

Soit $(a \circ b)$ l'indice d'intersection des cycles (ou classes d'homologie) a, b. Cette notation sera utilisée tant dans le cas où a et b sont absolus tous deux que dans le cas où l'un des cycles est relatif. Rappelons que la variété de niveau F_{z_0}, étant une variété complexe, possède une orientation privilégiée, laquelle définit précisément l'indice d'intersection des cycles sur F_{z_0}.

Lemme 1. *Soient* $a, b \in H_* (F_{z_0}, \partial F_{z_0})$ *deux classes d'homologie relative*, $\dim a + \dim b = 2n - 2$, *et soit* $\gamma \in \pi_1 (U - \{z_i\}, z_0)$. *Alors* $(\operatorname{var}_\gamma a \circ \operatorname{var}_\gamma b) + (a \circ \operatorname{var}_\gamma b) + (\operatorname{var}_\gamma a \circ b) = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Choisissons deux cycles relatifs, représentants des classes d'homologie a, b, tels que leurs frontières (appartenant au bord ∂F_{z_0} de F_{z_0}) soient disjointes. Cela est possible pour des raisons de la dimension ($\dim \partial a + \dim \partial b = 2n - 4 < 2n - 3 = \dim \partial F_{z_0}$). Ils seront notés a, b comme leurs classes. Deux cycles ainsi choisis ont leur indice d'intersection qui n'est pas bien sûr un invariant de leurs classes dans le groupe d'homologie $H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$. Il vient

$$\operatorname{var}_\gamma a = h_\gamma a - a, \quad \operatorname{var}_\gamma b = h_\gamma b - b,$$

$$(\operatorname{var}_\gamma a \circ \operatorname{var}_\gamma b) + (\operatorname{var}_\gamma a \circ b) + (a \circ \operatorname{var}_\gamma b) =$$
$$= (h_\gamma a \circ h_\gamma b) - (a \circ h_\gamma b) - (h_\gamma a \circ b) + (a \circ b) +$$
$$+ (h_\gamma a \circ b) - (a \circ b) + (a \circ h_\gamma b) - (a \circ b) = 0,$$

car $(h_\gamma a \circ h_\gamma b) = (a \circ b)$.

Corollaire. *Pour* $a, b \in H_* (F_{z_0}\ \partial F_{z_0})$ *on a*

$$(h_{\gamma *}^{(r)} a \circ \operatorname{var}_\gamma b) + (\operatorname{var}_\gamma a \circ b) = 0.$$

D é m o n s t r a t i o n. On a $(h_{\gamma *}^{(r)} a \circ \operatorname{var}_\gamma b) + (\operatorname{var}_\gamma a \circ b) = (i_* \cdot \operatorname{var}_\gamma a \circ \operatorname{var}_\gamma b) + (a \circ \operatorname{var}_\gamma b) + (\operatorname{var}_\gamma a \circ b) = 0$, car $h_{\gamma *}^{(r)} = \mathrm{id} + i_* \cdot \operatorname{var}_\gamma$, $(i_* \cdot \operatorname{var}_\gamma a \circ \operatorname{var}_\gamma b) = (\operatorname{var}_\gamma a \circ \operatorname{var}_\gamma b)$.

1.2. Cycles évanescents et groupe de monodromie. Supposons maintenant que les points critiques p_i d'une fonction f soient tous non dégénérés (i.e. que $\det (\partial^2 f/\partial x_j\, \partial x_k) \neq 0$) et que les valeurs critiques $z_i = f(p_i)$ soient toutes distinctes, $i = 1, \ldots, \mu$. Rappelons qu'une telle fonction est appelée *fonction de Morse.*

Définition. On appelle *groupe de monodromie* d'une fonction (de Morse) f l'image par l'homomorphisme du groupe fondamental $\pi_1 (U - \{z_i\}, z_0)$ du complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques dans le groupe Aut $H_* (F_{z_0})$ des automorphismes du groupe d'homologie $H_* (F_{z_0})$ d'un ensemble de niveau non singulier F_{z_0}, homomorphisme qui associe au lacet γ l'opérateur de monodromie $h_{\gamma *}\colon H_* (F_{z_0}) \to H_* (F_{z_0})$.

Soit dans le domaine U un chemin $u\colon [0, 1] \to U$ allant d'une valeur critique z_i à la valeur non critique z_0 ($u(0) = z_i$, $u(1) = z_0$) et ne traversant aucune valeur critique de f pour $t \neq 0$. D'après le lemme de Morse, il existe sur une variété M^n, au voisinage d'un point critique non dégénéré p_i, un système de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ en lesquelles la fonction f s'écrit sous la forme

$$f(x_1, \ldots, x_n) = z_i + \sum_{j=1}^{n} x_j^2.$$

Choisissons, pour une valeur de t proche de 0, une sphère dans la variété de niveau $F_{u(t)}$

$$S(t)=\sqrt{u(t)-z_i}\cdot S^{n-1},$$

où

$$S^{n-1}=\{(x_1, \ldots, x_n): \sum_j x_j^2=1, \quad \operatorname{Im} x_j=0\}$$

est la sphère unité standard de dimension $(n-1)$.

Le relèvement de l'homotopie de t de 0 à 1 définit une famille de sphères $S(t) \subset F_{u(t)}$ de dimension $(n-1)$ dans les variétés de niveau $F_{u(t)}$ pour tout $t \in (0, 1]$. Remarquons que pour $t=0$ la sphère $S(t)$ dégénère en le point critique p_i.

Définition. La classe d'homologie $\Delta \in H_{n-1}(F_{z_0})$ représentée par la sphère $S(1)$ de dimension $(n-1)$ dans une variété de niveau non singulière donnée F_{z_0} est appelée *cycle évanescent* (le long de u) *de Picard-Lefschetz.*

On voit facilement que la classe d'homotopie du chemin u dans la classe des chemins sur U allant de la valeur critique z_i à la valeur non critique z_0 et ne traversant aucune valeur critique de f pour $t \neq 0$ définit la classe d'homologie du cycle évanescent Δ à l'orientation près.

Définition. Une suite de cycles $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ du groupe d'homologie $H_{n-1}(F_{z_0})$ de dimension $(n-1)$ d'un ensemble de niveau non singulier F_{z_0} est dite *distinguée* si

1) tout cycle Δ_i $(i=1, \ldots, \mu)$ est évanescent le long d'un chemin sans points doubles u_i reliant la valeur critique z_i à la valeur non critique z_0;

2) deux chemins u_i, u_j, $i \neq j$, n'ont d'autre point commun que $u_i(1)=u_j(1)=z_0$;

3) les chemins $u_1, \ldots, u_\mu$ sont numérotés dans l'ordre de leur aboutissement à z_0, en comptant dans le sens horaire à partir de la frontière ∂U de U (fig. 10).

Remarque. C'est pour pouvoir rénuméroter les éléments de la suite distinguée de cycles évanescents, conformément à la condition 3), que nous avions choisi la valeur non critique z_0 sur la frontière ∂U du domaine U.

Exemples. 1. Considérons la fonction de Morse $f(x)=x^3-3\lambda x$, où λ est un petit nombre positif. Remarquons que f est la déformée de la fonction $f_0(x)=x^3$ (qui admet une singularité du type A_2 au sens de la classification établie dans la Première partie), mais cela n'a pas d'importance pour le moment. La fonction f a deux points critiques: $x=\sqrt{\lambda}$ et $x=-\sqrt{\lambda}$ à valeurs critiques $z_1=$

$= -2\lambda\sqrt{\lambda}$ et $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda}$ respectivement. Comme valeur non critique de f, prenons $z_0 = 0$. Joignons les valeurs critiques z_i, $i = 1, 2$, à la valeur non critique z_0 par des segments u_1, u_2. La variété de niveau $\{f = 0\}$ se compose de trois points $x_1 = -\sqrt{3\lambda}$, $x_2 = 0$ et $x_3 = \sqrt{3\lambda}$ (voir fig. 11). On voit sans peine que les cycles évanescents (le long des chemins u_1, u_2 allant de z_1 et de z_2 à 0) sont les différences $\Delta_1 = \{x_3\} - \{x_2\}$ et $\Delta_2 = \{x_2\} - \{x_1\}$ des classes d'homologie de dimension 0 représentées par les points x_1, x_2, x_3. Remarquons

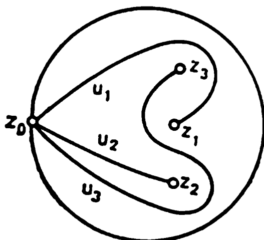


Fig. 10

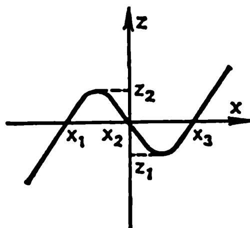


Fig. 11

que nous avons muni ces cycles d'orientations arbitraires: on peut multiplier chaque cycle par (—1).

Pour plus de clarté, nous avons choisi comme valeur non critique $z_0 = 0$, ce qui implique bien sûr un choix particulier du domaine U. Cela n'a pas beaucoup d'importance en l'occurrence, mais dans le texte qui suit, en définissant les bases distinguées des cycles évanescents en homologie d'une variété de niveau non singulière d'une singularité dégénérée, nous choisirons comme U un disque de rayon suffisamment grand (en comparaison avec les valeurs critiques de la fonction déformée). On est bien obligé de choisir la valeur non critique sur la frontière d'un disque suffisamment grand, sinon on ne peut ni identifier sans ambiguïté les groupes d'homologie des variétés de niveau non singulières de la singularité et de sa déformée, ni établir l'ordre dans lequel les cycles évanescents aboutiraient à la base distinguée. Pour « corriger » l'exemple considéré ci-dessus, on peut choisir une valeur non critique z_0^* suffisamment grande ($|z_0^*| \gg 2\lambda\sqrt{\lambda}$), la joindre à la valeur non critique $z_0 = 0$ par un chemin qui ne traverse aucune valeur critique de f et observer la variation de la variété de niveau non singulière de $f = z$ quand z parcourt ce chemin de $z_0 = 0$ à z_0^*. Au n° 2.9 nous ferons une construction analogue dans un cas plus général. En attendant, pour simplifier les choses, nous nous bornerons à modifier légèrement notre exemple.

1*. Considérons la fonction de Morse $f(x) = x^3 + 3\lambda x$, où λ est un nombre positif. Les points critiques de f sont $x = -\sqrt{\lambda}i$ et

$x = +\sqrt{\lambda i}$, à valeurs critiques $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda i}$ et $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda i}$. Comme domaine U, prenons un disque de centre 0 et de rayon r suffisamment grand, $r \gg 2\lambda\sqrt{\lambda}$. Considérons deux valeurs non critiques $z_0 = 0$ et $z_0^* = r$ de f. Joignons les valeurs critiques z_1, z_2 à $z_0 = 0$ par des segments d'axe imaginaire et joignons $z_0 = 0$ à $z_0^* = r$ par un segment du demi-axe positif de l'axe réel. Nous obtenons ainsi des chemins u_1, u_2 joignant les valeurs critiques z_1, z_2 à la valeur non critique z_0^*. La variété de niveau nul de f se compose comme précédemment de trois points $x_1 = -\sqrt{3\lambda i}$, $x_2 = 0$ et $x_3 = +\sqrt{3\lambda i}$. La variété de niveau $\{f = z_0^*\}$ est proche de la variété de niveau $\{f_0 = z_0^*\}$ de la fonction $f_0(x) = x^3$ (car $|z_0^*| = r \gg 2\lambda\sqrt{\lambda}$). Elle se compose donc de trois points $x_1^* \approx \exp(-2\pi i/3)\sqrt[3]{z_0^*}$, $x_2^* \approx \sqrt[3]{z_0^*}$, $x_3^* \approx \exp(2\pi i/3)\sqrt[3]{z_0^*}$. On voit sans peine que le long du segment joignant $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda i}$ (resp. $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda i}$) à $z_0 = 0$ le cycle évanescent est $\{x_2\} - \{x_1\}$ (resp. $\{x_3\} - \{x_2\}$). Il est tout aussi évident que, la valeur non critique z parcourant le segment du demi-axe positif entre $z_0 = 0$ et $z_0^* = r$, les points de la variété $\{f = z\}$ se déplacent de telle façon que x_2 reste sur l'axe réel, x_1 passe dans le demi-plan inférieur et x_3, dans le demi-plan supérieur. Donc, quand z varie de z_0 à z_0^*, les points x_1, x_2 et x_3 passent aux points x_1^*, x_2^* et x_3^* respectivement. Par

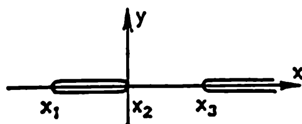


Fig. 12

conséquent, les cycles évanescents le long des chemins décrits u_1, u_2 allant des valeurs critiques z_1, z_2 de f à sa valeur non critique z_0^* sont $\Delta_1 = \{x_2^*\} - \{x_1^*\}$ et $\Delta_2 = \{x_3^*\} - \{x_2^*\}$ respectivement. Il est facile de voir que les cycles évanescents Δ_1 et Δ_2 forment une suite distinguée.

2. Considérons la fonction de deux variables $f(x, y) = x^3 - 3\lambda x + y^2$, où λ est un petit nombre positif. Comme précédemment, f est une déformée de la fonction $f_0(x, y) = x^3 + y^2$ qui admet également une singularité du type A_2 au sens de la Première partie. La fonction f a les mêmes valeurs critiques $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda}$, $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda}$ que la fonction f de l'exemple 1. La fonction prend ces valeurs dans les points $(\sqrt{\lambda}, 0)$ et $(-\sqrt{\lambda}, 0)$ respectivement. Joignons les valeurs critiques z_1, z_2 à la valeur non critique $z_0 = 0$ par des segments u_1, u_2 de l'axe réel. La variété de niveau nul de f (la courbe complexe $\{f = 0\}$) est le graphe de la fonction bivalente $y = \sqrt{-x^3 + 3\lambda x}$ et

représente à ce titre un revêtement ramifié à deux feuillets du plan de la variable complexe x, avec comme points de ramification $x_1 = -\sqrt{3\lambda}$, $x_2 = 0$ et $x_3 = \sqrt{3\lambda}$. On l'obtient en prenant deux exemplaires du plan de la variable complexe x, en faisant des coupures sur ces plans de x_1 à x_2 et de x_3 à ∞ (fig. 12) et en les recollant en croix le long des lignes de coupe. Quand z varie le long de l'axe

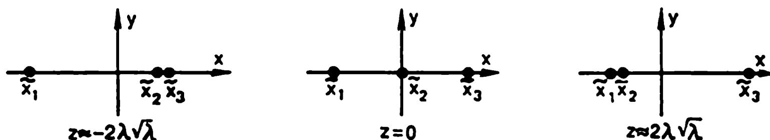


Fig. 13

réel de $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda}$ à $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda}$, la variété $\{f = z\}$ se déforme. On suit sur la figure 13 le déplacement des points de ramification $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1(z)$, $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_2(z)$ et $\tilde{x}_3 = \tilde{x}_3(z)$ de cette variété, considérée comme un revêtement à deux feuillets au-dessus du plan de la variable complexe x. On voit que les cycles évanescents correspondant aux valeurs critiques $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda}$ et $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda}$ et

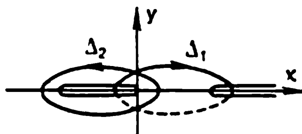


Fig. 14

aux chemins décrits u_1, u_2 joignant z_1, z_2 à la valeur non critique 0 sont les cycles Δ_1, Δ_2 de dimension 1 montrés sur la figure 14 (on a représenté en trait interrompu la partie du cycle située sur le second feuillet de la surface ; les orientations des cycles évanescents peuvent être choisies de façon arbitraire comme précédemment).

Soit de nouveau u un chemin joignant une valeur critique z_i à la valeur non critique z_0.

Définition. On appelle *lacet simple* associé à un chemin u un élément du groupe fondamental $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ du complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques, élément représenté par un lacet qui va suivant u de z_0 vers z_i, qui évite z_i dans le sens positif (antihoraire) et qui revient suivant u à z_0.

Le domaine U privé de μ valeurs critiques $\{z_i \mid i = 1, \ldots, \mu\}$ de la fonction f est homotopiquement équivalent à un bouquet de μ cercles. Aussi le groupe fondamental $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ du complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques de f est-il un groupe

libre à μ générateurs. Si $\{u_i \mid i = 1, \ldots, \mu\}$ est un système de chemins définissant une suite distinguée de cycles évanescents $\{\Delta_i\}$, alors le groupe $\pi_1 (U - \{z_i\}, z_0)$ est engendré par les lacets simples $\tau_1, \ldots, \tau_\mu$ associés aux chemins $u_1, \ldots, u_\mu$.

Définition. On dit que la suite de cycles évanescents $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ définie par un système de chemins $\{u_i\}$ est *faiblement distinguée* si le groupe fondamental $\pi_1 (U - \{z_i\}, z_0)$ du complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques est un groupe libre à générateurs $\tau_1, \ldots, \tau_\mu$ associés aux chemins $u_1, \ldots, u_\mu$.

Remarquons qu'en permutant ses éléments, la suite reste faiblement distinguée sans être distinguée.

Si le système de chemins $\{u_i \mid i = 1, \ldots, \mu\}$ définit une suite faiblement distinguée de cycles évanescents $\{\Delta_i\}$ dans le groupe d'homologie de dimension $(n - 1)$ d'une variété de niveau non singulière, le groupe de monodromie de la fonction f est engendré par les opérateurs de monodromie $h_{\tau_i *}$ des lacets simples τ_i, $i = 1, \ldots, \mu$, associés aux chemins u_i. Aussi le groupe de monodromie de la fonction (de Morse) f est-il toujours à μ générateurs.

Définition. L'opérateur de monodromie $h_i = h_{\tau_i *}: H_* (F_{z_0}) \to H_* (F_{z_0})$ d'un lacet simple τ_i est appelé *opérateur de Picard-Lefschetz* associé au chemin u_i (ou au cycle évanescent Δ_i).

Exemples. 1. Considérons la fonction de Morse $f(x) = x^3 + 3\lambda x$ de l'exemple 1* illustrant la définition des suites distinguées de cycles évanescents. Soit τ_i un lacet simple (d'origine et d'extrémité en z_0^*) associé au chemin u_i. Quand la valeur non critique z parcourt le lacet τ_1, la variété de niveau $\{f = z\}$ change comme suit : les points x_1^* et x_2^* se rapprochent, font chacun un demi-tour autour d'un centre commun en se mettant l'un à la place de l'autre, puis s'écartent en reprenant chacun la position antérieure de l'autre. La monodromie h_{τ_1} du lacet τ_1 permute donc les points x_1^*, x_2^* et conserve le point x_3^*. Il s'ensuit que

$$h_1\Delta_1 = h_{\tau_1 *}\Delta_1 = h_{\tau_1 *} (\{x_2^*\} - \{x_1^*\}) = \{x_1^*\} - \{x_2^*\} = -\Delta_1,$$
$$h_1\Delta_2 = h_{\tau_1 *}\Delta_2 = h_{\tau_1 *} (\{x_3^*\} - \{x_2^*\}) = \{x_3^*\} - \{x_1^*\} = \Delta_2 + \Delta_1.$$

D'une façon parfaitement analogue

$$h_2\Delta_2 = -\Delta_2, \quad h_2\Delta_1 = \Delta_2 + \Delta_1.$$

Le groupe d'homologie $H_{n-1} (F_z, \partial F_z)$ d'une variété de niveau non singulière modulo le bord est le dual du groupe d'homologie $H_{n-1} (F_z)$ (réduit modulo un point pour $n = 1$). Dans le cas considéré son rôle est joué par le quotient du groupe d'homologie ordinaire de dimension 0 de la variété de niveau $\{f = z_0^*\}$ (constituée de trois points x_1^*, x_2^* et x_3^*) par le sous-groupe engendré par le « cycle maximal » $\{x_1^*\} + \{x_2^*\} + \{x_3^*\}$. Il est engendré par deux cycles

∇_1 et ∇_2 tels que $(\nabla_i \circ \Delta_j) = \delta_{ij}$. En qualité de tels cycles, on peut prendre $\nabla_1 = -\{x_1^*\}$, $\nabla_2 = \{x_3^*\}$. De la description de la transformation de monodromie h_{τ_1} il ressort que $\mathrm{var}_{\tau_1} \nabla_1 = -\{x_2^*\} + \{x_1^*\} = -\Delta_1$, $\mathrm{var}_{\tau_1} \nabla_2 = 0$. Pour le lacet τ_2 on a $\mathrm{var}_{\tau_2} \nabla_1 = 0$, $\mathrm{var}_{\tau_2} \nabla_2 = -\Delta_2$.

Considérons à présent un lacet τ défini par la formule $\tau(t) = z_0^* \exp(2\pi it)$. Le lacet τ ferme autour des valeurs critiques de la fonction f un cercle de grand rayon parcouru dans le sens positif (antihoraire). Puisque, pour $|z|$ grands, l'ensemble de niveau $\{f = z\}$ est proche de l'ensemble de niveau $\{x^3 = z\}$, la transformation de monodromie h_τ du lacet τ fait permuter x_1^*, x_2^* et x_3^* de façon cyclique $(x_1^* \to x_2^* \to x_3^* \to x_1^*)$. D'où $h_{\tau *}\Delta_1 = h_{\tau *}(\{x_2^*\} - \{x_1^*\}) = \{x_3^*\} - \{x_2^*\} = \Delta_2$, $h_{\tau *}\Delta_2 = h_{\tau *}(\{x_3^*\} - \{x_2^*\}) = \{x_1^*\} - \{x_3^*\} = -\Delta_1 - \Delta_2$. On peut établir ces mêmes relations en utilisant le fait que le lacet τ est homotope au produit $\tau_2\tau_1$ des lacets simples τ_2 et τ_1, et que donc $h_{\tau *} = h_1 \cdot h_2$. Pour l'opérateur de variation on a $\mathrm{var}_\tau \nabla_1 = -\{x_2^*\} + \{x_1^*\} = -\Delta_1$, $\mathrm{var}_\tau \nabla_2 = \{x_1^*\} - \{x_3^*\} = -\Delta_1 - \Delta_2$.

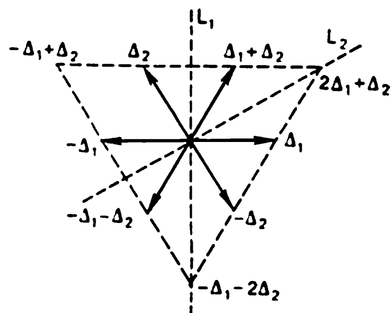


Fig. 15

Le groupe de monodromie de la fonction de Morse f est engendré par les opérateurs $h_1 = h_{\tau_1 *}$ et $h_2 = h_{\tau_2 *}$ de monodromie des lacets τ_1 et τ_2 (opérateurs de Picard-Lefschetz). Tous les éléments de ce groupe préservent la forme d'intersection dans le groupe d'homologie $H_0(F_{z_0^*})$ d'une variété de niveau non singulière (réduit modulo un point) engendré par les cycles évanescents Δ_1 et Δ_2. Pour mieux comprendre la structure du groupe de monodromie, considérons sur le plan euclidien six vecteurs de longueur $\sqrt{2}$ qui font entre eux des angles égaux à $(\pi/3)$ (fig. 15). On voit sans peine que le groupe $H_0(F_{z_0^*})$ (comme module sur l'anneau des entiers avec une forme bilinéaire entière) est isomorphe à un réseau d'entiers sur le plan engendré par les vecteurs Δ_1 et Δ_2 (les six vecteurs représentés sur la figure 15 sont les éléments du réseau dont les carrés des longueurs sont égaux à 2). L'opérateur h_1 est réalisé par la réflexion par rapport à la droite L_1 orthogonale à Δ_1 et l'opérateur h_2 par rapport à la droite L_2 orthogonale à Δ_2. Il s'ensuit que le groupe des transformations du réseau engendré par les opérateurs h_1 et h_2 (groupe de monodromie de la fonction de Morse f) est isomorphe au groupe $S(3)$ des permutations de trois éléments (à savoir des trois vecteurs $(2\Delta_1 + \Delta_2)$, $(-\Delta_1 + \Delta_2)$ et $(-\Delta_1 - 2\Delta_2)$).

2. Dans l'exemple 2 de la page 22 la description de la variété de niveau $\{f = z\}$ sous forme de revêtement ramifié à deux feuillets au-dessus du plan de la variable complexe x présentant trois points de ramification permet de suivre les actions des transformations de monodromie h_{τ_1}, h_{τ_2} et d'obtenir les relations $h_1\Delta_1 = \Delta_1$, $h_1\Delta_2 = \Delta_2 + \Delta_1$, $h_2\Delta_1 = \Delta_1 - \Delta_2$, $h_2\Delta_2 = \Delta_2$, $\operatorname{var}_{\tau_1} \nabla_1 = -\Delta_1$, $\operatorname{var}_{\tau_1} \nabla_2 = 0$, $\operatorname{var}_{\tau_2} \nabla_1 = 0$, $\operatorname{var}_{\tau_2} \nabla_2 = -\Delta_2$. Nous laissons au lecteur le soin de faire toutes les constructions géométriques nécessaires *). Sur la figure 16 sont indiqués les cycles relatifs qu'on peut

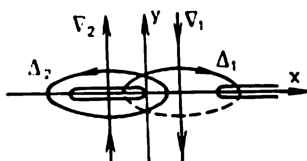


Fig. 16

prendre comme ∇_1 et ∇_2, i.e. comme générateurs du groupe d'homologie relatif $H_1 (F_{z_0^*}, \partial F_{z_0^*})$ d'une variété de niveau non singulière de la fonction f modulo son bord, tels que $(\nabla_i \circ \Delta_j) = \delta_{ij}$.

Le groupe de monodromie de la fonction de Morse $f(x, y) = x^3 - 3\lambda x + y^2$ est isomorphe au sous-groupe du groupe des matrices 2×2 non dégénérées engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ correspondant aux opérateurs de Picard-Lefschetz h_1 et h_2. Ce groupe se confond avec celui de toutes les matrices entières de déterminant $(+1)$.

1.3. Théorème de Picard-Lefschetz. Soient τ un lacet simple associé à un chemin u qui joint une valeur critique z_i à la valeur non critique z_0, et $\Delta \in H_{n-1} (F_{z_0})$ un cycle évanescent le long de u. Proposons-nous de déterminer l'action des opérateurs var_τ et $h_{\tau *}$ dans les groupes d'homologie correspondants.

Sans diminuer la généralité, on peut admettre que la valeur critique $z_i = u(0)$ est égale à 0, que la fonction f s'écrit au voisinage du point critique p_i sous la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_j x_j^2$ (pour $\| (x_1, \ldots, x_n) \|$ suffisamment petit, par exemple pour $\sum_j |x_j|^2 \leqslant 4\varepsilon^2$, toutes les coordonnées locales x_j sont nulles au point p_i), que la valeur non critique z_0 est suffisamment proche de la valeur critique 0 (par exemple $|z_0| = \varepsilon^2$) et $u(t) = tz_0$. On suppose en outre que

*) Elles sont analogues aux constructions que nous avons entreprises dans l'introduction pour un cas plus simple.

toutes les valeurs critiques non nulles de f sont supérieures à $4\varepsilon^2$ en module. Quitte à faire un changement linéaire des coordonnées, on obtient $\varepsilon = 1$, $z_0 = 1$. Au lieu de τ on peut prendre un lacet homotope τ': $\tau'(t) = \exp(2\pi i t)$, $t \in [0, 1]$.

Soit $r = r(x_1, \ldots, x_n) = \| x \| = (\sum_j | x_j |^2)^{1/2} = (\sum_j x_j \bar{x}_j)^{1/2}$ norme du vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Soit $\tilde{F}_z$ l'intersection de l'ensemble de niveau F_z avec la boule (fermée) $\bar{B}_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) : r \leqslant 2\}$ de rayon 2 dans l'espace $\mathbf{C}^n$.

Lemme 2. *Pour* $| z | < 4$ *l'ensemble de niveau* F_z *est transversal à la sphère* $S_2 = \partial \bar{B}_2$ *de dimension* $(2n - 1)$ *(l'ensemble de niveau* F_z *est une variété pour* $z \neq 0$, *l'ensemble de niveau nul* F_0 *est une variété partout sauf en* 0).

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que $x \in F_z \cap S_2$ et que l'ensemble de niveau F_z ne soit pas transversal à la sphère S_2 en x. Alors $dr^2(x)$ est une combinaison linéaire de $df(x)$ et $d\bar{f}(x)$, i.e.

$$dr^2(x) = \alpha\, df(x) + \beta\, d\bar{f}(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C}.$$

Il vient

$$df(x) = 2 \sum x_j\, dx_j, \quad d\bar{f}(x) = 2 \sum \bar{x}_j\, d\bar{x}_j,$$
$$dr^2(x) = \sum \bar{x}_j\, dx_j + \sum x_j\, d\bar{x}_j,$$

d'où

$$\bar{x}_j = 2\alpha x_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Or, les coordonnées x_j ne sont pas toutes nulles, d'où $| 2\alpha | = 1$ et donc

$$r^2(x) = 2\alpha f(x), \quad | f(x) | = r^2(x) = 4,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il découle de ce lemme que pour $0 < | z | < 4$ les ensembles $\tilde{F}_z = F_z \cap \bar{B}_2$ sont des variétés à bord difféomorphes entre elles. Il est évident que $\tilde{F}_0$ est un cône de sommet en 0 et, par conséquent, est contractile.

Lemme 3. *Pour* $0 < | z | < 4$ *la variété* $\tilde{F}_z$ *est difféomorphe à l'espace fibré en disques du fibré tangent à la sphère standard* S^{n-1} *de dimension* $n - 1$.

D é m o n s t r a t i o n. Sans diminuer la généralité, on peut admettre que $z = 1$, ce qui revient à considérer la variété $\tilde{F}_1$. Soit $x_j = u_j + iv_j$, où u_j et v_j sont réels. La variété $\tilde{F}_1$ se définit en

coordonnées u_j, v_j par les équations $\sum u_j^2 - \sum v_j^2 = 1$, $\sum u_j v_j = 0$, $\sum u_j^2 + \sum v_j^2 \leqslant 4$. Dans l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^{2n}$ muni de coordonnées $\tilde{u}_j$, $\tilde{v}_j$ ($j = 1, \ldots, n$) l'espace fibré en disques du fibré tangent à la sphère standard de dimension $(n-1)$ située dans l'espace $\mathbf{R}^n$ peut être défini sous la forme $\sum \tilde{u}_j^2 = 1$, $\sum \tilde{u}_j \tilde{v}_j = 0$, $\sum \tilde{v}_j^2 \leqslant \rho^2$ (ici $\rho > 0$ est le rayon des disques de fibration (le type de l'espace fibré considéré comme variété différentiable n'en dépend évidemment pas)). On vérifie aisément que la transformation $\tilde{u}_j = u_j / \sqrt{\sum u_j^2}$, $\tilde{v}_j = v_j$ définit le difféomorphisme demandé (pour $\rho^2 = 3/2$).

Il s'ensuit que $H_k(\tilde{F}_1) = 0$ pour $k \neq n-1$, $H_{n-1}(\tilde{F}_1) = Z$. Le groupe d'homologie $H_{n-1}(\tilde{F}_1)$ est engendré alors par un cycle évanescent de Picard-Lefschetz Δ représenté par la sphère standard $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \colon \sum u_j^2 = 1,\ v_j = 0\}$ de dimension $n-1$.

Supposons que la variété $\tilde{F}_1$ soit munie d'une orientation définie par la structure du fibré tangent à la sphère. Cela signifie qu'au point $(1, 0, \ldots, 0)$ de $\tilde{F}_1$ le système de coordonnées positivement orienté est $u_2, u_3, \ldots, u_n, v_2, v_3, \ldots, v_n$. L'orientation de $\tilde{F}_1$ comme variété complexe se définit en rangeant les coordonnées dans l'ordre suivant : $u_2, v_2, u_3, v_3, \ldots, u_n, v_n$. On remarque facilement que ces deux orientations diffèrent par le signe de $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

L'indice de self-intersection de la section nulle dans l'espace du fibré tangent à la variété se confond avec la caractéristique d'Euler-Poincaré χ de cette variété. Cette assertion se démontre comme suit. Conformément à une de ses définitions, la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété N est le nombre des points singuliers d'un champ de vecteurs générique v sur N comptés avec les multiplicités $+1$ ou -1 en fonction de leurs indices ($\mathrm{v} \colon N \to TN$, $\mathrm{v}(x) \in T_x N$). Pour calculer l'indice de self-intersection $(N \circ N)$ de la variété N comme section nulle du fibré tangent TN dans l'espace de ce fibré, on peut choisir une déformée $\tilde{N}$ de N dans TN qui rencontre transversalement N en un nombre fini de points et chercher les indices d'intersection $(N \circ \tilde{N})$ des cycles de N et de $\tilde{N}$ en ces points. Une telle déformée peut être choisie sous la forme $\tilde{N} = \{x, \mathrm{v}(x)\}$, où $x \in N$, $\mathrm{v}(x) \in T_x N$ et v est un champ de vecteurs générique sur N. Les points d'intersection des cycles de N et de $\tilde{N}$ se confondent avec les points singuliers du champ de vecteurs v. Un calcul bien simple montre que l'indice d'intersection des cycles

de N et de $\tilde{N}$ en un point d'intersection coïncide avec l'indice de ce point regardé comme point singulier de v.

La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(S^{n-1})$ de la sphère S^{n-1} de dimension $(n-1)$ est égale à $1 + (-1)^{n-1}$, i.e. elle est égale à 0 pour n pair et à 2 pour n impair. Puisque la variété $\tilde{F}_1$ est difféomorphe à l'espace fibré en disques du fibré tangent à la sphère de dimension $(n-1)$, l'indice de self-intersection du cycle évanescent Δ dans $\tilde{F}_1$, dont l'orientation est définie par la structure du fibré tangent à la sphère sur cette variété, est égal à $\chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$. D'où le

Lemme 4. *L'indice de self-intersection d'un cycle évanescent Δ dans la variété complexe $\tilde{F}_1$ est égal à*

$$(\Delta \circ \Delta) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (1 + (-1)^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \equiv 0 \bmod 2, \\ +2 & \text{pour } n \equiv 1 \bmod 4, \\ -2 & \text{pour } n \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Par la dualité de Poincaré, les groupes d'homologie relatifs $H_k(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$ sont nuls pour $k \neq n-1$ et le groupe $H_{n-1}(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$ est isomorphe au groupe Z des entiers. Le groupe $H_{n-1}(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$ est engendré alors par le cycle relatif ∇ dual du cycle évanescent Δ, i.e. par un cycle tel que l'indice d'intersection $(\nabla \circ \Delta) = 1$. Comme représentant de ∇, on peut choisir une sous-variété non singulière

$$T = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \tilde{F}_1 : u_1 > 0, \quad u_2 = \ldots = u_n = 0\}$$

de $\tilde{F}_1$ munie d'une orientation convenable. Par le difféomorphisme de la variété de niveau $\tilde{F}_1$ et de l'espace du fibré tangent à la sphère construit dans le lemme 3, à la sous-variété T correspond la fibre de ce fibré, i.e. une boule dans l'espace tangent à la sphère S^{n-1} en $(1, 0, \ldots, 0)$.

Considérons la restriction de l'application f à $f^{-1}(\bar{D}_1) \setminus B_2$, où B_2 est une boule ouverte de rayon 2 et $\bar{D}_1$ l'adhérence d'un disque de rayon 1 dans le plan C. Elle définit une fibration localement triviale, donc triviale $f^{-1}(\bar{D}_1) \setminus B_2 \to \bar{D}_1$ au-dessus du disque unité $\bar{D}_1$. Le relèvement Γ_t de l'homotopie $t \mapsto \tau'(t) = \exp(2\pi i t)$ en homotopie de la fibre de F_1 peut être choisi compatible à la structure du produit direct sur l'espace de cette fibration $f^{-1}(\bar{D}_1) \setminus B_2$. Un cycle relatif δ de dimension k dans $(F_1, \partial F_1)$ peut être représenté sous la forme $\delta = \delta_1 + \delta_2$, où δ_1 est un cycle relatif dans $(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$ et δ_2 une chaîne dans $F_1 \setminus B_2$. La transformation de parcours du chemin $h_{\tau'} = \Gamma_1$ est fixe sur $F_1 \setminus B_2$; elle laisse donc inchangée la chaîne δ_2 et n'agit de façon non triviale que sur le cycle δ_1. On a donc $\mathrm{var}_{\tau'}(\delta) = \mathrm{var}_{\tau'}(\delta_1)$ (nous utilisons les mêmes notations pour les opérateurs

de monodromie $\mathrm{var}_{\tau'}$ qui correspondent aux couples $(M^n, \partial M^n)$ et $(\bar{B}_2, \partial \bar{B}_2)$). Si la dimension k du cycle δ n'est pas $(n-1)$, on a $\delta_1 = 0$ dans le groupe d'homologie relatif $H_k(\tilde{F}_1, \partial \tilde{F}_1)$ (car ce groupe est nul lui-même). D'où le

Lemme 5. *Pour toute dimension autre que* $(n-1)$, *l'opérateur de variation* $\mathrm{var}_{\tau'}$ *est nul et les opérateurs* $h_{\tau'*}$ *et* $h_{\tau'*}^{(r)}$ *sont identiques.*

Si $k = \dim \delta = (n-1)$, on a $\delta_1 = m \cdot \nabla$ dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(\tilde{F}_1, \partial \tilde{F}_1)$, avec $m = (\delta \circ \Delta)$. Il suffit donc, pour déterminer l'action de l'opérateur de variation $\mathrm{var}_{\tau'}$, de calculer la classe d'homologie de $\mathrm{var}_{\tau'}(\nabla)$.

Théorème de Picard-Lefschetz.

$$\mathrm{var}_{\tau'}(\nabla) = (-1)^{n(n+1)/2} \Delta.$$

Corollaire. *Pour* $a \in H_{n-1}(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$ *on a*

$$\mathrm{var}_{\tau}(a) = (-1)^{n(n+1)/2}(a \circ \Delta)\, \Delta,$$

$$h_{\tau*}^{(r)}(a) = a + (-1)^{n(n+1)/2}(a \circ \Delta)\, i_*(\Delta);$$

pour $a \in H_{n-1}(F_{z_0})$ *on a*

$$h_{\tau*}(a) = a + (-1)^{n(n+1)/2}(a \circ \Delta)\, \Delta.$$

Cette dernière formule est généralement appelée *formule de Picard-Lefschetz.* Pour un nombre de variables n impair, cette formule et le lemme 4 montrent que l'opérateur de Picard-Lefschetz $h_{\tau*}$ est la réflexion de l'espace $H_{n-1}(F_{z_0})$ par rapport à un hyperplan qui est orthogonal (au sens de la forme d'intersection) au cycle évanescent correspondant Δ.

On peut démontrer le théorème de Picard-Lefschetz par un calcul élémentaire et direct mais encombrant (voir par exemple [147]). Un peu plus loin, au nº 2.4, nous indiquerons une démonstration plus invariante. En attendant, nous allons démontrer le théorème pour n impair.

Il existe un relèvement naturel Ω_t de l'homotopie $t \mapsto \tau'(t) = \exp(2\pi i t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ en homotopie $\tilde{F}_1 \mapsto \tilde{F}_{\tau'(t)}$ de la fibre, qui n'est pas d'ailleurs compatible à la structure du produit direct sur le bord. Ce relèvement se définit par la formule $\Omega_t(x) = \exp(\pi i t)\, x$. L'homotopie Ω_t ne convient pas pour définir l'action de l'opérateur de variation $\mathrm{var}_{\tau'}$; par contre, on voit sans peine qu'elle permet de déterminer celle de l'opérateur de monodromie $h_{\tau'*}$ sur le groupe d'homologie $H_{n-1}(\tilde{F}_1)$ de la fibre. Il est évident que la transformation Ω_1 est une simple multiplication par (-1). En particulier, sur la sphère évanescente Δ elle se confond avec la réflexion au centre, d'où $\Omega_{1*}(\Delta) = h_{\tau'*}(\Delta) = (-1)^n \Delta$.

Soit $i_*: H_{n-1}(\widetilde{F}_1) \to H_{n-1}(\widetilde{F}_1, \partial\widetilde{F}_1)$ un homomorphisme naturel induit par l'inclusion $\widetilde{F}_1 \hookrightarrow (\widetilde{F}_1, \partial\widetilde{F}_1)$. Puisque $(\Delta \circ \Delta) = (i_*(\Delta) \circ \Delta)$, $(\nabla \circ \Delta) = 1$, il ressort du lemme 4 que

$$i_*(\Delta) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (1 + (-1)^{n-1}) \nabla =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{pour } n \equiv 0 \bmod 2, \\ 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} \nabla & \text{pour } n \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}$$

Le groupe d'homologie $H_{n-1}(\widetilde{F}_1)$ de la fibre étant isomorphe au groupe des entiers et engendré par le cycle évanescent Δ, on a $\mathrm{var}_{\tau'}(\nabla) = m\Delta$ pour un m entier. Puisque $h_{\tau'*} = \mathrm{id} + \mathrm{var}_{\tau'} \cdot i_*$, on a pour un nombre impair n de variables $-\Delta = h_{\tau'*}(\Delta) = = \Delta + 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{var}_{\tau'}(\nabla) = \Delta + 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} m\Delta$. Il en ressort que $m = (-1)^{\frac{n+1}{2}}$, et l'on retrouve (pour n impair) l'assertion du théorème de Picard-Lefschetz.

§ 2. Topologie d'un ensemble de niveau non singulier et opérateur de variation de la singularité

2.1. Ensemble de niveau non singulier d'une singularité. Soit $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ une singularité, i.e. germe de fonction holomorphe avec un point critique isolé en 0. Du théorème des fonctions implicites il ressort qu'au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$ l'ensemble de niveau $f^{-1}(\varepsilon)$, $\varepsilon \neq 0$, est une variété analytique non singulière et que l'ensemble de niveau $f^{-1}(0)$ est une variété non singulière partout sauf le point $0 \in \mathbf{C}^n$ en lequel il admet un point singulier.

Lemme 1. *Il existe un* $\rho > 0$ *tel qu'une sphère* $S_r \subset \mathbf{C}^n$ *de rayon* $r \leqslant \rho$ *centrée en* 0 *rencontre transversalement l'ensemble de niveau* $f^{-1}(0)$.

En effet, la fonction $\| x \|^2$ ne peut prendre sur l'ensemble $f^{-1}(0)$ (au voisinage de $0 \in \mathbf{C}^n$) qu'un nombre fini de valeurs critiques (dans le cas où f est un polynôme, cette assertion découle automatiquement du *curve selection lemma* de Milnor ([245]) par exemple; dans le cas général elle est démontrée par un raisonnement analogue). Choisissons comme ρ un nombre dont le carré soit plus petit que toute valeur critique de $\| x \|^2$ sur la variété $f^{-1}(0) - 0$. Dire que toute valeur critique de $\| x \|^2$ sur $f^{-1}(0) - 0$ est plus grande que ρ^2 revient à dire que pour $r \leqslant \rho$ une sphère S_r de rayon r centrée en 0 (variété de niveau de $\| x \|^2$) rencontre transversalement la variété $f^{-1}(0) - 0$.

Du lemme 1 il découle que pour un $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit la variété de niveau $f^{-1}(\varepsilon)$ est transversale elle aussi à la sphère S_ρ si $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. Ainsi donc, la fonction $f: \bar{B}_\rho \to \mathbf{C}$ vérifie les conditions 1° à 3° du n° 1.1 (avec comme M^n la boule $\bar{B}_\rho$ de rayon ρ centrée en 0, comme U le disque $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ de rayon ε_0 centré au point 0 de $\mathbf{C}^n$ et l'unique point critique 0). Proposons-nous de décrire la topologie de l'ensemble de niveau $f^{-1}(\varepsilon)$ au voisinage de 0.

Définition. On appelle *ensemble de niveau non singulier* de la singularité f au voisinage de son point critique 0 l'ensemble

$$V_\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho = \{x \in \mathbf{C}^n : f(x) = \varepsilon, \quad \|x\| \leqslant \rho\}$$

pour $0 < |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, qui est une variété complexe à bord.

La variété V_ε est définie de façon unique à un difféomorphisme près. On sait ([245]) qu'elle a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dimension $(n-1)$. Le nombre $\mu = \mu(f)$ des sphères est appelé *multiplicité* ou *nombre de Milnor* de la singularité f. Les groupes d'homologie $H_k(V_\varepsilon)$ d'un ensemble de niveau non singulier sont nuls pour $k \neq (n-1)$; le groupe $H_{n-1}(V_\varepsilon) \cong Z^\mu$ est un groupe abélien libre à μ générateurs. L'assertion sur les groupes d'homologie $H_k(V_\varepsilon)$ d'un ensemble de niveau non singulier sera démontrée un peu plus loin (voir théorème 1). Quant au résultat sur le type d'homotopie d'un ensemble de niveau non singulier, il découle du théorème 1 lui aussi (pour $n > 2$), moyennant un résultat auxiliaire selon lequel la variété V_ε est simplement connexe (ce deuxième résultat est démontré par le même raisonnement que le théorème).

Le groupe fondamental $\pi_1(\bar{D}_{\varepsilon_0} - 0)$ du complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques est isomorphe au groupe des entiers et est engendré par la classe d'un lacet γ_0 qui entoure une fois la valeur critique 0 dans le sens positif (antihoraire). On peut poser par exemple

$$\gamma_0(t) = \varepsilon \cdot \exp(2\pi i t) \quad (|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0,\ t \in [0, 1]).$$

Définition. On appelle *monodromie classique* $h: V_\varepsilon \to V_\varepsilon$ de la singularité f la monodromie h_{γ_0} du lacet γ_0. On appelle *opérateur de monodromie classique* de la singularité f l'automorphisme $h_* = h_{\gamma_0 *}$ du groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ d'un ensemble de niveau non singulier V_ε. On appelle *opérateur de variation* de la singularité f l'opérateur

$$\mathrm{Var}_f = \mathrm{var}_{\gamma_0}: H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon) \to H_{n-1}(V_\varepsilon)$$

de variation du lacet γ_0.

Pour construire une base du groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon) \cong \cong Z^{\mu(f)}$ d'un ensemble de niveau non singulier V_ε de la singularité f,

on peut procéder comme suit. Soit $\tilde{f} = f_\lambda$ une déformée de f définie au voisinage de la boule $\bar{B}_\rho$ (on peut prendre comme $\tilde{f}$ par exemple la déformation $f_\lambda = f + \lambda g$, où g est une fonction linéaire $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$). Pour un λ suffisamment petit ($|\lambda| \leqslant \lambda_0$) l'ensemble de niveau $\tilde{f}^{-1}(\varepsilon)$ est transversal à la sphère S_ρ si $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, et toute valeur critique de $\tilde{f}$ sur $\bar{B}_\rho$ est plus petite en module que ε_0. On montre sans peine qu'un ensemble de niveau non singulier $\tilde{f}^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho$ est difféomorphe à un ensemble de niveau non singulier V_ε de f pour $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. En accord avec le théorème de Sard, la presque totalité des déformées $\tilde{f}$ de f présentent dans $\bar{B}_\rho$ uniquement des points critiques non dégénérés à valeurs critiques distinctes (c'est le cas de la presque totalité des fonctions linéaires g dans notre exemple).

Montrons par exemple que $\tilde{f} = f + g$ est une fonction de Morse pour presque toutes les fonctions linéaires g: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$. A cet effet, considérons l'application df: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ définie par la formule

$$df(x) = (\partial f/\partial x_1(x), \ldots, \partial f/\partial x_n(x)) \quad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n).$$

Presque toutes les valeurs $(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbf{C}^n$ sont non critiques pour cette application (théorème de Sard). Si $(l_1, \ldots, l_n)$ est une valeur non critique de df, alors la fonction $f - \sum_j l_j x_j$ n'a que des points critiques non dégénérés. En effet, les points critiques de $f - \sum_j l_j x_j$ sont des points en lesquels $\partial f/\partial x_j - l_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, i.e. ce sont les images réciproques du point $(l_1, \ldots, l_n)$ par l'application df. Puisque $(l_1, \ldots, l_n)$ est une valeur non critique pour l'application df, la matrice $(\partial^2 f/\partial x_j\, \partial x_k)$ a le déterminant non nul en ces points, ce qui montre justement que les points critiques correspondants de $\tilde{f} = f - \sum l_j x_j$ sont non dégénérés. L'ensemble des valeurs non critiques de df étant ouvert, l'adjonction à $\tilde{f}$ d'une petite fonction linéaire ne la fait pas sortir de la classe des fonctions ayant les points critiques non dégénérés mais permet de rendre ses valeurs critiques distinctes deux à deux.

Nous retrouvons la situation qui a été décrite au § 1. Soient comme précédemment $F_z = \tilde{f}^{-1}(z) \cap \bar{B}_\rho$ ($|z| \leqslant \varepsilon_0$), p_i les points critiques de $\tilde{f}$ dans la boule $\bar{B}_\rho$ à valeurs critiques z_i distinctes $|z_i| < \varepsilon_0$, $i = 1, \ldots, \mu$, et $\{u_i\}$ un système de chemins qui joignent les valeurs critiques z_i à la valeur non critique z_0 ($|z_0| = \varepsilon_0$) et définissent dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(F_{z_0})$ d'un ensemble de niveau non singulier de $\tilde{f}$ une suite distinguée de cycles évanescents $\{\Delta_i\}$. Rappelons que cette dernière condition signifie que les chemins u_i sont sans points doubles et (deux à deux) sans points communs, sauf z_0.

Théorème 1. *La suite distinguée de cycles évanescents* $\{\Delta_i\}$ *forme une base du groupe d'homologie (abélien libre)* $H_{n-1}(F_{z_0}) \cong H_{n-1}(V_\varepsilon)$ *d'un ensemble de niveau non singulier d'une singularité f. En particulier, le nombre des points critiques non dégénérés de* $\tilde{f}$ *dans* $\bar{B}_\rho \cap \cap \tilde{f}^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0})$ *(qui résultent de la décomposition du point critique* 0 *de f) est égal à la multiplicité* $\mu(f)$ *de f. Les groupes* $H_k(F_{z_0})$ *sont nuls pour* $k \neq (n-1)$.

Démonstration. Soient $X = \bar{B}_\rho \cap f^{-1}(D_{\varepsilon_0})$, $\tilde{X} = \bar{B}_\rho \cap \tilde{f}^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0})$, où $\rho > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ sont les mêmes que précédemment. Montrons que l'espace X est contractile.

Du fait que l'ensemble $f^{-1}(0)$ de niveau nul de la fonction f est transversal aux sphères S_r de rayon $r \leqslant \rho$ centrées au point 0 de $\mathbf{C}^n$ découle que l'ensemble $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ est homéomorphe à un cône au-dessus de la variété $f^{-1}(0) \cap S_\rho$ et est donc contractile. On peut effectuer la contraction de $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ vers son point 0 en introduisant sur cette variété un champ de vecteurs orthogonal aux sous-variétés $f^{-1}(0) \cap S_r$, $r \leqslant \rho$ (rappelons que l'ensemble $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ est une variété partout sauf en 0).

A son tour l'espace $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ est un rétracte par déformation de l'espace $X = f^{-1}(D_{\varepsilon_0}) \cap \bar{B}_\rho$. On peut par exemple construire la rétraction par déformation requise de X comme suit. Choisissons une suite $\rho = r_0 > r_1 > r_2 > \ldots > 0$ qui tende vers 0 de façon monotone. Prenons des ε_i tels que $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > 0$ et que l'ensemble de niveau $f^{-1}(\varepsilon)$ soit transversal à une sphère S_{r_i} de rayon r_i centrée en 0 pour $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_i$. La fonction f définit des fibrations localement triviales, donc triviales $E_i = f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_i}) \cap (\bar{B}_{r_0} - B_{r_i}) \to \bar{D}_{\varepsilon_i}$. Leurs trivialisations peuvent être choisies de telle façon qu'elles se confondent sur les intersections $E_i \cap E_{i-1} = f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_i}) \cap (\bar{B}_{r_0} - B_{r_{i-1}})$. Considérons une déformation g_t du disque $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ définie pour $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0$ par la formule

$$g_t(x) = \begin{cases} t \cdot \dfrac{x}{\|x\|} & \text{pour } \|x\| \geqslant t, \\ x & \text{pour } \|x\| \leqslant t. \end{cases}$$

L'application g_t envoie le disque $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ de rayon ε_0 dans un disque de rayon t qui, lui, reste fixe. L'application g_0 est une rétraction par déformation de $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ en le point 0. Puisque la fonction f définit des fibrations localement triviales $f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0} - 0) \cap \bar{B}_{r_0} \to \bar{D}_{\varepsilon_0} - 0$, il existe une famille G_t $(0 < t \leqslant \varepsilon_0)$ d'applications de l'ensemble $X = f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0}) \cap \bar{B}_{r_0}$ dans lui-même qui relève l'homotopie g_{t_0}. On peut choisir cette famille compatible à la structure du produit direct sur les ensembles $E_i = f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_i}) \cap (\bar{B}_{r_0} - B_{r_i})$ pour $t \leqslant \varepsilon_i$. On

voit sans peine qu'on peut passer naturellement de la famille G_t, où $0 < t \leqslant \varepsilon_0$, à la famille G_t pour $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0$, où l'application G_0 est rétraction par déformation de X sur l'ensemble de niveau nul $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_{r_0}$.

Si $\tilde{f}$ est une déformée suffisamment petite de la fonction f, l'espace $\tilde{X}$ est difféomorphe à X (comme variété différentiable à coins; en réalité il suffit de remarquer que $\tilde{X}$ est homotopiquement équivalent à X), donc contractile lui aussi.

La fonction $\tilde{f}$ applique l'espace $\tilde{X}$ dans le disque $\bar{D}_{\rho_0}$ et, en dehors des valeurs critiques $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$, est une fibration localement triviale de fibre F_{z_0}. Considérons la réunion $\bigcup_{i,t} u_i(t) = V$ des images des chemins u_i. C'est un rétracte par déformation du disque $\bar{D}_{\varepsilon_0}$. Il est facile de voir que la rétraction par déformation du disque $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ sur l'espace V peut être relevée en rétraction par déformation de l'espace $\tilde{X}$ sur l'espace $Y = \tilde{f}^{-1}(V)$ (de même que la rétraction par déformation du disque $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ dans le point 0 se relève en rétraction par déformation de l'espace X sur l'ensemble de niveau nul $f^{-1}(0) \cap \cap \bar{B}_\rho$). En éliminant de l'espace Y les fibres singulières $\tilde{f}^{-1}(z_i)$, on obtient un espace $Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)$ fibré au-dessus de l'espace contractile $V - \{z_i \mid i = 1, \ldots, \mu\}$. Par conséquent, il est homéomorphe au produit direct de la fibre F_{z_0} par l'espace $V - \{z_i \mid i = = 1, \ldots, \mu\}$, donc homotopiquement équivalent à la fibre F_{z_0}.

On montre sans peine qu'il est possible d'obtenir, au type d'homotopie près, l'espace Y à partir de la fibre F_{z_0} en « bouchant » les sphères évanescentes Δ_i avec des boules $\mathscr{B}_i$ de dimension n. Nous nous bornerons à définir une application unilatérale d'équivalence homotopique des espaces considérés. Soit $s_i(t): S_i^{n-1} \to S_i(t) \subset \subset F_{u_i(t)}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ une famille d'applications d'une sphère standard S_i^{n-1} de dimension $(n-1)$ (l'indice i marque simplement le numéro de l'exemplaire) définissant le cycle évanescent $\Delta_i = = s_i(1)$ $(s_i(0): S_i^{n-1} \to p_i)$. Soit $\mathscr{B}_i$ une boule de dimension n qui est un cône au-dessus de la sphère S_i^{n-1} $(\mathscr{B}_i = [0, 1] \times S_i^{n-1}/0 \times \times S_i^{n-1})$. L'espace $F_{z_0} \cup_{\{\Delta_i\}} \{\mathscr{B}_i\}$ obtenu à partir de la fibre F_{z_0} par « bouchage » des cycles évanescents Δ_i avec des boules $\mathscr{B}_i$ de dimension n est l'espace quotient $F_{z_0} \cup \bigcup_{i=1}^{\mu} \mathscr{B}_i$ par la relation d'équivalence $s_i(1)(a) \sim (1, a)$ $(a \in S_i^{n-1}, (1, a) \in \mathscr{B}_i, i = 1, \ldots, \mu)$. Son application φ dans Y, qui est une équivalence d'homotopie, peut être définie comme suit: $\varphi(x) = x$ pour $x \in F_{z_0} \subset Y$, $\varphi(t, a) = = s_i(t)(a)$ pour $(t, a) \in \mathscr{B}_i$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $a \in S_i^{n-1}$.

On a une suite d'homotopie exacte du couple

$$(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)) : \ldots \to H_{k+1}(Y) \to$$
$$\to H_{k+1}(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)) \to H_k(Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)) \to H_k(Y) \to \ldots$$

Ici $H_i(Y) = 0$ (puisque l'espace Y est homotopiquement équivalent à l'espace contractile X; rappelons que l'homologie est supposée réduite modulo un point),

$$H_{k+1}(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)) = \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_{k+1}(\mathcal{B}_i, \partial\mathcal{B}_i) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq n-1, \\ Z^{\mu} & \text{pour } k = n-1, \end{cases}$$

$H_k(Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)) = H_k(F_{z_0})$. La suite étant exacte, on a

$$H_k(F_{z_0}) \cong H_{k+1}(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq n-1, \\ Z^{\mu} & \text{pour } k = n-1 \end{cases}$$

le générateur du groupe $H_n(\mathcal{B}_i, \partial\mathcal{B}_i)$ passant en le cycle évanescent Δ_i. D'où l'assertion du théorème.

De la suite d'homotopie exacte du couple $(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i))$, on déduit sans peine que l'espace $Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)$ est simplement connexe; il en est donc de même pour l'ensemble de niveau non singulier F_{z_0} quand $n > 2$.

Du théorème 1 il découle que la multiplicité d'un point critique d'une singularité f est égale au nombre des points critiques non dégénérés en lesquels se décompose ce point par une déformation générique de f. Ce nombre est égal au nombre des images réciproques (proches de 0) du point générique par l'application $df: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ $(df(x_1, \ldots, x_n) = \partial f/\partial x_1(x), \ldots, \partial f/\partial x_n(x))$. On en déduit la formule de la multiplicité d'un point critique isolé d'une fonction f:

$$\mu(f) = \dim_{\mathbf{C}} {}_n\mathcal{O}/(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n),$$

où ${}_n\mathcal{O}$ est l'anneau des germes en 0 de fonctions holomorphes de n variables et $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ l'idéal dans ${}_n\mathcal{O}$ engendré par les dérivées partielles de la fonction f (idéal jacobien du germe f). Cette assertion a été démontrée dans la Première partie, § 5.

2.2. Cycles évanescents et groupe de monodromie d'une singularité. On a montré au n° 2.1 que presque toute déformée $\tilde{f}$ de la singularité $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ est une fonction de Morse, i.e. qu'elle n'admet, au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$, que des points critiques non dégénérés au nombre égal à la multiplicité de la singularité f, toutes

les valeurs critiques $z_1, \ldots, z_\mu$ de $\tilde{f}$ étant distinctes. Dans ce cas l'ensemble de niveau non singulier V_ε de la singularité f est difféomorphe à l'ensemble de niveau non singulier $F_{z_0} = \tilde{f}^{-1}(z_0) \cap \bar{B}_\rho$ de la fonction $\tilde{f}$. L'existence d'un tel difféomorphisme permet d'introduire les définitions suivantes:

Définition. On appelle *cycle évanescent* Δ dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ d'un ensemble de niveau non singulier de la singularité f, un élément de ce groupe qui correspond, dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(F_{z_0})$ d'un ensemble de niveau non singulier de la fonction $\tilde{f}$, à un cycle qui s'évanouit le long d'un chemin qui joint une valeur critique z_i de $\tilde{f}$ à sa valeur non critique z_0.

Définition. Une base du groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ d'une variété de niveau non singulière constituée d'une suite distinguée de cycles évanescents $\{\Delta_i\}$ est appelée *base distinguée.* Une base constituée d'une suite faiblement distinguée de cycles évanescents est dite *faiblement distinguée.*

Le théorème 1 affirme que toute suite distinguée de cycles évanescents forme une base. On montre plus loin que toute suite faiblement distinguée forme également une base (voir n° 2.6).

Remarque. Les termes « distingué » et « faiblement distingué » sont dus à A. Gabrielov. Dans [201] la base distinguée est appelée base géométrique.

Définition. On appelle *groupe de monodromie* d'une singularité f le groupe de monodromie de sa déformée (fonction de Morse) $\tilde{f}$.

On montre sans peine que l'ensemble des cycles évanescents et le groupe de monodromie de la singularité f ne dépendent pas du choix de la déformée de Morse $\tilde{f} = f_\lambda$ de f. En effet, soit $\tilde{\tilde{f}} = f'_\nu$ une autre déformée de f. Les deux déformées f_λ, f'_ν peuvent être incluses dans une même famille de fonctions $f_{\lambda,\nu}$ à deux paramètres ($f_{\lambda,0} = f_\lambda$, $f_{0,\nu} = f'_\nu$). On peut prendre par exemple la famille $f_{\lambda,\nu} = f_\lambda + f'_\nu - f$. Dans l'espace $\mathbf{C}^2$ muni de coordonnées (λ, ν), les valeurs des paramètres (λ, ν) auxquelles correspondent des fonctions non de Morse $f_{\lambda,\nu}$ forment (au voisinage du point $(0, 0) \in \mathbf{C}^2$) l'ensemble image d'un ensemble analytique de dimension complexe un. Il ne divise donc pas l'espace $\mathbf{C}^2$ des valeurs des paramètres (λ, ν). Il s'ensuit que les déformées $\tilde{f} = f_\lambda$ et $\tilde{\tilde{f}} = f'_\nu$ se laissent joindre par une famille continue à un paramètre de fonctions de Morse $f_{\lambda(t),\ \nu(t)}$ ($t \in [0, 1]$, $f_{\lambda(0),\ \nu(0)} = \tilde{f}$, $f_{\lambda(1),\ \nu(1)} = \tilde{\tilde{f}}$). On voit aisément que l'en-

semble des cycles évanescents et le groupe de monodromie restent inchangés le long d'une telle famille de fonctions de Morse.

Pour les mêmes raisons, les notions de base distinguée et faiblement distinguée sont invariantes par le choix de la déformée.

Des résultats du § 1 il ressort que le groupe de monodromie de la singularité f est engendré par les opérateurs de Picard-Lefschetz h_i qui correspondent aux éléments Δ_i d'une base faiblement distinguée dans le groupe d'homologie d'un ensemble de niveau non singulier de f au voisinage du point critique. Si le nombre n de variables est impair, les opérateurs en question sont des réflexions dans des hyperplans orthogonaux (au sens de la forme d'intersection) aux cycles évanescents Δ_i. Donc, quand le nombre de variables est impair, le groupe de monodromie de la singularité est un groupe engendré par des réflexions.

Exemple. Considérons les fonctions $f(x) = x^3$ et $f(x, y) = x^3 + y^2$ qui admettent des singularités du type A_2 au sens de la Première partie. On peut choisir leurs déformées de Morse sous la forme $\tilde{f}(x) = x^3 \pm 3\lambda x$ et $\tilde{f}(x, y) = x^3 - 3\lambda x + y^2$ respectivement, où λ est un petit nombre positif. Les bases distinguées dans le groupe d'homologie d'une variété de niveau non singulière et les groupes de monodromie des fonctions de Morse $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{f}(x, y)$ (qui se confondent avec les bases distinguées et les groupes de monodromie des singularités $f(x)$, $f(x, y)$) ont été considérés dans les exemples du n° 1.2.

2.3. Opérateur de variation et forme de Seifert d'une singularité. Nous avons introduit au n° 2.1 la notion d'opérateur de variation d'une singularité. Afin d'étudier les propriétés de cet opérateur, nous donnerons une interprétation différente de cette notion ([99], [213]).

Soient comme précédemment $f\colon (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ une singularité, i.e. un germe de fonction holomorphe admettant un point critique isolé en 0, ρ un nombre positif suffisamment petit, S_ρ^{2n-1} une sphère de rayon ρ centrée au point 0 de l'espace $\mathbf{C}^n$. Posons $K = f^{-1}(0) \cap S_\rho^{2n-1}$. On sait que l'ensemble de niveau $f^{-1}(0)$ rencontre transversalement la sphère S_ρ^{2n-1}; par conséquent, K est une sous-variété différentiable de S_ρ^{2n-1} de codimension 2. Désignons par T un voisinage tubulaire ouvert suffisamment petit de K dans S_ρ^{2n-1}. Soit $\Phi\colon S_\rho^{2n-1} \setminus T \to S^1 \subset \mathbf{C}$ application du complément de T au cercle, telle que $\Phi(x) = f(x)/|f(x)| = \exp(i \arg f(x))$. Il est montré dans [245], § 4 que Φ est une fibration différentiable; la restriction de Φ à la frontière $\partial(S_\rho^{2n-1} \setminus T) = \partial T$ a alors une structure naturelle de fibration triviale $K \times S^1 \to S^1$.

La restriction de la fonction f à $f^{-1}(S_{\varepsilon_0}^1) \cap \bar{B}_\rho$ définit une fibration au-dessus du cercle $S_{\varepsilon_0}^1$ de rayon ε_0 situé dans la droite complexe

C, fibration dont la fibre est une variété de niveau non singulière $V_{\varepsilon_0} = f^{-1}(\varepsilon_0) \cap \overline{B}_\rho$ de la singularité f. Alors, comme nous l'avons dit plus haut, la restriction de f au bord $f^{-1}(S^1_{\varepsilon_0}) \cap S_\rho$ de la variété $f^{-1}(S^1_{\varepsilon_0}) \cap \overline{B}_\rho$ a elle aussi la structure de fibration triviale. Les opérateurs de monodromie classique et de variation de la singularité ont été définis à l'aide de la fibration $f^{-1}(S^1_{\varepsilon_0}) \cap \overline{B}_\rho \to S^1_{\varepsilon_0}$.

Lemme 2 (voir [245], § 5). *Les deux fibrations au-dessus des cercles S^1 et $S^1_{\varepsilon_0}$ sont équivalentes (par rapport à l'isomorphisme des cercles qui se réduit à la multiplication par ε_0). En particulier, la fibre $\Phi^{-1}(z)$ de Φ est difféomorphe à un ensemble de niveau non singulier de la singularité f au voisinage du point critique.*

Ainsi donc, en définissant l'opérateur de variation Var_f de la singularité f, on peut se servir de la fibration Φ. Nous désignerons comme précédemment par $\Gamma_t : \Phi^{-1}(1) \to \Phi^{-1}(\exp(2\pi it))$ une famille de difféomorphismes obtenue par relèvement de l'homotopie $t \mapsto \mapsto \exp(2\pi it)$ ($\Gamma_0 = \mathrm{id}$, $t \in [0, 1]$) et compatible à la structure du produit direct sur le bord.

Ouvrons une petite parenthèse afin de rappeler quelques définitions.

Soient M une variété à bord (réelle) orientée de dimension n de bord ∂M, $e_1, \ldots, e_{n-1}$ un repère dans l'espace tangent à ∂M en un point, e_0 la normale extérieure à ∂M dans M au même point. On dit que le repère $e_1, \ldots, e_{n-1}$ définit l'orientation du bord ∂M si $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ est un repère positivement orienté dans l'espace tangent à M. Une convention analogue est adoptée pour les chaînes et leurs frontières.

Soient a, b deux cycles disjoints de dimension $(n-1)$ dans la sphère S^{2n-1} de dimension $(2n-1)$. Pour $n = 1$, supposons en outre que a et b soient homologues à zéro; pour $n > 1$ cette condition est vérifiée automatiquement. Choisissons dans S^{2n-1} une chaîne A de dimension n dont la frontière se confond avec le cycle a. On voit sans peine que l'indice d'intersection $(A \circ b)$ des chaînes A, b dans la sphère S^{2n-1} (qui est défini, car la frontière de A, égale à a, ne rencontre pas le cycle b) est indépendant du choix de A. Soit en effet A' une autre chaîne vérifiant les mêmes conditions; alors la différence $(A - A')$ est un cycle absolu de dimension n dans S^{2n-1}, d'où $((A - A') \circ b) = 0$, i.e. $(A \circ b) = (A' \circ b)$. L'indice d'intersection $(A \circ b)$ des chaînes A, b s'appelle *coefficient d'enlacement* des cycles a, b et se note $l(a, b)$.

Il existe une autre méthode de calcul du coefficient d'enlacement. Soit D^{2n} une boule dont la frontière est une sphère S^{2n-1}. Choisissons dans D^{2n} deux chaînes $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ de dimension n dont les frontières se confondent avec les cycles a, b respectivement et qui sont entièrement contenues, à l'exception de leurs frontières, à l'intérieur de la boule

D^{2n}. On peut alors calculer l'indice d'intersection $(\tilde{A} \circ \tilde{B})_D$ des chaînes $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ dans D^{2n} et $l(a, b) = (A \circ b)_S = (-1)^n (\tilde{A} \circ \tilde{B})_D = = (\tilde{B} \circ \tilde{A})_D = (-1)^n l(b, a)$.

Pour démontrer cette assertion, remarquons que l'indice d'intersection $(\tilde{A} \circ \tilde{B})_D$ est bien défini, i.e. indépendant du choix concret des chaînes $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ pour lesquelles $\partial\tilde{A} = a$, $\partial\tilde{B} = b$. La boule D^{n2} peut être assimilée à un cône au-dessus de la sphère S^{2n-1}, i.e. à l'espace quotient du produit $[0, 1] \times S^{2n-1}$ du segment $[0, 1]$ et de la sphère S^{2n-1} par le sous-espace $\{0\} \times S^{2n-1}$ (aux fibres $\{t\} \times S^{2n-1}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, correspondent dans la boule des sphères concentriques de rayon t). Ceci posé, on peut prendre comme chaîne $\tilde{B}$ un cône au-dessus du cycle b ayant son sommet au centre de la boule D^{2n} ($\tilde{B} = [0, 1] \times b/\{0\} \times b$), et comme chaîne $\tilde{A}$, la réunion du cylindre $[1/2, 1] \times a$ au-dessus du cycle a et de la chaîne $\{1/2\} \times A$ située sur la sphère $\{1/2\} \times S^{2n-1}$ de rayon $1/2$ ($A \subset S^{2n-1}$, $\partial A = a$; le cas de $n = 1$ est illustré sur la figure 17). Les chaînes $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ se coupent alors en des points de la forme $(1/2, x)$, où x est le point d'intersection de la chaîne A avec le cycle b. Le signe des indices d'intersection correspondants se calcule sans difficulté.

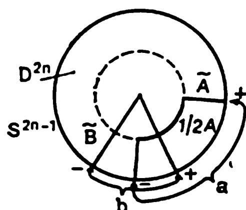


Fig. 17

Revenons à la singularité f. Soient a, b deux cycles de dimension $(n-1)$ dans la fibre $\Phi^{-1}(1)$ de la fibration $\Phi: S_\rho^{2n-1} \setminus T \to S^1$. Le cycle $\Gamma_{1/2*}b$ est situé dans la fibre $\Phi^{-1}(-1)$ et ne rencontre donc pas le cycle a. Par conséquent le coefficient d'enlacement des cycles a et $\Gamma_{1/2*}b$ en tant que cycles situés dans une sphère de dimension $(2n-1)$ a un sens.

Définition. On appelle *forme de Seifert* d'une singularité f une forme bilinéaire L sur le groupe d'homologie $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ $(\cong H_{n-1}(V_\varepsilon))$ telle que $L(a, b) = l(a, \Gamma_{1/2*}b)$, où $a, b \in H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$.

D'après le théorème de dualité d'Alexander, le coefficient d'enlacement définit la dualité des groupes d'homologie $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ et $H_{n-1}(S^{2n-1} - \Phi^{-1}(1))$. On voit sans peine que la fibre $\Phi^{-1}(-1)$ est un rétracte par déformation de l'espace $S^{2n-1} - \Phi^{-1}(1)$. Par conséquent, le groupe d'homologie $H_{n-1}(S^{2n-1} - \Phi^{-1}(1))$ est isomorphe au groupe d'homologie $H_{n-1}(\Phi^{-1}(-1))$. Puisque la transformation $\Gamma_{1/2*}$ est un isomorphisme des groupes d'homologie $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ et $H_{n-1}(\Phi^{-1}(-1))$, la forme de Seifert définit la dualité du groupe $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ à lui-même, i.e. est une forme

bilinéaire entière non dégénérée de déterminant ± 1. Remarquons que la forme de Seifert L n'est pas symétrique en général.

Soient $b \in H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ la classe d'homologie absolue et $a \in H_{n-1}(\Phi^{-1}(1), \partial\Phi^{-1}(1))$ la classe d'homologie relative modulo le bord.

Lemme 3. $L(\mathrm{Var}_f\, a, b) = (a \circ b)$.

D é m o n s t r a t i o n. Choisissons un cycle relatif de dimension $(n - 1)$ dans le couple $(\Phi^{-1}(1), \partial\Phi^{-1}(1))$ représentant la classe d'homologie a; ce cycle sera noté a lui aussi. Considérons l'application $[0, 1] \times a \to S^{2n-1}$ du cylindre au-dessus du cycle a dans la sphère, application par laquelle $(t, c) \in [0, 1] \times a$ passe en $\Gamma_t(c) \in S^{2n-1}$; alors la base inférieure $\{0\} \times a$ du cylindre $[0, 1] \times a$ est envoyée sur la chaîne a, la base supérieure $\{1\} \times a$ sur la chaîne $\Gamma_1 a$ et $[0, 1] \times \partial a$ sur la frontière ∂T du voisinage tubulaire T de la variété K. L'application décrite définit donc dans la sphère S^{2n-1} une chaîne de dimension n dont la frontière se compose de deux parties, à savoir: la variation $\mathrm{Var}_f\, a = \Gamma_1 a - a$ du cycle a (située dans la fibre $\Phi^{-1}(1)$) et un cycle situé sur ∂T. Contractant la deuxième partie de la frontière à l'intérieur de T suivant les rayons, nous obtenons dans S^{2n-1} une chaîne A dont la frontière est située dans la fibre $\Phi^{-1}(1) \subset S^{2n-1}$ et est égale à $\mathrm{Var}_f(a)$. L'intersection de la chaîne A et du cycle $\Gamma_{1/2*}b$ se confond alors avec celle des cycles $\Gamma_{1/2*}a$ et $\Gamma_{1/2*}b$ dans la fibre $\Phi^{-1}(-1)$. Ainsi donc,

$$L(\mathrm{Var}_f\, a, b) = l(\mathrm{Var}_f\, a, \Gamma'_{1/2*}b) = (A \circ \Gamma_{1/2*}b)_S = \\ = (\Gamma_{1/2*}a \circ \Gamma_{1/2*}b)_{\Phi^{-1}(-1)} = (a \circ b)_{\Phi^{-1}(1)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Puisque la forme de Seifert L définit la dualité du groupe d'homologie $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ à lui-même et l'indice d'intersection, la dualité des groupes $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ et $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1), \partial\Phi^{-1}(1))$, on a le

Théorème 2. *L'opérateur de variation* Var_f *de la singularité* f *est un isomorphisme des groupes d'homologie* $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1), \partial\Phi^{-1}(1)) \simeq H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ *ou, ce qui revient au même, des groupes* $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon) \simeq H_{n-1}(V_\varepsilon)$.

Remarque. Si nous avions déjà la démonstration du théorème de Picard-Lefschetz dans le cas général, nous pourrions obtenir le même résultat en écrivant la matrice de l'opérateur Var_f dans une base distinguée du groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ et dans sa duale du groupe $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ (voir n° 2.5).

De ce théorème et du lemme 3 on déduit le

Théorème 3. *Si* $a, b \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$, *alors*

$$L(a, b) = (\mathrm{Var}^{-1} a \circ b).$$

Remarque. La définition du coefficient d'enlacement et celle de la forme de Seifert se distinguent parfois des définitions que nous venons de donner par le signe ou par la permutation des arguments (voir par exemple [99]).

La forme de Seifert $L(a, b)$ s'avère d'une grande utilité pour l'étude de la structure topologique des singularités. En particulier, la forme de Seifert (ou l'opérateur de variation $(H_{n-1}(V_\varepsilon))^* \to H_{n-1}(V_\varepsilon)$) définit la forme d'intersection sur le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ d'une variété de niveau non singulière.

Théorème 4. *Pour $a, b \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$ on a*

$$(a \circ b) = -L(a, b) + (-1)^n L(b, a).$$

Démonstration. Puisque l'opérateur de variation de la singularité est un isomorphisme, il existe des cycles relatifs a', $b' \in H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ tels que $a = \mathrm{Var}_f\, a'$, $b = \mathrm{Var}_f\, b'$. Il ne reste donc qu'à appliquer l'assertion du lemme 1 du n° 1.1 aux cycles a', b'.

En plus de la forme d'intersection, l'opérateur de variation définit aussi l'action de l'opérateur de monodromie classique de la singularité. L'opérateur inverse de l'opérateur de variation agit du groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ d'une variété de niveau non singulière dans son dual $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$. A cet opérateur correspond l'opérateur $(\mathrm{Var}_f^{-1})^T : H_{n-1}(V_\varepsilon) \to H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ tel que $((\mathrm{Var}_f^{-1})^T a \circ b) = L(b, a) = (\mathrm{Var}_f^{-1} b \circ a)$ pour $a, b \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$. En notation matricielle cette condition signifie que la matrice de l'opérateur $(\mathrm{Var}_f^{-1})^T$ se déduit par transposition à partir de celle de Var_f^{-1}.

Théorème 5 ([195]). *L'opérateur h_* de monodromie classique d'une singularité se définit en fonction de son opérateur de variation comme suit :*

$$h_* = (-1)^n \,\mathrm{Var}\,(\mathrm{Var}^{-1})^T.$$

Démonstration. On a l'égalité $(x \circ y) = (i_* x \circ y)$ dans laquelle $x, y \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$ et i_* est un homomorphisme $H_{n-1}(V_\varepsilon) \to H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ induit par l'inclusion $V_\varepsilon \hookrightarrow (V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$. Cette égalité et le théorème 4 conduisent à la formule

$$i_* = -\mathrm{Var}_f^{-1} + (-1)^n (\mathrm{Var}_f^{-1})^T.$$

Pour l'opérateur de monodromie classique on a

$$h_* = \mathrm{id} + \mathrm{Var}_f\, i_* = \mathrm{id} - \mathrm{Var}_f \mathrm{Var}_f^{-1} + (-1)^n \mathrm{Var}_f (\mathrm{Var}_f^{-1})^T = (-1)^n \mathrm{Var}_f (\mathrm{Var}_f^{-1})^T,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Une assertion analogue vaut pour l'action de la monodromie classique dans le groupe d'homologie relatif:

Théorème 6. $h_*^{(r)} = (-1)^n\,(\mathrm{Var}^{-1})^T\,\mathrm{Var}$.

2.4. Démonstration du théorème de Picard-Lefschetz. Les notations sont celles du n° 1.3.

Puisque l'opérateur de variation

$$\mathrm{var}_{\tau'}: H_{n-1}(\widetilde{F}_1, \partial\widetilde{F}_1) \to H_{n-1}(\widetilde{F}_1),$$

regardé comme opérateur de variation de la singularité

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$

est un isomorphisme (théorème 2), on a $\mathrm{var}_{\tau'}(\nabla) = \pm\Delta$. Pour choisir le signe, appliquons le théorème 3. Dans la définition de la fibration Φ (pour le point critique 0 de la fonction $x_1^2 + \ldots + x_n^2$), on peut poser $\rho = 1$. La fibration $\Phi: S^{2n-1}\setminus T \to S^1$ est définie par la formule

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{|x_1^2 + \ldots + x_n^2|} \quad (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = 1).$$

La fibre $\Phi^{-1}(1)$ de cette fibration est difféomorphe à la variété de niveau $\widetilde{F}_1$. Alors au cycle évanescent Δ dans la variété $\widetilde{F}_1$ correspond dans la fibre $\Phi^{-1}(1)$ un cycle défini par les équations $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$, $\mathrm{Im}\, x_j = 0$. Ce dernier cycle sera aussi noté Δ.

On a

$$(\mathrm{Var}^{-1}\Delta \circ \Delta) = L(\Delta, \Delta) = l(\Delta, \Gamma_{1/2*}\Delta) = (-1)^n(\widetilde{A} \circ \widetilde{B})_D,$$

où $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ sont deux chaînes de dimension n dans la boule $D = D^{2n}$ dont les frontières, qui appartiennent à la sphère S^{2n-1}, sont égales à Δ et $\Gamma_{1/2*}\Delta$ respectivement. On voit sans peine qu'il est possible de calculer le coefficient d'enlacement $l(\Delta, \Gamma_{1/2*}\Delta)$ au moyen d'une famille de difféomorphismes $\Gamma_t: \Phi^{-1}(1) \to \Phi^{-1}(\exp(2\pi it))$ qui ne doit pas nécessairement être compatible à la structure du produit direct sur la frontière. Ce peut être une famille définie par la formule

$$\Gamma_t(x_1, \ldots, x_n) = (\exp(\pi it)\,x_1, \ldots, \exp(\pi it)\,x_n).$$

Le cycle $\Gamma_{1/2*}\Delta$ aura alors pour équations $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -1$ et $\mathrm{Re}\, x_j = 0$. Comme $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$, on peut choisir dans la boule D^{2n} deux chaînes d'équations respectives $\{\mathrm{Im}\, x_j = 0\}$ et $\{\mathrm{Re}\, x_j = 0\}$. Les orientations de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont rendues compatibles alors par l'application de $\widetilde{A}$ dans $\widetilde{B}$ qui est une multiplication par i. Si le système de coordonnées d'orientation positive sur le disque $\widetilde{A}$ est la suite $u_1, \ldots, u_n$ $(x_j = u_j + iv_j)$, le système de coordonnées d'orientation

positive sur le disque $\widetilde{B}$ sera $v_1, \ldots, v_n$. Les chaînes $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ sont des variétés différentiables (disques de dimension n) qui se coupent transversalement en 0. Il s'ensuit que

$$(\widetilde{A} \circ \widetilde{B})_D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

D'où

$$(\mathrm{Var}^{-1} \Delta \circ \Delta) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

i.e.

$$\mathrm{Var}^{-1} \Delta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \nabla, \quad \mathrm{Var}\, \nabla = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \Delta,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2.5. Matrice des intersections de la singularité. Nous avons déjà dit que le groupe de monodromie de la singularité est engendré par les opérateurs de Picard-Lefschetz h_i qui correspondent aux éléments Δ_i d'une base faiblement distinguée dans le groupe d'homologie d'un ensemble de niveau non singulier de la singularité f au voisinage du point critique. D'après le théorème de Picard-Lefschetz, on a

$$h_i(a) = a + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a \circ \Delta_i) \Delta_i.$$

Ainsi donc, la matrice des intersections deux à deux des éléments de la base faiblement distinguée définit le groupe de monodromie de la singularité.

Définition. La matrice $S = (\Delta_i \circ \Delta_j)$ s'appelle *matrice des intersections* de la singularité f (dans la base $\{\Delta_i\}$).

Remarque. Ici i est le numéro de la colonne et j le numéro de la ligne. Une telle notation de la matrice d'une forme bilinéaire coïncide avec sa notation en tant que matrice d'un opérateur (i_* dans le cas considéré) agissant de l'espace d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ dans l'espace dual $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ relativement à la base $\{\Delta_i\}$ et à sa duale $((\Delta_i \circ \Delta_j) = (i_* \Delta_i \circ \Delta_j))$.

Définition. On appelle *forme bilinéaire associée à la singularité f* une forme bilinéaire entière définie par l'indice d'intersection sur le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ d'un ensemble de niveau non singulier de la singularité f.

La forme bilinéaire associée à la singularité est symétrique pour un nombre de variables n impair et alternée pour n pair. La matrice des intersections de la singularité est matrice de cette forme par rapport à la base $\{\Delta_i\}$. Les éléments diagonaux de la matrice des

intersections sont définis par le lemme 4 du n° 2.3; ils sont égaux à 0 pour n pair et à ± 2 pour n impair.

Si $\tilde{f}$ est une déformée de f et $\{\Delta_i\}$ une base distinguée de cycles évanescents définie par un système de chemins $u_1, \ldots, u_\mu$, alors le lacet τ' entourant dans le sens positif toutes les valeurs critiques engendrées par décomposition de la valeur critique nulle de f est homotope au produit $\tau_\mu \cdot \ldots \cdot \tau_1$ des lacets simples associés aux chemins $u_\mu, \ldots, u_1$ (fig. 18), d'où le

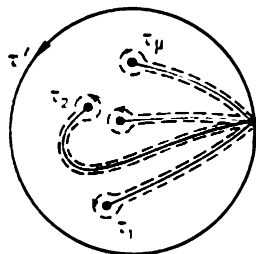


Fig. 18

Lemme 4. *L'opérateur h_* de monodromie classique de la singularité f est égal au produit $h_1 \cdot \ldots \cdot h_\mu$ des opérateurs de Picard-Lefschetz correspondant aux éléments Δ_i d'une base distinguée dans le groupe d'homologie d'une variété de niveau non singulière.*

L'action de l'opérateur de variation de la singularité f peut être définie par les formules

$$\mathrm{Var}_f = \mathrm{var}_{\tau_\mu \cdot \ldots \cdot \tau_1} =$$

$$= \sum_{r=1}^{\mu} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} \mathrm{var}_{\tau_{i_1}} \cdot i_* \cdot \mathrm{var}_{\tau_{i_2}} \cdot i_* \cdot \ldots \cdot i_* \cdot \mathrm{var}_{\tau_{i_r}},$$

$$\mathrm{var}_{\tau_i}(a) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a \circ \Delta_i)\, \Delta_i \quad (a \in H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)). \qquad (*)$$

Dans le groupe $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ dual de $H_{n-1}(V_\varepsilon)$, choisissons la base $\{\nabla_i\}$ duale de $\{\Delta_i\}$, i.e. une base telle que $(\nabla_i \circ \Delta_j) = \delta_{ij}$. Des formules $(*)$ il ressort que

$$\mathrm{Var}_f(\nabla_i) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \Delta_i + \sum_{j<i} c_i^j \Delta_j,$$

où les c_i^j sont des entiers. Nous avons ainsi démontré le

Lemme 5. *La matrice de l'opérateur de variation* Var_f *de la singularité f écrite dans une base distinguée est une matrice triangulaire supérieure aux éléments diagonaux* $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Il en est de même pour la matrice de l'opérateur Var_f^{-1} qui, d'après le théorème 3, coïncide avec la matrice de la forme de Seifert L de la singularité f (voir la remarque au début de ce n° concernant la notation matricielle des formes bilinéaires).

Soient S la matrice des intersections de la singularité f écrite dans une base quelconque, L la matrice de la forme de Seifert (ou de l'opérateur Var^{-1}) de cette singularité dans la même base, H la

matrice de l'opérateur de monodromie classique h_*, et $H^{(r)}$ la matrice de l'opérateur $h_*^{(r)}$ dans la base duale. D'après les théorèmes 4, 5 et 6 on a

$$S = -L + (-1)^n L^T, \quad H = (-1)^n L^{-1}L^T, \quad H^{(r)} = (-1)^n L^T L^{-1}$$

(l'indice ^{T} désigne la transposition). Si $\{\Delta_i\}$ est une base distinguée de cycles évanescents, la matrice L écrite dans cette base est une matrice triangulaire supérieure et L^T une matrice triangulaire inférieure. Ainsi donc, la décomposition de la matrice des intersections en une somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure dans une base distinguée est intrinsèque.

Nous avons dit plus haut que la matrice des intersections de la singularité dans une base distinguée définit (dans la même base) l'opérateur de monodromie classique de la singularité. La réciproque est aussi vraie. Avant de le prouver, nous donnerons une proposition générale utile :

Lemme 6. *Soient A, B deux matrices triangulaires supérieures à éléments diagonaux* 1, *et soit $C = A \cdot B^T$. Alors on peut reconstituer les matrices A et B à partir de la matrice C.*

Voici un énoncé équivalent :

Lemme 7. *Soient A, B deux matrices triangulaires supérieures à éléments diagonaux* 1. *Si AB^T est une matrice unité, alors A et B le sont aussi.*

La démonstration de ce dernier lemme n'offre aucune difficulté.

Théorème 7 ([201]). *La matrice de l'opérateur de monodromie classique d'une singularité, écrite dans une base distinguée, définit l'opérateur de variation de la singularité et sa matrice des intersections.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 6 à l'égalité

$$H = (-1)^n \tilde{L}^{-1}\tilde{L}^T, \quad \tilde{L} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} L,$$

dans laquelle $\tilde{L}$, $\tilde{L}^{-1}$ sont deux matrices triangulaires supérieures à éléments diagonaux 1.

2.6. Changements de base. Le système de chemins $\{u_i\}$ définissant une base distinguée ou faiblement distinguée peut être choisi de plus d'une façon. En variant le système de chemins initial, on obtient des bases différentes de cycles évanescents dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ d'un ensemble de niveau non singulier de la singularité au voisinage du point critique. Nous allons décrire quelques opérations élémentaires de changement de base préservant son caractère distingué ou faiblement distingué.

Soit $\{u_i\}$ un système de chemins choisi pour définir une base distinguée $\{\Delta_i\}$ dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(F_{z_0}) \cong H_{n-1}(V_\varepsilon)$ d'une variété de niveau non singulière. Cela revient à dire que les u_i sont des chemins sans points doubles qui joignent les valeurs critiques z_i de la déformée $\tilde{f}$ de f à sa valeur non critique z_0 et qui ne se coupent deux à deux qu'au point z_0. Soient τ_i les lacets simples associés aux chemins u_i.

Définition de l'opération α_m $(1 \leqslant m < \mu)$. Définissons un nouveau système de chemins $\{\tilde{u}_i\}$ comme suit: $\tilde{u}_i = u_i$ pour $i \neq m$, $m+1$; $\tilde{u}_{m+1} = u_m$; $\tilde{u}_m = u_{m+1}\tau_m$. Par $u_{m+1}\tau_m$ on sous-entend

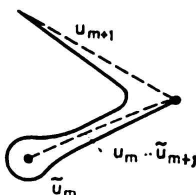


Fig. 19

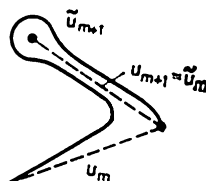


Fig. 20

le parcours successif de u_{m+1} et du lacet τ_m. Il est évident (voir ci-après) que le système de chemins $\{\tilde{u}_i\}$ définit une suite faiblement distinguée de cycles évanescents $\{\tilde{\Delta}_i\}$. On voit sans peine qu'il est possible de déformer légèrement le système de chemins $\{\tilde{u}_i\}$ de telle façon qu'il vérifie les conditions de la définition d'une base distinguée (fig. 19), aussi la base $\{\tilde{\Delta}_i\}$ est-elle distinguée. Le lien entre la base $\{\tilde{\Delta}_i\}$ et la base $\{\Delta_i\}$ est décrit par les formules suivantes:

$$\tilde{\Delta}_i = \Delta_i \text{ pour } i \neq m,\ m+1; \quad \tilde{\Delta}_{m+1} = \Delta_m;$$

$$\tilde{\Delta}_m = h_m(\Delta_{m+1}) = \Delta_{m+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (\Delta_{m+1} \circ \Delta_m)\,\Delta_m$$

(transformation de Picard-Lefschetz). L'opération de passage de la base distinguée $\{\Delta_i\}$ à la base distinguée $\{\tilde{\Delta}_i\}$ décrite par ces formules sera notée α_m.

Définition de l'opération β_{m+1} $(1 \leqslant m < \mu)$. Soit $\{\tilde{u}'_i\}$ un système de chemins tel que $\tilde{u}'_i = u_i$ pour $i \neq m$, $m+1$; $\tilde{u}'_m = u_{m+1}$; $\tilde{u}'_{m+1} = u_m\tau_{m+1}^{-1}$ (fig. 20). Ce système de chemins définit une base

distinguée $\{\widetilde{\Delta}'_i\}$ liée à la base $\{\Delta_i\}$ par les formules

$$\widetilde{\Delta}'_i = \Delta_i \text{ pour } i \neq m,\ m+1\,;\quad \widetilde{\Delta}'_m = \Delta_{m+1}\,;$$

$$\widetilde{\Delta}'_{m+1} = h^{-1}_{m+1}(\Delta_m) = \Delta_m + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\Delta_{m+1} \circ \Delta_m)\, \Delta_{m+1}$$

(transformation inverse de Picard-Lefschetz). L'opération de passage de la base distinguée $\{\Delta_i\}$ à la base distinguée $\{\widetilde{\Delta}'_i\}$ décrite par ces formules sera notée β_{m+1}.

On remarque facilement que l'opération β_{m+1} est inverse de α_m, en ce sens que par l'application successive de ces deux opérations

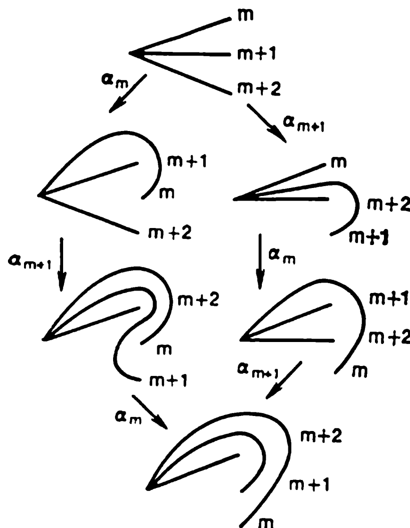


Fig. 21

en ordre arbitraire on retrouve la base initiale. Considérons le groupe libre engendré par les éléments α_m ($m = 1, \ldots, \mu - 1$). A chaque élément du groupe (mot composé des lettres α_m et α_m^{-1}) correspond une opération de changement de la base distinguée (on identifie l'action de α_m^{-1} sur la base à celle de β_{m+1}). Il est évident que les actions des opérations $\alpha_m\alpha_{m'}$ et $\alpha_{m'}\alpha_m$ sont les mêmes quand $|m - m'| \geqslant 2$. En outre, sont identiques les actions des opérations $\alpha_m\alpha_{m+1}\alpha_m$ et $\alpha_{m+1}\alpha_m\alpha_{m+1}$ pour m quelconque compris entre 1 et $\mu - 2$. La « démonstration » de ce résultat est donnée sur la figure 21.

On voit donc opérer, sur l'ensemble des bases distinguées du groupe d'homologie d'un ensemble de niveau non singulier au voisinage du point critique, le groupe quotient du groupe libre à ($\mu - 1$) générateurs α_m ($m = 1, \ldots, \mu - 1$) par les relateurs $\alpha_{m+1}\alpha_m\alpha_{m+1} =$

$= \alpha_m\alpha_{m+1}\alpha_m$ pour $1 \leqslant m < \mu - 1$, $\alpha_m\alpha_{m'} = \alpha_{m'}\alpha_m$ pour $|m - m'| \geqslant 2$. C'est un groupe de tresses à μ brins (voir par exemple [53]; voir aussi le n 3.3).

Considérons les opérations préservant le caractère faiblement distingué d'une suite de cycles évanescents. Montrons d'abord qu'une telle suite forme une base en homologie d'une variété de niveau non singulière.

Théorème 8. *Toute suite faiblement distinguée de cycles évanescents forme une base dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ d'une variété de niveau non singulière.*

Soient $\{\Delta_i\}$ une suite faiblement distinguée de cycles évanescents définie par un système de chemins $\{u_i\}$, et τ_i des lacets simples associés aux u_i. Le système de lacets $\{\tau_i\}$ est celui des générateurs libres du groupe fondamental $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$ du complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques. Pour montrer que la suite de cycles évanescents $\{\Delta_i\}$ forme une base dans le groupe $H_{n-1}(V_\varepsilon)$, il suffit de montrer que tout cycle évanescent Δ (défini à partir d'un chemin v joignant une valeur critique z_j à la valeur non critique z_0) se laisse exprimer de façon linéaire en fonction des cycles $\Delta_1, \ldots$ $\ldots, \Delta_\mu$ à coefficients entiers. On peut admettre que les chemins u_j et v se confondent au voisinage de la valeur critique z_j. Dans ce cas le lacet $\gamma = u_j^{-1}v$ peut être regardé comme un élément du groupe fondamental $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$ du complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques. On a alors $\Delta = \pm h_{\gamma *}\Delta_j$ (le signe dépend de l'orientation des cycles évanescents Δ et Δ_j). Dans le groupe $\pi_1(U - \{z_i\};$ $z_0)$ le lacet γ peut être décomposé suivant les générateurs $\tau_1, \ldots, \tau_\mu$. Par conséquent un cycle évanescent Δ s'obtient à partir d'un cycle Δ_j par application successive de quelques opérateurs de Picard-Lefschetz h_i et de leurs inverses et représente donc une combinaison linéaire des cycles $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ à coefficients entiers.

Définition des opérations $\alpha_m(m')$ et $\beta_m(m')$ de changement d'une base faiblement distinguée. Soit $\{u_i\}$ un système de chemins qui définit une base faiblement distinguée $\{\Delta_i\}$ dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ d'une variété de niveau non singulière. Pour $m \neq m'$, définissons l'opération de changement de base $\alpha_m(m')$ (resp. $\beta_m(m')$) qui revient à passer d'un chemin $u_{m'}$ au chemin $u_{m'}\tau_m$ (resp. $u_{m'}\tau_m^{-1}$), i.e. à remplacer la base faiblement distinguée $\{\Delta_i\}$ par une base $\{\tilde{\Delta}_i\}$ définie par les formules

$$\tilde{\Delta}_i = \Delta_i \text{ pour } i \neq m',$$

$$\tilde{\Delta}_{m'} = h_m(\Delta_{m'}) = \Delta_{m'} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\Delta_{m'} \circ \Delta_m)\,\Delta_m$$

$$(\tilde{\Delta}_{m'} = h_m^{-1}(\Delta_{m'}) = \Delta_{m'} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\Delta_m \circ \Delta_{m'})\,\Delta_m).$$

L'action des opérations $\alpha_m(m')$ et $\beta_m(m')$ sur le système de lacets simples $\{\tau_i\}$ consiste à remplacer le lacet $\tau_{m'}$ par son conjugué dans le groupe fondamental $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$ du complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques (soit par $\tau_m^{-1}\tau_{m'}\tau_m$ pour $\alpha_m(m')$ et par $\tau_m\tau_{m'}\tau_m^{-1}$ pour $\beta_m(m')$). Si donc le système initial de lacets simples était le système des générateurs libres du groupe $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$, il en est de même pour le système de lacets simples résultant des opérations $\alpha_m(m')$ ou $\beta_m(m')$. Il s'ensuit que les opérations $\alpha_m(m')$ et $\beta_m(m')$ préservent le caractère faiblement distingué d'une base.

On voit facilement que les opérations $\alpha_m(m')$ et $\beta_m(m')$ sont inverses entre elles. Elles coïncident quand le nombre n des variables est impair. Si l'on considère les bases distinguées comme faiblement distinguées et, en particulier, si l'on fait abstraction de l'ordre des cycles évanescents, l'action de l'opération α_m est identique à celle de $\alpha_m(m+1)$, et l'action de β_{m+1}, identique à celle de $\beta_{m+1}(m)$.

Il est montré que deux bases faiblement distinguées quelconques se déduisent l'une de l'autre par itération des opérations $\alpha_m(m')$ et $\beta_m(m')$ suivie d'une rénumérotation et d'un changement d'orientation de certains éléments de la base.

2.7. Opérateur de variation et matrice des intersections de la « somme directe » de singularités.

Définition. On appelle *somme directe* de singularités $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ et $g: (\mathbf{C}^m, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ de fonctions de n et de m variables respectivement, la singularité de la fonction $f \oplus g: (\mathbf{C}^{n+m}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ de $(n + m)$ variables définie par la formule

$$(f \oplus g)(x, y) = f(x) + g(y)$$
$$(x \in \mathbf{C}^n,\ y \in \mathbf{C}^m,\ (x, y) \in \mathbf{C}^{n+m} \approx \mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^m).$$

Lemme 8. *La multiplicité* $\mu(f \oplus g)$ *de la somme directe des singularités* f, g *est égale au produit* $\mu(f)\,\mu(g)$ *de leurs multiplicités respectives.*

En effet, si $\tilde{f}(x)$ est une déformée de f admettant $\mu(f)$ points critiques non dégénérés p_i et $\tilde{g}(y)$ une déformée de g admettant $\mu(g)$ points critiques non dégénérés q_j, alors $\tilde{f}(x) + \tilde{g}(y)$ est une déformée de $f \oplus g$ admettant $\mu(f)\,\mu(g)$ points critiques non dégénérés (p_i, q_j) $(i = 1, \ldots, \mu(f);\ j = 1, \ldots, \mu(g))$.

M. Sebastiani et R. Thom ([312]) ont montré que l'opérateur de monodromie classique de la singularité $f \oplus g$ est égal au produit tensoriel des opérateurs de monodromie classique des singularités f et g. A. Gabrielov ([114]) a obtenu la description de la matrice des intersections de la singularité $f \oplus g$ à partir des matrices connues des intersections de f et g écrites dans des bases distinguées. Nous

exposerons ces résultats sous une forme légèrement différente de [312] et de [114]. Introduisons une notion topologique:

Définition. On appelle *join* $X * Y$ de deux espaces topologiques X, Y l'espace quotient du produit direct $X \times I \times Y$ ($I = [0, 1]$) par la relation d'équivalence:

$$(x, 0, y_1) \sim (x, 0, y_2) \text{ pour tous } y_1, y_2 \in Y, \quad x \in X;$$
$$(x_1, 1, y) \sim (x_2, 1, y) \text{ pour tous } x_1, x_2 \in X, \quad y \in Y.$$

On peut considérer que les espaces X et Y sont plongés dans leur join $X * Y$ comme bases inférieure et supérieure respectivement ($\{(x, 0, y)\}$ et $\{(x, 1, y)\}$). Le join $X * Y$ lui-même peut être représenté comme l'espace balayé par les segments disjoints joignant tous les points de X à tous les points de Y. Considérons la projection $(x, t, y) \mapsto t$ de $X * Y$ dans le segment $I = [0, 1]$; l'image réciproque du point 0 se confond avec l'espace X, celle du point 1 avec l'espace Y, et celle d'un point $t \in]0, 1[$ avec le produit $X \times Y$.

Si l'espace Y est constitué par un point unique, le join $X * Y$ est un cône au-dessus de l'espace X. Si Y se compose de deux points, le join $X * Y$ est homéomorphe à une suspension de X (à l'espace quotient du cylindre $[-1, 1] \times X$ au-dessus de X par la relation d'équivalence $(-1, x_1) \sim (-1, x_2)$, $(1, x_1) \sim (1, x_2)$ pour tous $x_1, x_2 \in X$). Si X est homéomorphe à une sphère S^k de dimension k et Y à une sphère S^l de dimension l, leur join $X * Y$ est homéomorphe à une sphère S^{k+l+1} de dimension $(k + l + 1)$.

Lemme 9. *Soient les groupes d'homologie des espaces X, Y ou bien sans torsion, ou bien supposés à coefficients dans un corps commutatif. Alors le groupe d'homologie $H_n (X * Y)$ de leur join est isomorphe à $\bigoplus_{0 \leqslant k \leqslant n-1} H_k (X) \otimes H_{n-k-1} (Y)$.*

Autrement dit,

$$H_* (X * Y) = H_* (X) \otimes H_* (Y),$$

en supposant que $\dim (a \otimes b) = \dim a + \dim b + 1$ pour $a \in H_* (X)$, $b \in H_* (Y)$. Si α est un cycle dans X et β un cycle dans Y, le cycle correspondant à $\alpha \otimes \beta$ dans l'espace $X * Y$ est le join des cycles α, β. Il est important que les groupes d'homologie sont supposés réduits modulo un point.

En général, le plongement $H_k (X) \otimes H_{n-k-1} (Y) \hookrightarrow H_n (X * Y)$ n'est défini qu'à la multiplication par (± 1) près. On le définit en choisissant l'orientation du join de cycles. On peut considérer, par exemple, que l'orientation du join des cycles $a * b$ est induite par celle du produit direct $a \times I \times b$. Remarquons cependant que les résultats qui vont être exposés ne dépendent pas de ce choix.

Soient f une singularité $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, V_ε une variété de niveau non singulière de f au voisinage de son point critique

($V_\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho$), u un chemin reliant la valeur non critique ε à la valeur critique 0.

Lemme 10. *Il existe une famille continue d'applications H_t: $V_\varepsilon \to V_{u(t)} = f^{-1}(u(t)) \cap \bar{B}_\rho$ ($t \in [0, 1]$) telle que*

1) $H_0 = \mathrm{id}: V_\varepsilon \to V_\varepsilon$;
2) H_t *soit un plongement* $V_\varepsilon \to V_{u(t)}$ *pour* $0 \leqslant t < 1$;
3) H_1 *applique* V_ε *dans le point* $0 \in \mathbf{C}^n$.

Cette assertion peut être démontrée de la même façon que celle du théorème 1 où nous avons montré que l'espace $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ est un rétracte par déformation de l'espace $f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0}) \cap \bar{B}_\rho$.

La famille d'applications H_t est définie de façon unique à isotopie près. Elle définit le plongement d'un cône au-dessus de la variété de niveau non singulière V_ε dans l'espace $\mathbf{C}^n$ ($(x, t) \to H_t(x)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$).

Soient maintenant f, g deux singularités de n et m variables respectivement, $V_\varepsilon(f) = f^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_{\rho_1}$ et $V_\varepsilon(g) = g^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_{\rho_2}$ des variétés de niveau non singulières de f et g, u un chemin sans points doubles dans le plan des valeurs de f joignant ε à 0 (on peut admettre sans diminuer la généralité que $u(t) = (1 - t)\varepsilon$). Soit v un chemin joignant ε à 0 dans le plan des valeurs de g, tel que $v(t) = \varepsilon - u(1 - t)$. Soient $H_t(f)$, $H_t(g)$ deux familles d'applications $V_\varepsilon(f) \to V_{u(t)}(f)$, $V_\varepsilon(g) \to V_{v(t)}(g)$ du lemme 10. Soit j un plongement du join $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)$ des variétés de niveau non singulières $V_\varepsilon(f)$, $V_\varepsilon(g)$ dans l'ensemble de niveau $(f \oplus g)^{-1}(\varepsilon) \subset \mathbf{C}^{n+m}$, tel que

$$j(x, t, y) = (H_t(f)\, x,\ H_{1-t}(g)\, y)$$

pour $x \in V_\varepsilon(f)$, $y \in V_\varepsilon(g)$, $t \in [0, 1]$. Sous des restrictions naturelles imposées aux rayons ρ_1, ρ_2 et ρ (par exemple, $\rho_1 \leqslant \rho/\sqrt{2}$, $\rho_2 \leqslant \rho/\sqrt{2}$), j est un plongement du join $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)$ dans la variété de niveau $V_\varepsilon(f \oplus g) = (f \oplus g)^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho$ de la singularité $f \oplus g$ au voisinage de son point critique.

L'application

$$j: V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g) \to V_\varepsilon(f \oplus g)$$

et l'isomorphisme

$$H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)) \cong H_{n-1}(V_\varepsilon(f)) \otimes H_{m-1}(V_\varepsilon(g))$$

définissent ensemble l'homéomorphisme

$$j_*: H_{n-1}(V_\varepsilon(f)) \otimes H_{m-1}(V_\varepsilon(g)) \to H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g)).$$

On démontre dans [312] le

Théorème 9. *L'homéomorphisme j_* est un isomorphisme, le plongement $j: V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g) \to V_\varepsilon(f \oplus g)$ est une équivalence d'homotopie.*

Le fait qu'une variété de niveau non singulière $V_\varepsilon(f \oplus g)$ de la singularité $f \oplus g$ soit homotopiquement équivalente au join $V_\varepsilon(f) * * V_\varepsilon(g)$ peut être expliqué de la façon suivante. Considérons sur la variété $V_\varepsilon(f \oplus g)$ la fonction f, ou, plus exactement, la fonction $f \circ \pi_1$, où $\pi_1 : V_\varepsilon(f \oplus g) \hookrightarrow \mathbf{C}^{n+m} \approx \mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ est la projection sur le premier terme. L'image réciproque $(f \circ \pi_1)^{-1}(z)$ d'un point $z \in \mathbf{C}$ se compose de points $(x, y) \in \mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^m$ tels que $f(x) = z$, $g(y) = \varepsilon - z$. Donc (abstraction faite des conditions particulières imposées aux rayons des boules dans lesquelles les variétés de niveau non singulières des fonctions sont étudiées), on a

$$(f \circ \pi_1)^{-1}(z) = f^{-1}(z) \times g^{-1}(\varepsilon - z).$$

L'application $(f \circ \pi_1): V_\varepsilon(f \oplus g) \to \mathbf{C}$ est non dégénérée en dehors des images réciproques des points 0 et ε. Considérons dans le plan $\mathbf{C}$ un segment $J = u([0, 1])$ qui est image du chemin u. Il joint les points 0 et ε ($u(0) = \varepsilon$, $u(1) = 0$). L'application $f \circ \pi_1$ définit une fibration localement triviale au-dessus du complémentaire de J. Le segment J est un rétracte par déformation du plan $\mathbf{C}$. Il s'ensuit que l'espace $(f \circ \pi_1)^{-1}(J)$ est un rétracte par déformation de l'espace $V_\varepsilon(f \oplus g)$ et, par conséquent, est homotopiquement équivalent à ce dernier. L'espace $(f \circ \pi_1)^{-1}(u(t))$ est alors difféomorphe, pour $t \in]0, 1[$, au produit $V_{\varepsilon_1}(f) \times V_{\varepsilon_2}(g)$ des variétés de niveau non singulières des singularités f, g. L'espace $(f \circ \pi_1)^{-1}(u(0))$ est difféomorphe à $f^{-1}(\varepsilon) \times g^{-1}(0)$. L'espace $g^{-1}(0)$ se réduit par déformation à un point, aussi $(f \circ \pi_1)^{-1}(u(0))$ se réduit-il à un espace difféomorphe à une variété de niveau non singulière $V_\varepsilon(f)$. D'une façon parfaitement analogue, l'espace $(f \circ \pi_1)^{-1}(u(1)) = f^{-1}(0) \times g^{-1}(\varepsilon)$ se réduit par contraction à un espace difféomorphe à une variété de niveau non singulière $V_\varepsilon(g)$. Une telle description des fibres de l'application $(f \circ \pi_1): (f \circ \pi_1)^{-1}(J) \to J$ au-dessus des points du segment J coïncide avec la description des images réciproques des points $t \in I = [0, 1]$ par la projection $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g) \to I$ (voir la définition d'un join). Pour cette raison l'espace $(f \circ \pi_1)^{-1}(J)$ est homotopiquement équivalent au join $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)$. Par un raisonnement un peu plus rigoureux, cette explication devient une démonstration en forme.

Dans le texte qui suit, le groupe d'homologie $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g))$ d'une variété de niveau non singulière de la singularité $f \oplus g$ sera identifié au produit tensoriel des groupes $H_{n-1}(V_\varepsilon(f))$ et $H_{m-1}(V_\varepsilon(g))$. Cette identification définit à son tour l'identification du groupe d'homologie relatif $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g), \partial V_\varepsilon(f \oplus g))$ (qui est le dual de $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g))$) au produit tensoriel des groupes $H_{n-1}(V_\varepsilon(f), \partial V_\varepsilon(f))$ et $H_{m-1}(V_\varepsilon(g), \partial V_\varepsilon(g))$.

Théorème 10 (P. Deligne, voir [92]).

$$\mathrm{Var}_{f \oplus g} = (-1)^{nm} \mathrm{Var}_f \otimes \mathrm{Var}_g.$$

Pour la démonstration, il suffit de montrer que pour des classes d'homologie quelconques $a_1, a_2 \in H_{n-1}(V_\varepsilon(f))$, $b_1, b_2 \in H_{m-1}(V_\varepsilon(g))$ on a l'égalité

$$([\mathrm{Var}_{f\oplus g}^{-1}(a_1 \otimes b_1)] \circ [a_2 \otimes b_2]) = (-1)^{nm}(\mathrm{Var}_f^{-1} a_1 \circ a_2)\cdot(\mathrm{Var}_g^{-1} b_1 \circ b_2).$$

Nous allons esquisser la démonstration en grandes lignes (il n'y a d'ailleurs aucun problème à la reconstituer dans le détail).

Soit $H_t(f)$ une famille d'applications $V_\varepsilon(f) \to V_{(1-t)\varepsilon}(f) = f^{-1}((1-t)\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho$ décrite dans le lemme 10 (nous posons $u(t) = (1-t)\varepsilon$ pour fixer les idées). Comme nous l'avons déjà dit, la famille $H_t(f)$ définit le plongement d'un cône au-dessus de la variété de niveau $V_\varepsilon(f)$ dans l'espace $\mathbf{C}^n$. Soit A_1 le cône au-dessus du cycle a_1 défini par $H_t(f)$. A_1 est une chaîne de dimension n dont la frontière est située dans la variété de niveau non singulière $V_\varepsilon(f)$ et se confond avec le cycle a_1. Soit $\Gamma_t(f): V_\varepsilon(f) \to V_{\exp(2\pi it)\varepsilon}(f)$ une famille d'applications obtenue par relèvement de l'homotopie $\varepsilon \mapsto \exp(2\pi it)\varepsilon$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, et soit $\tilde{a}_2 = \Gamma_{1/2}(f)(a_2)$ un cycle de dimension $(n-1)$ dans la variété de niveau $V_{-\varepsilon}(f)$. Soit $\tilde{A}_2$ un cône au-dessus de $\tilde{a}_2$ analogue à A_1. Du raisonnement développé au n° 2.3 il ressort que $(\mathrm{Var}_f^{-1} a_1 \circ a_2) = (-1)^n(A_1 \circ \tilde{A}_2)$, les chaînes A_1 et $\tilde{A}_2$ ne se rencontrant qu'en 0. On définit de la même façon les chaînes B_1 et $\tilde{B}_2$, auquel cas $(\mathrm{Var}_g^{-1} b_1 \circ b_2) = (-1)^m(B_1 \circ \tilde{B}_2)$.

Pour pouvoir définir de la même façon $([\mathrm{Var}_{f\oplus g}^{-1}(a_1 \otimes b_1)] \circ [a_2 \otimes b_2])$, on doit construire des cônes C_1 et $\tilde{C}_2$ au-dessus des cycles $a_1 \otimes b_1$ et $\widetilde{a_2 \otimes b_2} = \Gamma_{1/2}(f \oplus g)(a_2 \otimes b_2)$. On voit sans peine qu'il est possible de prendre $(A_1 \times B_1) \cap \{(x, y): (f(x) + g(y))/\varepsilon \leqslant 1\}$ comme C_1. De même pour $\tilde{C}_2$, i.e. on peut retenir $(\tilde{A}_2 \times \tilde{B}_2) \cap \{(x, y): (f(x) + g(y))/(-\varepsilon) \leqslant 1\}$ comme $\tilde{C}_2$. (On se sert du fait que $\Gamma_t(f \oplus g)(a_2 \otimes b_2) = \Gamma_t(f)(a_2) \otimes \Gamma_t(g)(b_2)$.) D'où

$$([\mathrm{Var}_{f\oplus g}^{-1}(a_1 \otimes b_1)] \circ [a_2 \otimes b_2]) = (-1)^{n+m}(C_1 \circ \tilde{C}_2) =$$
$$= (-1)^{n+m}([A_1 \times B_1] \circ [\tilde{A}_2 \times \tilde{B}_2]) = (-1)^{n+m+nm}(A_1 \circ \tilde{A}_2)(B_1 \circ \tilde{B}_2) =$$
$$= (-1)^{nm}(\mathrm{Var}_f^{-1} a_1 \circ a_2) \times (\mathrm{Var}_g^{-1} b_1 \circ b_2)$$

comme demandé.

Soient $\{\Delta_i\}$ $(i = 1, \ldots, \mu(f))$ une base distinguée dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon(f))$ d'une variété de niveau non singulière de la singularité f, et $\{\Delta'_j\}$ $(j = 1, \ldots, \mu(g))$ une base distinguée dans le groupe $H_{m-1}(V_\varepsilon(g))$. Du théorème 9 il découle que les éléments $\tilde{\Delta}_{ij} = j_*(\Delta_i \otimes \Delta'_j)$ forment une base dans le groupe d'homologie $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g))$ d'une variété de niveau non singulière de la singularité $f \oplus g$. La matrice des intersections S de la sin-

gularité $f \oplus g$ par rapport à cette base peut être déduite au moyen du théorème 10 de la formule

$$S = -L + (-1)^{n+m}L^T$$

où L est la matrice de l'opérateur $\mathrm{Var}_{f\oplus g}$ (ou de la forme de Seifert). On a le

Théorème 11. *Les indices des intersections des cycles $\tilde{\Delta}_{ij}$ sont définis par les formules suivantes*:

$$(\tilde{\Delta}_{ij_1} \circ \tilde{\Delta}_{ij_2}) = \operatorname{sgn}(j_2 - j_1)^n (-1)^{nm + \frac{n(n-1)}{2}} (\Delta'_{j_1} \circ \Delta'_{j_2})$$

pour $j_1 \neq j_2$,

$$(\tilde{\Delta}_{i_1 j} \circ \tilde{\Delta}_{i_2 j}) = \operatorname{sgn}(i_2 - i_1)^m (-1)^{nm + \frac{m(m-1)}{2}} (\Delta_{i_1} \circ \Delta_{i_2})$$

pour $i_1 \neq i_2$,

$$(\tilde{\Delta}_{i_1 j_1} \circ \tilde{\Delta}_{i_2 j_2}) = 0 \quad pour \quad (i_2 - i_1)(j_2 - j_1) < 0,$$

$$(\tilde{\Delta}_{i_1 j_1} \circ \tilde{\Delta}_{i_2 j_2}) = \operatorname{sgn}(i_2 - i_1)(-1)^{nm} (\Delta_{i_1} \circ \Delta_{i_2})(\Delta'_{j_1} \circ \Delta'_{j_2})$$

pour $(i_2 - i_1)(j_2 - j_1) > 0$.

Ce résultat est dû à A. Gabrielov [114]. On trouve également dans [114] l'assertion suivante:

Théorème 12. *Les cycles $\tilde{\Delta}_{ij}$ sont évanescents et forment une base distinguée dans le groupe d'homologie $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g))$ d'une variété de niveau non singulière de la singularité $f \oplus g$. Les cycles en question sont supposés rangés dans l'ordre lexicographique*: *on entend par là que le cycle $\tilde{\Delta}_{i_1 j_1}$ précède le cycle $\tilde{\Delta}_{i_2 j_2}$ si $i_1 < i_2$ ou $i_1 = i_2$, $j_1 < j_2$.*

Le théorème 10 est une généralisation du résultat de M. Sebastiani et R. Thom ([312]) déjà mentionné, qui décrit l'opérateur de monodromie classique $h_{*(f\oplus g)}$ de la singularité $f \oplus g$.

Théorème 13. $h_{*(f\oplus g)} = h_{*f} \otimes h_{*g}$.

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 10 et de la relation

$$h_* = (-1)^n \operatorname{Var}(\operatorname{Var}^{-1})^T$$

(voir théorème 5 du nº 2.3). Réciproquement, le théorème 10 découle des théorèmes 13, 12, de la relation

$$h_* = (-1)^n \operatorname{Var}(\operatorname{Var}^{-1})^T$$

et du théorème 7 du nº 2.5 selon lequel la matrice de l'opérateur de monodromie classique de la singularité écrite dans une base distinguée définit la matrice de l'opérateur de variation de la singularité.

Des théorèmes 11 et 12 ressort la description suivante du diagramme de Dynkine (défini au nº suivant) de la singularité $f \oplus g$:

l'ensemble de ses sommets coïncide avec le produit direct des ensembles des sommets des diagrammes de f et de g;

deux sommets (i_1, j_1), (i_2, j_2) sont reliés entre eux

— par une arête de même multiplicité que les sommets j_1, j_2 du deuxième diagramme si $i_1 = i_2$;

— par une arête de même multiplicité que les sommets i_1, i_2 du premier diagramme si $j_1 = j_2$;

— par une arête de multiplicité égale à l'opposé du produit des multiplicités des arêtes reliant les sommets i_1, i_2 du premier diagramme et les sommets j_1, j_2 du deuxième diagramme si $(i_2 - i_1) \times \times (j_2 - j_1) > 0$;

si $(i_2 - i_1)(j_2 - j_1) < 0$, les sommets (i_1, j_1) et (i_2, j_2) ne sont pas reliés entre eux.

2.8. Stabilisation des singularités. Soit $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe qui admet un point critique isolé en 0.

Définition. Le germe de fonction $f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j^2$ $((\mathbf{C}^{n+m}, 0) \to (\mathbf{C}, 0))$ est appelé la *stabilisée* de f.

La multiplicité de la singularité coïncide avec celle de sa stabilisée. En effet, si $\tilde{f}$ est une déformée de f telle que le point critique nul de f se décompose en μ points non dégénérés, alors $\tilde{f}(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j^2$ est une déformée de la stabilisée de f possédant la même propriété. Les fonctions $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{f}(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j^2$ ainsi définies ont les mêmes ensembles de valeurs critiques. Le lien existant entre les matrices des intersections de la singularité et de sa stabilisée fait l'objet du théorème suivant qui est un cas particulier des théorèmes 11 et 12:

Théorème 14. *Soit $\{\Delta_i\}$ une base distinguée de cycles évanescents en homologie d'une variété de niveau non singulière de la singularité $f(x)$. Il existe une base distinguée $\{\tilde{\Delta}_i\}$ de la singularité $f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j^2$ telle que la matrice des intersections de ses éléments soit définie par la relation*

$$(\tilde{\Delta}_i \circ \tilde{\Delta}_j) = [\operatorname{sgn}(j-i)]^m (-1)^{nm + \frac{m(m-1)}{2}} (\Delta_i \circ \Delta_j) \quad \text{pour } i \neq j.$$

Ici les bases distinguées $\{\Delta_i\}$, $\{\tilde{\Delta}_i\}$ correspondent à des systèmes identiques de chemins joignant les valeurs critiques des déformées $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{f}(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j^2$ à la valeur non critique.

Du théorème 14 il ressort que les matrices des intersections des stabilisées de la singularité se définissent mutuellement. En outre, si $m \equiv 0 \bmod 4$, les indices des intersections $(\tilde{\Delta}_i \circ \tilde{\Delta}_j)$ et $(\Delta_i \circ \Delta_j)$ pour i, j quelconques se confondent, et si $m \equiv 2 \bmod 4$, ils ne diffèrent que par le signe. Ainsi donc, à toute singularité sont associées deux formes bilinéaires symétriques et deux formes bilinéaires alternées (formes des intersections des stabilisées de la singularité). Il est à noter que les formes symétriques (resp. alternées) ne diffèrent que par le signe. A toute singularité sont associés aussi deux groupes de transformations du réseau d'entiers Z^μ (groupes de monodromie des stabilisées de la singularité). L'opérateur de monodromie classique de la singularité $f(x)$ se confond avec l'opérateur de monodromie classique de sa stabilisée $f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j^2$ pour m pair ou n'en diffère que par le signe pour m impair.

Grâce au théorème 14, on peut, en formulant les résultats sur la matrice des intersections des singularités, se borner aux dimensions qui ont un résidu fixe modulo 4. Dans la plupart des cas il y a intérêt à supposer que le nombre de variables est congru à 3 mod 4.

Définition. On appelle *forme quadratique d'une singularité* la forme quadratique, définie par l'indice d'intersection en homologie d'une variété de niveau non singulière, de sa stabilisée avec un nombre de variables $N \equiv 3 \bmod 4$.

Pour cette stabilisée les indices de self-intersection des cycles évanescents $(\Delta_i \circ \Delta_i)$ sont égaux à (-2) et les opérateurs de Picard-Lefschetz opèrent dans le groupe d'homologie d'une variété de niveau non singulière d'après la formule $h_i(a) = a + (a \circ \Delta_i)\Delta_i$. On voit donc que $h_i(\Delta_i) = -\Delta_i$ et que la transformation h_i est la réflexion dans l'hyperplan orthogonal au vecteur Δ_i. (L'orthogonalité s'entend au sens du produit scalaire défini par la forme quadratique de la singularité.) Ainsi donc, le groupe de monodromie correspondant est un groupe engendré par des réflexions. Il est commode de décrire de tels groupes (ou les formes quadratiques correspondantes qui définissent ces groupes) au moyen d'un graphe.

Définition. On appelle *diagramme de Dynkine* (ou *D-diagramme*) d'une singularité un graphe défini comme suit:

1) les sommets du graphe sont en correspondance biunivoque avec les éléments Δ_i d'une base faiblement distinguée en homologie d'une variété de niveau non singulière de la stabilisée de la singularité avec un nombre de variables $N \equiv 3 \bmod 4$;

2) l'i-ième et le j-ième sommets du graphe sont reliés par une arête de multiplicité $(\Delta_i \circ \Delta_j)$ (les arêtes de multiplicité négative sont tracées en pointillé).

Le diagramme de Dynkine d'une singularité définit son groupe de monodromie (bien qu'une description efficace de ce groupe est assez difficile en général). Si l'on connaît le diagramme de Dynkine de la singularité (avec le nombre de variables connu) défini dans une base distinguée et si ses sommets sont convenablement numérotés, on peut reconstituer d'après le D-diagramme la forme bilinéaire de la singularité, son opérateur de variation, son opérateur de monodromie classique, etc.

2.9. Un exemple. Considérons la singularité $f(x) = x^{k+1}$ (singularité du type A_k d'après la classification de la Première partie, ch. II). Sa variété de niveau V_ε se compose de $(k+1)$ points qui sont racines $(k+1)$-ièmes de ε. La multiplicité de cette singularité est égale à k, et son groupe d'homologie $H_0(V_\varepsilon)$ (réduit modulo un point) est isomorphe à Z^k.

La fonction $\tilde{f}(x) = x^{k+1} - \lambda x$ $(\lambda \neq 0)$ est une déformée de Morse de f. Soit λ réel et supérieur à 0. La variété de niveau nul $\tilde{f}^{-1}(0)$ de la fonction $\tilde{f}$ est constituée elle aussi de $(k+1)$ points: $x_0 = 0$, $x_m = \sqrt[k]{\lambda}\xi_m$ $(m = 1, \ldots, k)$. Ici ξ_m sont racines k-ièmes de l'unité numérotées dans le sens horaire: $\xi_m = \exp(-2\pi im/k)$. Les points critiques de $\tilde{f}$ sont définis par l'équation $\tilde{f}'(x) = (k+1)x^k - \lambda = 0$. Aussi $\tilde{f}$ admet-elle k points critiques $p_m = \sqrt[k]{\lambda/(k+1)}\,\xi_m$ à valeurs critiques $z_m = -\frac{k}{k+1}\sqrt[k]{\lambda/(k+1)}\,\xi_m$ $(m = 1, \ldots, k)$.

Prenons pour valeur non critique z_0 un grand nombre négatif $\left(|z_0| \gg \frac{k}{k+1}\sqrt[k]{\lambda/(k+1)}\right)$. Soit u_m un chemin qui joint la valeur critique z_m de $\tilde{f}$ au point 0 suivant le rayon $(u_m(t) = (1-t)z_m,\ t \in [0, 1])$; soit v un chemin allant de 0 vers z_0 suivant le demi-axe réel négatif et évitant la valeur critique $z_k = -\frac{k}{k+1}\sqrt[k]{\lambda/(k+1)}$ dans le sens positif (antihoraire) (fig. 22).

On voit sans peine que le système des chemins $\{u_m \cdot v\}$ définit une base distinguée de cycles évanescents $\{\Delta_m\}$ dans le groupe

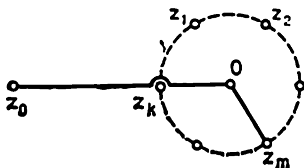


Fig. 22

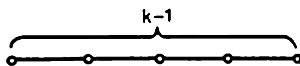


Fig. 23

d'homologie $H_0(\tilde{f}^{-1}(z_0))$ (en effet, en déformant légèrement ce système, on finit par obtenir un système de chemins qui vérifie la définition d'une base distinguée). Pour calculer les indices des intersections $(\Delta_m \circ \Delta_{m'})$ des cycles évanescents dans le groupe d'homologie $H_0(\tilde{f}^{-1}(z_0))$, il est commode d'homotoper z_0 le long de v jusqu'en 0. Le problème s'en trouve réduit au calcul des indices des intersections des cycles évanescents définis dans $H_0(\tilde{f}^{-1}(0))$ par le système de chemins $\{u_m\}$ (ces cycles seront notés aussi par Δ_m).

On montre aisément que le long du chemin u_m le cycle évanescent est $\Delta_m = x_m - x_0$ (i.e. les points x_m et x_0 se confondent quand on parcourt dans le plan des valeurs de $\tilde{f}$ le chemin u_m allant de 0 à la valeur critique z_m). On a donc $(\Delta_m \circ \Delta_m) = 2$ et $(\Delta_m \circ \Delta_{m'}) = 1$ pour tous m, m' tels que $m \neq m'$. Pour la stabilisée $f(x) + y_1^2 + y_2^2$ les formules correspondantes sont $(\Delta_m \circ \Delta_m) = -2$, $(\Delta_m \circ \Delta_{m'}) = -1$ pour tous m, m' tels que $m \neq m'$. Le diagramme de Dynkine de f présentera donc k sommets reliés deux à deux par un segment en trait pointillé (i.e. par une arête de multiplicité (-1)).

Simplifions ce diagramme à l'aide des opérations de changement de la base distinguée. L'opération $\alpha_{k-1}(\Delta'_{k-1} = \Delta_k - \Delta_{k-1}, \Delta'_k = \Delta_{k-1})$ conduit à un diagramme où tous les sommets, sauf le $(k-1)$-ième, sont reliés deux à deux par des segments en trait pointillé (arêtes de multiplicité (-1)) et le $(k-1)$-ième sommet n'est relié qu'au k-ième par un segment de multiplicité $(+1)$. Les opérations $\alpha_{k-2}(\Delta''_{k-2} = \Delta'_{k-1}, \Delta''_{k-1} = \Delta'_{k-2}), \alpha_{k-3}, \ldots, \alpha_1$ ne modifient pas le diagramme mais se réduisent à une rénumérotation des sommets. L'application successive des opérations $\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \ldots, \alpha_2, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_3, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}$ conduit au diagramme de Dynkine classique de A_k (fig. 23). La base des cycles évanescents obtenue de la sorte se définit par les formules $\Delta_1^0 = (x_k - x_{k-1})$, $\Delta_2^0 = (x_{k-1} - x_{k-2}), \ldots, \Delta_{k-1}^0 = (x_2 - x_1)$, $\Delta_k^0 = (x_1 - x_0)$.

En allant dans le plan des valeurs de $\tilde{f}$ le long de v de 0 à la valeur non critique z_0, les points x_m $(m = 0, 1, \ldots, k)$ évoluent dans le plan complexe $\mathbf{C}$ en tendant vers les demi-droites $\arg x = \frac{\pi(2s+1)}{(k+1)}$ (pour $z_0 \to -\infty$). Les points x_0 et x_k se rapprochent alors suivant l'axe réel, font un quart de tour chacun dans le sens antihoraire autour du point critique p_k et s'éloignent de nouveau. On montre aisément que sur les demi-droites $\arg x = \frac{\pi(2s+1)}{(k+1)}$ (i.e. $x = t \cdot \exp\left(\frac{\pi i(2s+1)}{k+1}\right)$, $t > 0$) la fonction $\tilde{f}(x) = x^{k+1} - \lambda x$ ne prend en aucun point une valeur réelle négative, sauf pour k pair et $s = k/2$. En effet, $\tilde{f}(x) = -t^{k+1} - \lambda t \exp\left(\frac{\pi i(2s+1)}{k+1}\right)$, où le deuxième terme n'est réel que pour k pair et $s = k/2$. Dans ce cas

c'est le point $x_{k/2}$ qui se déplace le long de la demi-droite $x = -t$ $(t > 0)$. Il s'ensuit qu'en se mouvant dans le plan des valeurs de $\tilde{f}$ suivant v de 0 à z_0, les points x_m tendent vers les points $\tilde{x}_m = \sqrt[k+1]{-z_0} \exp\left(\frac{-\pi i (2m+1)}{k+1}\right)$ $(m = 0, 1, \ldots, k)$. Si l'on se déplace en outre, dans le plan des valeurs de $\tilde{f}$, en sens négatif (horaire) de z_0 vers $z_0' = -z_0$, on voit les points $\tilde{x}_m$ se superposer aux points

$$\tilde{\tilde{x}}_m = \sqrt[k+1]{-z_0} \exp\left(\frac{-2\pi i (m+1)}{k+1}\right) \quad (m = 0, 1, \ldots, k).$$

Nous sommes amenés au résultat suivant:

Théorème 15. *Sur la variété de niveau $V_1 = \{x: x^{k+1} = 1\}$ de la singularité $f(x) = x^{k+1}$ une base distinguée est formée par des cycles évanescents $\Delta_1 = \zeta_1 - \zeta_2$, $\Delta_2 = \zeta_2 - \zeta_3$, ..., $\Delta_k = \zeta_k - \zeta_{k+1}$, où $\zeta_j = \exp\left(\frac{2\pi i (j-1)}{k+1}\right)$ sont racines $(k+1)$-ièmes de l'unité $(j = 1, \ldots, (k+1))$. Les indices des intersections de ces cycles sont définis par les formules $(\Delta_j \circ \Delta_j) = 2$, $(\Delta_j \circ \Delta_{j+1}) = -1$, $(\Delta_j \circ \Delta_{j'}) = 0$ pour $|j - j'| \geqslant 2$.*

Pour la première fois, les calculs de la forme d'intersection et de l'opérateur de monodromie classique ont été effectués par F. Pham [273] pour une singularité de la forme $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^{a_k}$ $(a_k \geqslant 2)$.

La multiplicité de cette singularité est égale à $\prod_{k=1}^{n} (a_k - 1)$. F. Pham a montré que dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ d'un ensemble de niveau non singulier de la fonction f on a une base $e_{i_1 \ldots i_n}$ $(0 \leqslant i_k \leqslant a_k - 2)$ $\left(\text{en notations de Pham } e_{i_1 \ldots i_n} = \left(\prod_{k=1}^{n} \omega_k^{i_k}\right) e\right)$ telle que

$$(e_{i_1 \ldots i_n} \circ e_{i_1 \ldots i_n}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (1 + (-1)^{n-1});$$

$$(e_{i_1 \ldots i_n} \circ e_{j_1 \ldots j_n}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\sum_k (j_k - i_k)},$$

si $i_k \leqslant j_k \leqslant i_k + 1$ pour k quelconque. Dans tous les autres cas (à l'exception de celui qui résulte du précédent moyennant une permutation des cycles) on a $(e_{i_1 \ldots i_n} \circ e_{j_1 \ldots j_n}) = 0$.

Le résultat de Pham peut être déduit du théorème 11 (nº 2.7). En l'appliquant à la singularité $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^{a_k}$, on obtient la

même matrice des intersections que dans [273], à condition de prendre pour base distinguée de la singularité $f_k(x_k) = x_k^{a_k}$ la base décrite dans le théorème 15. Pour la singularité $f_k(x_k) = x_k^{a_k}$, posons $\varepsilon = 1$, $u(t) = (1-t)$, $H(t)x_k = \sqrt[a_k]{(1-t)}\,x_k$. En appliquant successivement la construction décrite dans le n° 2.7 aux bases dinstinguées des singularités $f_k(x_k)$ définies par le théorème 15, on retrouve bien vite la base décrite par F. Pham dans [273]. On a donc l'

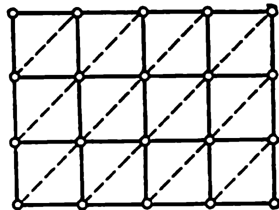


Fig. 24

Assertion. *La base de Pham est distinguée par rapport à la relation d'ordre lexicographique de ses éléments.*

Cela signifie que le diagramme de Dynkine de la singularité de Pham est celui de la figure 24 ($n = 2$, $a_1 = 6$, $a_2 = 5$).

§ 3. Diagrammes de bifurcation et groupe de monodromie d'une singularité

Les caractéristiques d'une singularité qui ont été étudiées au § 2 (multiplicité, matrice des intersections, groupe de monodromie . . .) sont liées à des objets tels que diagrammes de bifurcation des zéros et des fonctions de la singularité, sa désingularisation, ses courbes polaires. Quelques-uns de ces liens seront exposés dans ce paragraphe.

3.1. Diagrammes de bifurcation de la singularité. Pour définir les diagrammes de bifurcation d'une singularité, rappelons la définition de son déploiement versel (Première partie, § 8).

Définition. On appelle *déploiement* d'une singularité $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe $F(x, \nu)$ ($\nu \in \mathbf{C}^l$, $F: (\mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^l, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$) tel que $F(x, 0) = f(x)$.

L'espace $\mathbf{C}^l$ est appelé *espace des paramètres* ou *base* du déploiement F.

Définition. Le déploiement $F(x, \nu)$ d'une singularité f est dit *versel* si tout déploiement $G(x, \eta)$ ($\eta \in \mathbf{C}^m$) de f ($G(x, 0) = f(x)$) est équivalent à un déploiement induit de F, i.e. s'il existe une application analytique $\psi: (\mathbf{C}^m, 0) \to (\mathbf{C}^l, 0)$ de l'espace des paramètres et une famille analytique $g(x, \nu)$ ($g: (\mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^m, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$, $g(\cdot, 0) = \mathrm{id}: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$) de changements locaux de coordonnées telles que $G(x, \nu) = F(g(x, \nu), \psi(\nu))$.

La dimension l de la base $\mathbf{C}^l$ du déploiement versel $F(x, \nu)$ est non inférieure à la multiplicité μ de la singularité f. La singularité

f admet un déploiement versel (et un seul, au sens naturel) dont la base a la dimension exactement égale à μ. Ce déploiement est appelé *miniversel.*

On peut construire le déploiement miniversel $F(x, \nu)$ de la singularité f comme suit. On a dit au nº 2.1 que l'anneau quotient ${}_n\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ par l'idéal engendré par les dérivées partielles de la fonction f (idéal jacobien), considéré comme espace vectoriel complexe, est de dimension égale à la multiplicité μ de la singularité f. Supposons que les germes de fonctions $\varphi_i : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ $(i = 0, 1, \ldots, \mu - 1)$ engendrent une base de cet espace. Alors le déploiement $F(x, \nu) = f(x) + \sum_{i=0}^{\mu-1} \nu_i \varphi_i(x)$ est miniversel $(\nu = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{\mu-1}))$. On peut prendre comme φ_0 un germe d'une fonction identiquement égale à 1.

Soit $F(x, \nu)$ le déploiement miniversel de la singularité f $(\nu \in \mathbf{C}^\mu)$, et soit $W_\nu = \{x \in \mathbf{C}^n : \ F(x, \nu) = 0, \ \|x\| \leqslant \rho\}$ l'ensemble de niveau nul d'une fonction $F(\cdot, \nu)$. Puisque $F(x, 0) = f(x)$ et l'ensemble $\{x \in \mathbf{C}^n : f(x) = 0\}$ est transversal à une sphère S_ρ de rayon ρ suffisamment petit, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour $\|\nu\| \leqslant \varepsilon$ l'ensemble $\{x \in \mathbf{C}^n : F(x, \nu) = 0\}$ soit transversal à S_ρ. Il s'ensuit que si l'ensemble W_ν est non singulier, il est difféomorphe à un ensemble de niveau non singulier de la fonction f au voisinage de son point critique. L'ensemble des valeurs de ν pour lesquelles W_ν est singulier est un ensemble de codimension (complexe) un.

Définition. On appelle *diagramme de bifurcation des zéros* (ou *diagramme de bifurcation des ensembles*) d'une singularité f l'espace $\Sigma_\varepsilon = \{\nu \in \mathbf{C}^\mu : \ \|\nu\| \leqslant \varepsilon, \ 0$ est la valeur critique de la fonction $F(\cdot, \nu)$ dans la boule $\|x\| \leqslant \rho\}$.

Exemples. 1. On peut choisir le déploiement miniversel de la singularité A_2 $(f(x) = x^3)$ sous la forme $F(x; \lambda_1, \lambda_2) = x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$. L'ensemble de niveau nul d'une fonction $F(\cdot; \lambda_1, \lambda_2)$ est localement sans singularités si le polynôme $x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$ n'a pas de racines multiples. Aussi le diagramme de bifurcation des zéros Σ est-il constitué par les valeurs $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{C}^2$ pour lesquelles le polynôme $x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$ est de la forme $(x - a)^2 (x - b)$, où $2a + b = 0$. On a $\lambda_1 = 2ab + a^2 = -3a^2$, $\lambda_2 = -a^2 b = 2a^3$. Par conséquent, Σ est d'équation $\lambda_1^3 + \frac{27}{4}\lambda_2^2 = 0$. Ce diagramme (plus exactement, sa partie réelle) est montré sur la figure 25.

2. On peut choisir le déploiement miniversel de la singularité A_3 $(f(x) = x^4)$ sous la forme $F(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3$. Un ensemble local de niveau nul d'une fonction $F(\cdot; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est sans singularités si le polynôme $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3$ n'a pas de racines multiples. Aussi le diagramme de bifurcation des zéros Σ est-il constitué par les valeurs $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{C}^3$ pour lesquelles le

polynôme $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3$ est de la forme $(x - a)^2 (x - b) \times (x - c)$, où $2a + b + c = 0$. Le diagramme de bifurcation Σ représenté sur la figure 26 est appelé *queue d'aronde*.

Le type topologique du couple $(D_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon)$, où $D_\varepsilon = \{\nu \in \mathbf{C}^\mu : \|\nu\| \leqslant \varepsilon\}$ est une boule de rayon ε dans la base du déploiement miniversel F, ne dépend ni de ε pour un ε suffisamment petit, ni du choix du déploiement miniversel de la singularité f. L'espace $(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon)$, qui est un ouvert dans la boule D_ε, constitue la base d'une fibration localement triviale $\{(x, \nu) \in \mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^\mu : \|x\| \leqslant \rho,$

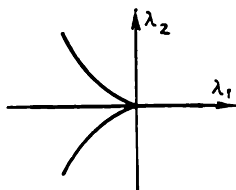


Fig. 25

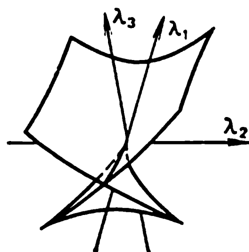


Fig. 26

$\|\nu\| \leqslant \varepsilon, \nu \notin \Sigma_\varepsilon, F(x, \nu) = 0\} \to D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ de projection $(x, \nu) \mapsto \nu$. La fibre $W_\nu = \{x \in \mathbf{C}^n : F(x, \nu) = 0, \|x\| \leqslant \rho\}$ de cette fibration est difféomorphe à un ensemble de niveau non singulier de la singularité f.

Comme pour toute fibration, le groupe fondamental de sa base opère en homologie de la fibre. On a donc une représentation naturelle

$$\pi_1 (D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon) = \pi_1 (D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon, \nu) \to \mathrm{Aut}\, H_{n-1} (W_\nu) = \mathrm{Aut}\, H_{n-1} (V_\lambda).$$

Théorème 1. *L'image de la représentation* $\pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon) \to \mathrm{Aut}\, H_{n-1} (V_\lambda)$ *du groupe fondamental du complémentaire du diagramme de bifurcation des zéros de la singularité f en homologie d'une variété de niveau non singulière se confond avec le groupe de monodromie de f.*

Pour la démonstration, on doit choisir le déploiement miniversel $F(x, \nu)$ de la singularité f sous la forme $F_0(x, \nu') - \nu_0$, où $\nu' \in \mathbf{C}^{\mu-1}$ $\nu_0 \in \mathbf{C}$, $\nu = (\nu_0, \nu')$. Comme déformée $f_\lambda(x)$ de f, on peut prendre $F_0(x, \nu'(\lambda))$. Soit ρ une projection naturelle de la base $\mathbf{C}^\mu$ du déploiement miniversel dans l'espace $\mathbf{C}^{\mu-1}$ par laquelle $\nu = (\nu_0, \nu')$ passe en ν'. Si $f_\lambda(x)$ est une fonction de Morse (λ étant suffisamment petit), la droite $L = \rho^{-1}(\nu'(\lambda))$ est en position générique par rapport à la variété Σ_ε. La droite L vient couper le diagramme de bifurcation Σ_ε en des points $(\nu_0, \nu'(\lambda)) \in \mathbf{C}^\mu$ tels que ν_0 soit une valeur critique de $f_\lambda(x)$. Le nombre de tels points est égal à la multiplicité $\mu(f)$

de f. L'espace $L \setminus \Sigma_\varepsilon$ se confond avec le complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques de f_λ. La restriction de la fibration $\{(x, v) : v \notin \Sigma_\varepsilon, F(x, v) = 0\} \to D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ à $L \setminus \Sigma_\varepsilon$ se confond avec la fibration des variétés de niveau non singulières de f_λ au-dessus du complémentaire de l'ensemble des ses valeurs critiques. Il s'ensuit que la répresentation naturelle $\pi_1 (L \setminus \Sigma_\varepsilon) \to \operatorname{Aut} H_{n-1} (V_\lambda)$, qui a pour image le groupe de monodromie de la singularité f, est la composition

$$\pi_1 (L \setminus \Sigma_\varepsilon) \xrightarrow{i_*} \pi_1 (D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon) \to \operatorname{Aut} H_{n-1} (V_\lambda),$$

où i_* est un homomorphisme de groupes fondamentaux induit par le plongement $L \setminus \Sigma_\varepsilon \hookrightarrow D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ et $\pi_1 (D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon)$. le groupe fondamental du complémentaire du diagramme de bifurcation. Puisque la droite L est en position générique par rapport à Σ_ε, l'homomorphisme $i_* : \pi_1 (L \setminus \Sigma_\varepsilon) \to \pi_1 (D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon)$ est un épimorphisme. Il en découle que l'image de la représentation $\pi_1 (D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon) \to \to \operatorname{Aut} H_{n-1} (V_\lambda)$ se confond avec le groupe de monodromie de la singularité f.

Le fait que l'homomorphisme $i_* : \pi_1 (L \setminus \Sigma_\varepsilon) \to \pi_1 (D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon)$ soit un épimorphisme est une variante du théorème de Zariski ([405]), qui consiste en ce qui suit. Soient M une hypersurface affine algébrique non singulière dans $\mathbf{C}^n$, et L une droite (complexe) générique dans $\mathbf{C}^n$. Une telle droite rencontre transversalement M en m points $p_1, \ldots, p_m$. Le théorème de Zariski dit en particulier que pour la droite générique L l'homomorphisme des groupes fondamentaux i_*: $\pi_1 (L \setminus M) \to \pi_1 (\mathbf{C}^n - M)$ induit par le plongement $i: L \setminus M \to \to \mathbf{C}^n - M$ est un épimorphisme. Le groupe fondamental $\pi_1 (L \setminus M) = = \pi_1 (L - \{p_i\})$ de la droite privée de m points est un groupe libre engendré par m générateurs. Comme générateurs, on peut prendre les lacets simples associés à un système de chemins disjoints sur la droite complexe L qui joignent les p_i au point de base $p_0 \in L \setminus M$. Par conséquent, le groupe fondamental du complémentaire de l'hypersurface M est un groupe engendré par les m générateurs décrits.

Le théorème de Zariski décrit aussi tous les relateurs du groupe. Pour le faire, considérons la projection $\pi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n-1}$ de $\mathbf{C}^n$ suivant la droite L et sa restriction $\pi|_M : M \to \mathbf{C}^{n-1}$ à l'hypersurface M. La généricité de L permet de supposer en particulier que l'ensemble discriminant de l'application $\pi|_M$ (image de l'ensemble de ses points critiques) est une hypersurface réduite dans $\mathbf{C}^{n-1}$. Plus exactement, on a ce qui suit. L'adhérence de l'ensemble des valeurs critiques de $\pi|_M$ est une hypersurface complexe N dans $\mathbf{C}^{n-1}$. Si $q \in \in \mathbf{C}^{n-1} - N$, l'image réciproque $\pi|_M^{-1}(q)$ se compose de m points tels que la différentielle de $\pi|_M$ est non dégénérée en chaque point. A tout point non singulier de N (sauf l'ensemble de codimension un) sont associés deux points de l'image réciproque. Au voisinage d'un

tel point, l'hypersurface M se laisse définir localement par l'équation $x_0 + x_1^2 = 0$, où la projection π applique un point $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$ en un point $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1}$ et N est localement définie dans $\mathbf{C}^{n-1}$ par $x_1 = 0$. Soit $q_0 \in \mathbf{C}^{n-1} - N$ image de L par π, et soit L_1 une droite générique dans $\mathbf{C}^{n-1}$ passant par q_0. On peut supposer que L_1 ne rencontre N qu'en des points non singuliers auxquels se confondent deux points de l'image réciproque $\pi|_M^{-1}(q)$ et que L_1 est transversale à N. Dans ce cas $\pi^{-1}(L_1)$ est une courbe non singulière dans l'espace complexe de dimension deux $\pi^{-1}(L_1) \cap \cap M$, et $\pi|_{\pi^{-1}(L_1)\cap M} : \pi^{-1}(L_1) \cap M \to L_1$ un revêtement ramifié à m feuillets au-dessus de la droite L_1. Soient $q_1, \ldots, q_k$ les points d'intersection de L_1 avec l'ensemble discriminant N, et τ un lacet quelconque dans l'espace $L_1 - \{q_1, \ldots, q_k\}$ ayant son origine et son extrémité en q_0. Au parcours de τ correspond un homomorphisme T_τ du couple d'espaces $(\pi^{-1}(q_0), \pi^{-1}(q_0) \cap M) = (L, L \cap M)$ sur lui-même, défini bien sûr à l'isotopie près. Cet homomorphisme induit une transformation $T_{\tau *} : \pi_1(L \setminus M) \to \pi_1(L \setminus M)$ du groupe fondamental de la droite $L \setminus M$ privée de m points, en lui-même. Il est évident que si $a \in \pi_1(L \setminus M)$, alors $i_* a = i_* T_{\tau *} a$, où $i_* : \pi_1(L \setminus M) \to \pi_1(\mathbf{C}^n - M)$. D'après le théorème de Zariski, l'homomorphisme $\pi_1(\pi^{-1}(L_1) \setminus M) \to \pi_1(\mathbf{C}^n - M)$ induit par le plongement est un isomorphisme, et les relations de la forme décrite engendrent tous les relateurs du groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{C}^n - M)$. Comme générateurs du système de relations, on peut prendre évidemment les relateurs $i_* a = i_* T_{\tau_i *} a$ pour le système $\{\tau_i\}$ de lacets simples associés aux chemins disjoints qui joignent les points $q_1, \ldots, q_k$ au point q_0. D'où il ressort que $\pi_1(\mathbf{C}^n - M)$ est un groupe à m générateurs et à mk relateurs.

La variante locale de ce théorème (que nous avons utilisée en partie dans le texte ci-dessus) se démontre d'une façon analogue. On trouve sa démonstration dans [152].

Si γ est un lacet dans le complémentaire $D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ du diagramme de bifurcation des zéros de la singularité f, désignons par $h_{\gamma *}$, par analogie au n° 2.1, l'automorphisme correspondant du groupe d'homologie d'une variété de niveau non singulière de f ($h_{\gamma *}$ appartient au groupe de monodromie de f).

Pour toute singularité, il existe un deuxième diagramme de bifurcation, dit diagramme de bifurcation des fonctions. Pour le définir, considérons le déploiement miniversel $F_0(x, \nu)$ de la singularité f dans la classe des fonctions qui s'annulent en 0. Un tel déploiement possède $(\mu - 1)$ paramètres. Nous l'appellerons *déploiement miniversel borné*. Comme déploiement miniversel borné, on peut prendre par exemple le déploiement $F_0(x, \nu) = f(x) + \sum_{i=1}^{\mu-1} \nu_i \varphi_i(x)$, où $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{\mu-1})$, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\mu-1}$ sont des germes qui engendrent

une base de l'anneau quotient de l'anneau des germes en 0 de fonctions holomorphes, par l'idéal jacobien $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ de la singularité f, $\varphi_0 \equiv 1$, $\varphi_i(0) = 0$ pour $i \geqslant 1$ (le déploiement $F_0(x, \nu)$ se distingue du déploiement miniversel $F(x, \nu)$ par l'absence du terme $\nu_0 \cdot 1$, qui n'affecte pas le type de la fonction).

Soit D_ε une petite boule de centre 0 dans la base $\mathbf{C}^{\mu-1}$ du déploiement miniversel borné. Considérons dans D_ε l'ensemble des valeurs des paramètres ν pour lesquelles $F_0(\cdot, \nu)$ est une fonction de Morse au voisinage B_ρ de 0 dans $\mathbf{C}^n$, i.e. n'a que des points critiques non dégénérés (au nombre de μ) ayant des valeurs critiques différentes. Son complémentaire $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ s'appelle *diagramme de bifurcation des fonctions* de la singularité f. Le type topologique du couple $(D_\varepsilon, \tilde{\Sigma}_\varepsilon)$ est naturellement indépendant de ε pour un ε suffisamment petit ($\varepsilon \ll \rho$). L'ensemble $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ est une hypersurface dans $\mathbf{C}^{\mu-1}$, qui est évidemment réductible, car elle est réunion de deux hypersurfaces. La première, l'ensemble des valeurs de ν pour lesquelles $F_0(\cdot, \nu)$ a des points critiques dégénérés, s'appelle *caustique complexe*, et la seconde, l'ensemble des valeurs de ν pour lesquelles la fonction présente des points critiques où les valeurs critiques coïncident, porte le nom de *strate de Maxwell*.

Exemples. 1. Le diagramme de bifurcation des fonctions de la singularité A_2 se réduit évidemment à un point unique $\lambda = 0$ dans la base $\mathbf{C}^1$ du déploiement miniversel borné.

2. Le diagramme de bifurcation des fonctions de la singularité A_3 est constitué par les valeurs de $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{C}^2$ pour lesquelles le polynôme $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x$ ou bien a un point critique dégénéré, ou bien a deux points critiques non dégénérés dont les valeurs critiques coïncident. Le second ensemble se confond avec $\{\lambda_2 = 0\} \subset \mathbf{C}^2$. Le premier peut être défini par la condition que le polynôme $4x^3 + 2\lambda_1 x + \lambda_2$ (dérivée du polynôme $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x$) possède une racine multiple. Ce cas se présente pour $\lambda_1^3 + \frac{27}{8}\lambda_2^2 = 0$. Le diagramme de bifurcation des fonctions de la singularité A_3 est représenté sur la figure 27.

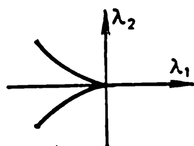


Fig. 27

Il existe une application canonique (projection) ρ de la base $\mathbf{C}^\mu$ du déploiement miniversel sur la base $\mathbf{C}^{\mu-1}$ du déploiement miniversel borné. On montre que le germe d'espace $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ se confond avec l'ensemble des valeurs non régulières de l'application $\Sigma_\varepsilon \to \mathbf{C}^{\mu-1}$, cette dernière étant la composée du plongement $\Sigma_\varepsilon \hookrightarrow \mathbf{C}^\mu$ et de la projection ρ. L'application en question définit un revêtement à μ feuillets au-dessus du complémentaire du diagramme de bifurcation des fonctions $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ de la singularité f.

3.2. Connexité du diagramme de Dynkine et « irréductibilité » de l'opérateur de monodromie classique. Nous avons dit au n° 3.1 que le diagramme de bifurcation des fonctions d'une singularité est toujours réductible (à l'exception des cas triviaux des singularités de multiplicité un et deux). Au contraire, le diagramme de bifurcation des zéros de la singularité est irréductible.

Théorème 2 (voir par exemple [115]). *Le diagramme de bifurcation des zéros Σ_ε de la singularité f est un ensemble analytique irréductible. Mieux, il existe un germe d'application propre $(\mathbf{C}^{\mu-1}, 0) \to (\mathbf{C}^\mu, 0)$ dont l'image se confond avec l'espace Σ_ε et qui est un isomorphisme en dehors de l'ensemble des points singuliers de Σ_ε.*

Cette application de l'espace $\mathbf{C}^{\mu-1}$ dans la base $\mathbf{C}^\mu$ du déploiement miniversel de f peut être construite de la façon suivante. Considérons l'ensemble des germes de fonctions g: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ vérifiant les conditions $g(0) = 0$, $dg(0) = 0$. Sur cet ensemble opère le groupe de germes de difféomorphismes analytiques de $\mathbf{C}^n$ conservant le point 0. L'orbite de f sous l'action de ce groupe est une variété complexe non singulière de codimension $\mu - 1$ (pour garantir un raisonnement rigoureux, on se placera dans un espace de jets d'ordre suffisamment élevé). La transversale à l'orbite en f est de dimension $(\mu - 1)$ et définit une déformation à $(\mu - 1)$ paramètres de f. Comme toute déformation de f, elle est équivalente au déploiement induit du déploiement miniversel par une application de sa base $\mathbf{C}^{\mu-1}$ dans la base $\mathbf{C}^\mu$ du déploiement miniversel. Puisque 0 est valeur critique pour toutes les fonctions du déploiement considéré, l'espace $\mathbf{C}^{\mu-1}$ se réduit tout entier, par cette application, au diagramme de bifurcation des zéros Σ_ε. C'est précisément l'application du théorème.

A l'aide de cette construction on montre facilement que la caustique (i.e. la branche du diagramme de bifurcation de fonctions de la singularité, constituée des points de base du déploiement miniversel borné pour lesquels la fonction correspondante a les points critiques dégénérés) est irréductible. La caustique est l'image (par projection canonique) du sous-ensemble du diagramme de bifurcation des zéros Σ_ε composé des points de base du déploiement miniversel pour lesquels la fonction correspondante possède un point critique dégénéré sur la variété de niveau nul. Dans la transversale à l'orbite de la singularité qui, comme il a été expliqué, est le normalisateur du diagramme de bifurcation Σ_ε, à ce sous-ensemble correspond la partie du diagramme délimitée par la condition de dégénérescence de la différentielle seconde. La condition de dégénérescence de la forme quadratique (de la différentielle seconde), condition de nullité du déterminant, définit dans l'espace des formes quadratiques le sous-espace irréductible, d'où irréductibilité de la caustique.

A. Gabrielov ([115]) et F. Lazzeri ([201]) ont déduit de l'assertion du théorème 2 le résultat suivant:

Théorème 3. *Le diagramme de Dynkine de toute singularité est connexe dans une base distinguée.*

Cette assertion découle du théorème 4 ci-après. On a un résultat analogue pour une base faiblement distinguée.

Corollaire. *Soit $f_t(x)$ $(t \in [0, t_0])$ une déformation de la singularité f. Supposons que, pour des $t \neq 0$ petits, la fonction $f_t(x)$ admette, au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$, k points critiques distincts $p_1(t), \ldots, p_k(t)$. Supposons en outre que toutes les valeurs critiques $f_t(p_i(t))$ $(i = 1, \ldots, k)$ de f_t sont identiques. Alors $k = 1$, i.e. la fonction f_t admet exactement un point critique (de multiplicité $\mu(f)$).*

En effet, il est facile de voir que pour $k > 1$ les cycles évanescents correspondant aux différents points critiques de la déformée $f_t(x)$ de la singularité f ont l'indice d'intersection nul. Par conséquent, le diagramme de Dynkine de f se décompose en k composantes non connexes, ce qui contredit le théorème 3.

Nous allons démontrer un résultat un peu plus fort que le théorème 3.

Théorème 4. *Le groupe de monodromie d'une singularité opère transitivement sur l'ensemble des cycles évanescents en homologie d'un ensemble de niveau non singulier au voisinage du point critique. Autrement dit, il existe pour deux cycles évanescents quelconques Δ_1, Δ_2 un élément du groupe de monodromie de la singularité qui envoie Δ_1 sur $\pm\Delta_2$.*

D é m o n s t r a t i o n. Comme pour la démonstration du théorème 1, choisissons le déploiement miniversel de la singularité f sous la forme $F(x, \nu) = F_0(x, \nu') - \nu_0$, où $\nu' \in \mathbf{C}^{\mu-1}$, $\nu_0 \in \mathbf{C}$, $\nu = (\nu_0, \nu')$; comme déformée $\tilde{f}$ de f, prenons la fonction $\tilde{f} = F_0(x, \nu')$ avec une valeur fixée des paramètres ν'. Les paramètres ν' seront choisis de telle façon que $F_0(x, \nu')$ soit une fonction de Morse. Ce sera le cas pour presque toute valeur de ν' (à l'exception de celles qui appartiennent au diagramme de bifurcation des fonctions de la singularité). Si L est une droite (complexe) $\rho^{-1}(\nu')$ (où $\rho: \mathbf{C}^\mu \to \mathbf{C}^{\mu-1}$ est une projection de la base du déploiement miniversel), l'intersection $L \cap \Sigma_\varepsilon$ est constituée par les points (z_i, ν') $(i = 1, \ldots, \mu)$, où z_i sont les valeurs critiques de la fonction $\tilde{f}$.

Un cycle évanescent Δ_k $(k = 1, 2)$ est défini en homologie d'un ensemble de niveau non singulier $\{\tilde{f} = z_0\}$ par un chemin u_k qui joint la valeur critique z_{i_k} à la valeur non critique z_0 sans passer par les valeurs critiques de $\tilde{f}$. Pour simplifier, admettons que $u_k(t) = z_{i_k} + t$ quand t est très petit. On peut regarder les chemins u_1, u_2 comme deux chemins sur la droite complexe $L \subset \mathbf{C}^\mu$. Puisque le diagramme de bifurcation Σ_ε est irréductible, les points non sin-

guliers de l'espace Σ_ε forment un ensemble connexe. Les points (non singuliers) de Σ_ε en lesquels la projection $\rho: \Sigma_\varepsilon \to \mathbf{C}^{\mu-1}$ est dégénérée forment un sous-ensemble de codimension (complexe) un. On peut donc les éliminer de l'ensemble des points non singuliers de l'espace Σ_ε sans que cet ensemble cesse d'être connexe. Il s'ensuit qu'on peut joindre deux points (z_{i_1}, ν'), (z_{i_2}, ν') par un chemin v $(v(0) = (z_{i_1}, \nu'),\ v(1) = (z_{i_2}, \nu'))$ qui est entièrement contenu dans l'ensemble des points non singuliers de Σ_ε en lesquels Σ_ε a une projection non dégénérée sur $\mathbf{C}^{\mu-1}$. Soit dans le complémentaire du diagramme de bifurcation des zéros Σ_ε dans $\mathbf{C}^\mu$ un lacet w d'origine et d'extrémité en (z_0, ν'). Il prend le chemin u_1 pour aller du point (z_0, ν') vers un point $(z_{i_1} + t_0, \nu') = (u_1(t_0), \nu')$ avec un t_0 suffisamment petit, puis continue par un chemin $v + (t_0, 0)$ parallèle à v pour arriver en $(z_{i_2} + t_0, \nu') = (u_2(t_0), \nu')$ et enfin revient au point (z_0, ν') suivant le chemin u_2. On voit sans peine que l'opérateur de monodromie h_{w*} correspondant au lacet w envoie le cycle évanescent Δ_1 sur le cycle évanescent Δ_2 (peut-être avec le renversement de l'orientation), ce qu'il fallait démontrer.

Le théorème 3 est une conséquence directe du théorème 4. Supposons en effet que le diagramme de Dynkine de la singularité f dans une base (faiblement distinguée) $\{\Delta_i\}$ soit non connexe. Du théorème de Picard-Lefschetz il ressort que les opérateurs de Picard-Lefschetz (et leurs composés) transforment un cycle évanescent de base en un cycle qui est une combinaison linéaire de cycles évanescents de base de la même composante connexe du diagramme. Il n'existe alors aucun opérateur du groupe de monodromie de f tel qu'un cycle évanescent de base soit transformé en un cycle évanescent de base d'une autre composante connexe du diagramme, ce qui contredit le théorème 4. Il découle de ce raisonnement que le diagramme de Dynkine de la singularité reste connexe aussi quand on examine les multiplicités de ses arêtes modulo $m > 1$.

On peut déduire du théorème 3 quelques propriétés de l'opérateur de monodromie classique de la singularité. A cet effet, formulons une assertion sur les matrices triangulaires:

Lemme 1. *Soient A, B deux matrices triangulaires supérieures $\mu \times \mu$ avec des unités suivant la diagonale. Soit $A \cdot B^T$ une matrice telle qu'on a un 0 à l'intersection de chacune de ses k premières colonnes avec chacune de ses $(\mu - k)$ dernières lignes. Alors la matrice B^T possède la même propriété, i.e. la matrice B est somme directe de matrices triangulaires supérieures $k \times k$ et $(\mu - k) \times (\mu - k)$.*

La démonstration ne pose aucun problème.

Théorème 5. *Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ une base distinguée du groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ d'un ensemble de niveau non singulier de la*

singularité, I une partie de l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, \mu\}$ *telle que l'enveloppe linéaire des éléments de base* Δ_i *tels que* $i \in I$ *soit invariante par l'action de l'opérateur de monodromie classique* h_*. *On a alors soit* $I = \varnothing$, *soit* $I = \{1, \ldots, \mu\}$.

Nous allons démontrer une proposition apparemment un peu plus forte, mais en réalité exactement équivalente au théorème 5.

Soit $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ une suite de cycles évanescents en homologie d'une variété de niveau non singulière de la singularité f, définis par un système de chemins $\{u_i\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ qui joignent une partie de valeurs critiques de la déformée $\tilde{f}$ de f à sa valeur non critique z_0 sans passer (pour $t \neq 0$) par les valeurs critiques de $\tilde{f}$. Supposons que les chemins u_i soient sans points doubles et ne se rencontrent pas en des points autres que leurs extrémités confondues avec z_0.

Théorème 6. *Si l'enveloppe linéaire des cycles évanescents* $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ *dans le groupe d'homologie* $H_{n-1}(F_{z_0})$ *est invariante par l'action de l'opérateur de monodromie classique de la singularité, on a soit* $k = 0$, *soit* $k = \mu(f)$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que les cycles $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ (et les chemins $u_1, \ldots, u_k$) soient numérotés dans l'ordre prescrit par la condition 3° de la définition d'une base distinguée (voir n° 1.2). On voit sans peine qu'il est possible de compléter le système de chemins $\{u_i;\ i = 1, \ldots, k\}$ en un système de chemins $\{u_i;\ i = 1, \ldots, k, \ldots, \mu\}$ qui définisse une base distinguée $\Delta_1, \ldots, \Delta_k, \ldots, \Delta_\mu$ dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(F_{z_0})$. La condition d'invariance de l'enveloppe linéaire des éléments $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ par l'action de h_* veut dire que dans la matrice H de l'opérateur de monodromie classique h_* écrite dans la base $\Delta_1, \ldots, \Delta_k, \ldots, \Delta_\mu$ on a des zéros à toutes les intersections des k premières colonnes et des $(\mu - k)$ dernières lignes. Appliquant le lemme 1 à l'égalité $H = (-1)^n L^{-1}L^T$, où L est la matrice de la forme de Seifert de la singularité, nous voyons que la matrice L est somme directe de matrices $k \times k$ et $(\mu - k) \times (\mu - k)$. Il en est donc de même pour la matrice des intersections de la singularité f dans la base distinguée $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$, égale à $-L + (-1)^n L^T$. Pour $k \neq 0, \mu$, cela signifie que le diagramme de Dynkine de la singularité f se décompose en deux diagrammes disjoints (avec respectivement k et $(\mu - k)$ sommets), ce qui est contradictoire avec le théorème 3.

Corollaire. *Si l'opérateur de monodromie classique d'une singularité est la multiplication par* 1 (*ou par* -1), *la singularité est non dégénérée* (*i.e. sa multiplicité* μ *est égale à l'unité*).

Cette assertion a été démontrée par N. A'Campo dans [2] (comme hypothèse de Sebastiani), à partir du résultat suivant:

Théorème 7. *La trace* $\operatorname{tr} h_*$ *de l'opérateur de monodromie classique de la singularité* $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ *d'une fonction de n variables est égale à* $(-1)^{n-1}$.

3.3. Diagrammes de bifurcation des singularités simples. On sait (voir nº 3.6) que, pour les singularités simples A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 d'un nombre impair de variables, le groupe de monodromie se confond avec le groupe de Weyl classique correspondant de même nom (voir [50]). Ce groupe est l'image du groupe fondamental du complémentaire du diagramme de bifurcation des zéros Σ_ε de la singularité. Pour les singularités simples, l'espace Σ_ε peut être obtenu comme suit.

Soit $\mathbf{R}^k$ un espace vectoriel sur lequel opère canoniquement un groupe de Weyl W (A_k, D_k ou E_k respectivement). Soit $\mathbf{C}^k = \mathbf{R}^k \otimes_\mathbf{R} \mathbf{C}$ le complexifié de $\mathbf{R}^k$. L'action de W sur $\mathbf{R}^k$ se prolonge naturellement en l'action de W sur son complexifié $\mathbf{C}^k$. Soit S la réunion des orbites non régulières de l'action du groupe W, i.e. l'ensemble des points sur lesquels l'action de W est non libre (admet un stabilisateur non trivial). Cet ensemble se confond avec la réunion des miroirs (complexes) dont les réflexions appartiennent toutes à W. Considérons l'espace quotient $\mathbf{C}^k/W$. On sait ([50]) qu'il est isomorphe — comme espace analytique — à un espace vectoriel complexe de dimension k.

Théorème 8 ([10]). *Pour les singularités simples* A_k, D_k, E_k *le couple* $(\mathbf{C}^k/W, S/W)$ *est isomorphe (dans un voisinage de* 0) *au couple* $(D_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon)$, *où* Σ_ε *est le diagramme de bifurcation des zéros de la singularité.*

Exemple. Soit $f(x) = x^{k+1}$ (singularité A_k). Le groupe de Weyl W est alors le groupe des permutations du $(k+1)$-ième élément. Son action sur l'espace $\mathbf{C}^k$ se définit comme suit. L'espace $\mathbf{C}^k$ se plonge dans l'espace $\mathbf{C}^{k+1}$ sous forme d'un hyperplan $\sum_{i=1}^{k+1} x_i = 0$, et l'action de W sur cet espace est obtenue en faisant la restriction de son action sur $\mathbf{C}^{k+1}$ sous forme d'un groupe de permutations de coordonnées. L'isomorphisme entre l'espace quotient $\mathbf{C}^{k+1}/W$ et l'espace $\mathbf{C}^{k+1}$ est une application qui envoie la classe d'un point $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ sur un point $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k+1})$, où $\sigma_i = \sigma_i(x_1, \ldots, x_{k+1})$ est l'i-ième fonction symétrique élémentaire des variables $x_1, \ldots, x_{k+1}$ ($\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+1} = x_1 \cdot \ldots \cdot x_{k+1}$). Le fait que cette application soit un isomorphisme de variétés complexes résulte du théorème fondamental des fonctions symétriques (toute fonction symétrique analytique de $x_1, \ldots, x_{k+1}$ se laisse représenter d'une façon unique sous forme d'une fonction analytique de polynômes symétriques $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k+1}$). Cet isomorphisme envoie $\mathbf{C}^k/W$ de façon isomorphe sur l'hyperplan de coordonnée $\sigma_1 = 0$. Les miroirs (orbites non

régulières) sont définis par la condition $x_i = x_j$. Le déploiement miniversel de la singularité $f(x)$ est de la forme

$$F(x, t_0, \ldots, t_{k-1}) = x^{k+1} + t_{k-1}x^{k-1} + \ldots + t_1x + t_0,$$

avec

$$t_i = (-1)^{k+1-i}\sigma_{k+1-i}(x_1, \ldots, x_{k+1}),$$

où $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ sont racines de l'équation $F(x, t_0, \ldots, t_{k-1}) = 0$, $t_k = x_1 + \ldots + x_{k+1} = 0$. Le diagramme de bifurcation des zéros se compose des valeurs des paramètres $t = (t_0, t_1, \ldots, t_{k-1})$ pour lesquelles la fonction $F(\cdot, t)$ a un point critique de valeur critique nulle, i.e. admet une racine multiple $x_i = x_j$. On sait maintenant comment déterminer l'isomorphisme décrit dans le théorème 8.

Pour les autres singularités simples, le théorème se démontre d'une façon analogue.

Rappelons qu'on appelle espace de type $K(\pi, 1)$ un espace dont le groupe fondamental π_1 se confond avec le groupe π et dont tous les groupes d'homotopie suivants $\pi_2, \pi_3, \ldots$ sont triviaux. Un espace de type $K(\pi, 1)$ est base d'une fibration principale de groupe π et d'espace fibré homotopiquement trivial.

On montre dans [53] que l'espace $\mathbf{C}^k/W - S/W$ des orbites régulières d'action de W est un espace de type $K(\pi, 1)$, où π est le groupe des tresses de Briescorn généralisé du groupe de Weyl W. Si W est un groupe de Weyl de type A_k, alors π est le groupe des tresses d'Artin ordinaire de $(k + 1)$ brins.

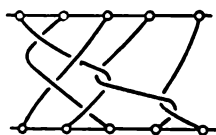
Petite digression. Groupes des tresses.

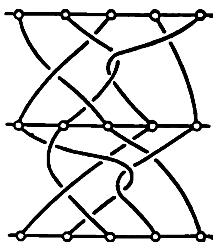
Afin de rendre notre exposé plus indépendant, citons quelques définitions et résultats de la théorie des tresses. Pour plus de détails, voir [53].

Pour se faire une idée géométrique bien nette d'une tresse, il suffit de regarder la figure 28. Une tresse se compose de n brins disjoints dans $\mathbf{R}^3$ qui relient n points fixes sur la base inférieure (constituée par un segment) à n points fixes analogues sur la base supérieure et qui vont de façon monotone de bas en haut, de la base inférieure à la base supérieure. On dit que deux tresses sont *équivalentes* si l'on peut passer par déformation de l'une à l'autre sans que les brins cessent d'être monotones et disjoints. On peut multiplier deux tresses: il suffit de les abouter (fig. 29). Les tresses à n brins (plus exactement leurs classes d'équivalence) forment le groupe $B(n)$ pour la multiplication. L'élément neutre de $B(n)$ est la tresse « démêlée » constituée de brins verticaux qui joignent les points des bases supérieure et inférieure. L'inverse d'une tresse donnée est obtenue par réflexion dans le plan horizontal.

On voit sans peine que le groupe $B(n)$ des tresses à n brins est engendré par $(n - 1)$ générateurs $g_1, \ldots, g_{n-1}$, où g_i est la tresse

dans laquelle sont entrelacés l'i-ième et l'$(i+1)$-ième brins (fig. 30). Ces générateurs sont liés par les relateurs $g_ig_j = g_jg_i$ pour $|i-j|>1$, $g_ig_{i+1}g_i = g_{i+1}g_ig_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, (n-2))$. On montre que les générateurs et les relateurs cités définissent le groupe $B(n)$. A toute tresse est associée de façon évidente une permutation de n éléments. Il existe donc un épimorphisme naturel du groupe des tresses $B(n)$ sur le groupe $S(n)$ des permutations de n éléments.


Fig. 28


Fig. 29

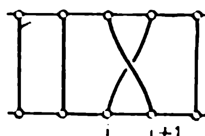


Fig. 30

Le noyau $\hat{B}(n)$ de cet homomorphisme est appelé groupe des tresses colorées à n brins. Une *tresse colorée* est une tresse dont chaque brin revient à son point d'origine.

Voici une définition plus formelle du groupe des tresses, qui permet de comprendre la signification de cette notion pour les problèmes d'analyse. La partie de l'espace $\mathbf{R}^3$ comprise entre les plans horizontaux qui contiennent les bases inférieure et supérieure peut être identifiée au produit $I \times \mathbf{C}$ du segment $I = [0, 1]$ par le plan des complexes $\mathbf{C}$. Par une telle identification, la tresse fait correspondre continûment à chaque nombre $t \in [0, 1]$ une collection non ordonnée de n nombres complexes différents. Notons que les $t = 0$ et $t = 1$ se font correspondre une même collection fixée de nombres. Ainsi donc, le groupe des tresses $B(n)$ est identifié au groupe fondamental de l'espace de toutes les collections non ordonnées de n nombres complexes différents. De même, le groupe des tresses colorées $\hat{B}(n)$ est identifié au groupe fondamental de l'espace de toutes les collections ordonnées de n nombres complexes différents.

Soient $\mathbf{C}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbf{C}\}$ l'espace des collections ordonnées de n nombres complexes, S la réunion de tous les hyperplans définis par les équations $x_i = x_j$, et $(\mathbf{C}^n - S)$ l'espace des collections ordonnées de n nombres complexes différents. On a $\hat{B}(n) = \pi_1(\mathbf{C}^n - S)$.

Le groupe $S(n)$ des permutations de n éléments opère sur l'espace $\mathbf{C}^n$ par permutations de coordonnées. L'espace $\mathbf{C}^n/S(n)$ est un espace de collections non ordonnées de n nombres complexes. Il est iso-

morphe à un espace vectoriel complexe de dimension n. Par cet isomorphisme une collection non ordonnée de nombres complexes $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n/S(n)$ s'associe à un polynôme $p(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$ à racines $x_1, \ldots, x_n$ (ou à ses coefficients, qui sont (au signe près) des fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ des variables $x_1, \ldots, x_n$: $\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n, \ldots, \sigma_n = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$). A l'espace $\Sigma = S/S(n)$ correspond un ensemble de polynômes à racines multiples. Ainsi donc, $(\mathbf{C}^n - S)/S(n) = \mathbf{C}^n/S(n) - \Sigma$ est un espace de collections non ordonnées de n nombres complexes différents; le groupe des tresses $B(n)$ se confond avec son groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{C}^n/S(n) - \Sigma)$.

On a un résultat plus fort selon lequel l'espace $(\mathbf{C}^n/S(n) - \Sigma)$ est un espace de type $K(\pi, 1)$ pour le groupe $B(n)$ des tresses à n brins. Cela signifie que $\pi_1(\mathbf{C}^n/S(n) - \Sigma) = B(n)$, $\pi_k(\mathbf{C}^n/S(n) - \Sigma) = 0$ pour $k > 1$. Puisque l'espace $\mathbf{C}^n - S$ est un revêtement à $n!$ feuillets de $(\mathbf{C}^n/S(n) - \Sigma)$, l'assertion relative à l'espace $\mathbf{C}^n/S(n) - \Sigma$ est équivalente à l'assertion que $\mathbf{C}^n - S$ est un espace de type $K(\pi, 1)$ (pour le groupe $\hat{B}(n)$ des tresses colorées à n brins).

Pour démontrer cette dernière assertion, considérons une application de $\mathbf{C}^n - S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n : x_i \neq x_j\}$ dans $\{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1} : x_i \neq x_j\}$ par laquelle un point $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ passe en un point $(x_1, \ldots, x_{n-1})$. On voit sans peine que cette application est une fibration de fibre $\mathbf{C} - \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Puisque la fibre de cette fibration a tous ses groupes d'homotopie triviaux à partir du deuxième, l'assertion requise se démontre par récurrence sur la dimension n.

Le groupe $S(n)$ des permutations de n éléments est un des groupes finis engendrés par les réflexions. L'action de $S(n)$ par permutations de coordonnées sur $\mathbf{C}^n$ est réductible. Elle se décompose en somme directe de deux actions: une action sur le sous-espace $\mathbf{C}^{n-1}$ défini par $x_1 + \ldots + x_n = 0$ et une action triviale sur l'espace $x_1 = \ldots = x_n$ de dimension un. Sur le sous-espace $\mathbf{C}^{n-1}$ cette action coïncide avec l'action d'un groupe de Weyl de type A_{n-1} isomorphe au groupe $S(n)$ des permutations de n éléments. La réunion des miroirs de toutes les réflexions dans le groupe $S(n)$ sur l'espace $\mathbf{C}^{n-1}$ (dont chacun est un hyperplan d'équation $x_i = x_j$) et son espace quotient par l'action de ce groupe seront notés par S et Σ comme précédemment (aucune confusion n'est à craindre). Alors $\mathbf{C}^n - S = (\mathbf{C}^{n-1} - S) \times \mathbf{C}^1$, $\mathbf{C}^n/S(n) - \Sigma = (\mathbf{C}^{n-1}/S(n) - \Sigma) \times \mathbf{C}^1$, aussi $\hat{B}(n) = \pi_1(\mathbf{C}^n - S) = \pi_1(\mathbf{C}^{n-1} - S)$, $B(n) = \pi_1(\mathbf{C}^n/S(n) - \Sigma) = \pi_1(\mathbf{C}^{n-1}/S(n) - \Sigma)$. La description du groupe des tresses colorées $\hat{B}(n)$ et du groupe des tresses $B(n)$ comme

groupes fondamentaux des espaces $\mathbf{C}^{n-1} - S$ et $\mathbf{C}^{n-1}/S(n) - \Sigma$ respectivement suggère une généralisation de cette définition.

Soit W un groupe fini irréductible engendré par des réflexions et opérant dans un espace vectoriel réel $\mathbf{R}^n$ de dimension n. Le groupe W opère également sur son complexifié $\mathbf{C}^n$. On montre que l'espace quotient $\mathbf{C}^n/W$ est isomorphe à un espace vectoriel complexe de dimension n (voir [50]). Soit $\{V_i\}$ l'ensemble de tous les hyperplans dans $\mathbf{R}^n$ tels que toute réflexion dans V_i appartienne à W; soient $V_{i\mathbf{C}} \subset \mathbf{C}^n$ leurs complexifiés. En dehors de l'espace $S = \bigcup_i V_{i\mathbf{C}}$ le groupe W opère librement. Soit $\Sigma = S/W$. Le groupe fondamental $B_W = \pi_1(\mathbf{C}^n/W - \Sigma)$ de l'espace $\mathbf{C}^n/W - \Sigma$ est appelé groupe (généralisé) des tresses de Briescorn de W; le groupe fondamental $\hat{B}_W = \pi_1(\mathbf{C}^n - S)$ est appelé groupe (généralisé) des tresses colorées de Briescorn de W. On a la suite exacte $1 \to \hat{B}_W \to B_W \to W \to 1$.

Lemme 2. *Les espaces $\mathbf{C}^n/W - \Sigma$ et $\mathbf{C}^n - S$ sont des espaces de type $K(\pi, 1)$ (pour les groupes B_W et $\hat{B}_W$ respectivement).*

Pour un groupe W de type A_{n-1} (groupe des permutations de n éléments) ce lemme a déjà été démontré. Proposons-nous de le démontrer pour un groupe W de type B_n (isomorphe à un groupe de type C_n) et de type D_n. Il suffit évidemment de démontrer l'assertion du lemme pour l'espace $\mathbf{C}^n - S$.

Si le groupe W est de type B_n, les réflexions appartenant à W sont obtenues par rapport aux hyperplans $\{x_i \pm x_j = 0\}$ et $\{x_i = 0\}$ dans l'espace $\mathbf{C}^n$. Par récurrence, on peut admettre qu'un espace $\{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1} : x_i \pm x_j \neq 0,\ x_i \neq 0\}$ est un espace de type $K(\pi, 1)$. La projection naturelle

$$\mathbf{C}^n - S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n : x_i \pm x_j \neq 0, \quad x_i \neq 0\} \to$$
$$\to \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1} : x_i \pm x_j \neq 0, \quad x_i \neq 0\}$$

est une fibration localement triviale de fibre $\mathbf{C} - \{0, \pm x_1, \pm x_2, \ldots \ldots, \pm x_{n-1}\}$. Puisque la fibre de cette fibration a tous ses groupes d'homotopie triviaux à partir du deuxième, on en déduit l'assertion requise sur l'espace $\mathbf{C}^n - S$.

Si le groupe W est de type D_n, les réflexions appartenant à W sont obtenues par rapport aux hyperplans $\{x_i \pm x_j = 0\}$ dans l'espace $\mathbf{C}^n$. Considérons une application

$$\mathbf{C}^n - S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n : x_i \pm x_j \neq 0\} \to$$
$$\to \{(y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1} : y_i \neq y_j, \quad y_i \neq 0\}$$

définie par $y_i = x_n^2 - x_i^2$. C'est une fibration localement triviale. Sa fibre est une courbe complexe affine et a donc tous ses groupes d'homotopie triviaux à partir du deuxième. De même que pour l'espace $\mathbf{C}^n - S$ correspondant à un groupe de type B_n, on montre

par récurrence sur n, en s'aidant de la projection $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n-1}$, que la base $\{(y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1}: y_i \neq y_j, y_i \neq 0\}$ de cette fibration est un espace de type $K(\pi, 1)$. Il s'ensuit que l'espace $\mathbf{C}^n - S$ de cette fibration est lui aussi un espace de type $K(\pi, 1)$.

Dans le cas général ce lemme résulte d'une assertion générale appartenant à Deligne ([91]). Considérons dans l'espace $\mathbf{R}^n$ une collection finie d'hyperplans V_i. Soient $V_{i\mathbf{C}} \subset \mathbf{C}^n$ leurs complexifiés. Supposons que les composantes du complémentaire de la réunion $\bigcup V_i$ dans $\mathbf{R}^n$ sont des cônes simpliciaux ouverts (i.e. admettent exactement n faces). Alors l'espace $\mathbf{C}^n - (\bigcup V_{i\mathbf{C}})$ est un espace de type $K(\pi, 1)$.

Du théorème 8 et du lemme 2 découle le

Théorème 9. *Pour les singularités simples, le complémentaire* $D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ *du diagramme de bifurcation des zéros est un espace de type* $K(\pi, 1)$.

O. Lyashko et E. Looijenga ont montré (voir [221]) : pour les singularités simples le complémentaire $\mathbf{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_\varepsilon$ du diagramme de bifurcation des fonctions est lui aussi un espace de type $K(\pi, 1)$, où π est le sous-groupe d'indice $\mu!\, N^\mu\, |W|^{-1}$ du groupe des tresses d'Artin à μ brins (ici $|W|$ est l'ordre du groupe de Weyl correspondant, et N le nombre de Coxeter, ou — en termes de singularités — l'ordre de l'opérateur de monodromie classique).

Pour construire le plongement du groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_\varepsilon)$ du complémentaire du diagramme de bifurcation des fonctions d'une singularité simple dans le groupe des tresses à μ brins, assimilons le groupe des tresses à μ brins au groupe fondamental d'un espace de polynômes de la forme $x^\mu + a_{\mu-2}x^{\mu-2} + \ldots + a_1x + a_0$ sans racines multiples. Dans l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^{\mu-1}_{(a)}$ muni de coordonnées $(a_0, a_1, \ldots, a_{\mu-2})$ les points correspondant aux polynômes à racines multiples forment une surface algébrique Ξ. Son complémentaire est un espace de type $K(\pi, 1)$, où π est le groupe des tresses à μ brins. A chaque point ν de la base $\mathbf{C}^{\mu-1}$ du déploiement miniversel borné de la singularité f correspond une fonction $F(\cdot, \nu)$ qui est une déformée de f. Cette fonction admet exactement μ valeurs critiques au voisinage du zéro de l'espace $\mathbf{C}^n$, à condition de tenir compte de la multiplicité des valeurs critiques. Le diagramme de bifurcation des fonctions $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ de f est particularisé dans la base $\mathbf{C}^{\mu-1}$ du déploiement miniversel borné par la condition qu'aux points du diagramme correspondent des fonctions $F(\cdot, \nu)$ ayant moins de μ valeurs critiques distinctes. Ainsi donc, pour $\nu \in \tilde{\Sigma}_\varepsilon$ certaines valeurs critiques de $F(\cdot, \nu)$ se confondent.

Soit ν un point de la base $\mathbf{C}^{\mu-1}$ du déploiement miniversel borné, soit $F(\cdot, \nu)$ la fonction correspondant à ν, soient $z_1, \ldots, z_\mu$ les va-

leurs critiques de F au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$ (les z_i ne sont pas nécessairement toutes distinctes), soit $\bar{z} = \sum_{i=1}^{\mu} z_i/\mu$ leur moyenne arithmétique, $\tilde{z}_i = z_i - \bar{z}$ $(i = 1, \ldots, \mu)$, et soit enfin $p_\nu(x) = \prod_{i=1}^{\mu} (x - \tilde{z}_i)$ un polynôme de degré μ à racines $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_\mu$. Puisque $\sum_{i=1}^{\mu} \tilde{z}_i = 0$, le coefficient du monôme $x^{\mu-1}$ dans le polynôme $p_\nu(x)$ est nul. Par conséquent, $p_\nu(x)$ appartient à l'espace $\mathbf{C}^{\mu-1}_{(a)}$ des polynômes de la forme $x^\mu + a_{\mu-2}x^{\mu-2} + \ldots + a_1x + a_0$. Faisant correspondre au point $\nu \in \mathbf{C}^{\mu-1}$ le polynôme $p_\nu(x) \in \mathbf{C}^{\mu-1}_{(a)}$, nous obtenons une application $\psi: \mathbf{C}^{\mu-1} \to \mathbf{C}^{\mu-1}_{(a)}$ de la base du déploiement miniversel borné dans l'espace $\mathbf{C}^{\mu-1}_{(a)}$. L'application ψ envoie le diagramme de bifurcation des fonctions $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ dans l'espace Ξ des polynômes à racines multiples, et le complémentaire $\mathbf{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_\varepsilon$ du diagramme de bifurcation dans l'espace $\mathbf{C}^{\mu-1}_{(a)} - \Xi$ des polynômes sans racines multiples. On montre par calcul direct que l'application ψ est non dégénérée (i.e. est de rang $(\mu - 1)$) sur le complémentaire du diagramme de bifurcation $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$. L'image réciproque de 0 par ψ est l'ensemble des valeurs des paramètres $\nu \in \mathbf{C}^{\mu-1}$ pour lesquelles les fonctions $F(\cdot, \nu)$ admettent chacune une valeur critique unique. De ce fait et du corollaire du théorème 3, il découle que $F(\cdot, \nu)$ a un point critique unique. L'image réciproque de 0 par ψ se confond donc avec la strate $\mu = \mathrm{Cte}$ dans la base du déploiement miniversel borné. Pour les singularités simples (et pour elles uniquement!) la strate en question se réduit à un point $\nu = 0$. Il s'ensuit que l'application $\psi: \mathbf{C}^{\mu-1} \to \mathbf{C}^{\mu-1}_{(a)}$ est propre au voisinage de 0 et que sa restriction au complémentaire $\mathbf{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_\varepsilon$ du diagramme de bifurcation des fonctions définit un revêtement au-dessus de l'espace $\mathbf{C}^{\mu-1}_{(a)} - \Xi$ des polynômes sans racines multiples. Ainsi donc, le complémentaire du diagramme de bifurcation des fonctions $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ d'une singularité simple est un revêtement au-dessus d'un espace de type $K(\pi, 1)$, d'où il ressort qu'il est lui-même un espace de ce type. L'application ψ induit alors un plongement du groupe fondamental du complémentaire du diagramme de bifurcation $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ dans le groupe fondamental de l'espace $\mathbf{C}^{\mu-1}_{(a)} - \Xi$ des polynômes sans racines multiples, qui est le groupe des tresses à μ brins.

Si $p: E \to B$ est un revêtement, on appelle *groupe des glissements* de p le groupe $\mathrm{Aut}(p) = \{h: E \to E : h$ est un homéomorphisme, $ph(x) = p(x)$ pour $x \in E\}$. On voit sans peine que le groupe des glissements $\mathrm{Aut}(p)$ du revêtement p est isomorphe au groupe quotient $N(\pi_1(E))/\pi_1(E)$, où $N(\pi_1(E))$ est le normalisateur du

sous-groupe $\pi_1(E)$ dans le groupe $\pi_1(B)$, i.e. $\{g \in \pi_1(B) : g\pi_1(E)\, g^{-1} = \pi_1(E)\}$.

Pour les singularités simples, le groupe des glissements Aut (ψ) du revêtement ψ: $\mathbf{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_\varepsilon \to \mathbf{C}^{\mu-1}_{(a)} - \Xi$ du complémentaire du diagramme de bifurcation des fonctions au-dessus de l'espace des polynômes sans racines multiples (voir ci-dessus) a été décrit dans [216]. Il est cyclique pour toute singularité simple sauf A_1 et D_4. Son ordre est égal au nombre de Coxeter du groupe de Weyl correspondant (ou, ce qui revient au même, à l'ordre de l'opérateur de monodromie classique) pour les singularités des types A_μ ($\mu \neq 1$), D_μ ($\mu \neq 4$) et E_6, et à la moitié du nombre de Coxeter pour les singularités de types E_7 et E_8. Pour une singularité de type D_4 le groupe des glissements Aut (ψ) est isomorphe à $Z_3 \oplus S(3)$, où $S(3)$ est le groupe des permutations de 3 éléments; pour une singularité de type A_1 le groupe Aut (ψ) est trivial.

Dans le cas réel, i.e. pour le déploiement miniversel réel d'une singularité réelle, E. Looijenga a montré ([222]) que le complémentaire du diagramme de bifurcation d'une singularité simple a les composantes contractiles. Ces composantes correspondent de façon biunivoque aux classes d'éléments W-conjugués d'ordre 2 dans la classe de conjugaison Wn, où $n \in N/W$ est un élément d'ordre 2, W le groupe de Weyl correspondant, N son normalisateur dans le groupe de toutes les transformations linéaires. Le groupe N/W se confond avec le groupe des automorphismes du diagramme classique de Dynkine correspondant.

O. Lyashko ([224]) a décrit toutes les décompositions des singularités simples qu'on peut rencontrer dans la base de son déploiement miniversel borné. Soit $f_\lambda(x)$ ($\lambda \in (\mathbf{C}, 0)$) une déformation de la singularité f: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$. On dit que f se décompose par f_λ suivant le type $X = (X_1, \ldots, X_k)$, où $X_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ij_i})$, si, pour des valeurs suffisamment petites (mais non nulles) du paramètre λ, la fonction f_λ admet (dans un petit voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$) k valeurs critiques distinctes $z_1, \ldots, z_k$, une valeur z_i étant atteinte en j_i points critiques où la fonction f_λ admet des singularités des types $X_{i1}, \ldots, X_{ij_i}$. On dit que le diagramme de Dynkine E (dans une base distinguée $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$) se décompose suivant le type $(E_1, \ldots, E_k)$, où $E_i = (E_{i1}, \ldots, E_{ij_i})$, si

1° $\{E_i\}$ est une partition de l'ensemble des sommets de E en parties disjointes, les sommets de chaque E_i (cycles de base évanescents) étant numérotés par des entiers successifs dans E;

2° les sommets de E_i sont joints entre eux par des arêtes de la même multiplicité que dans E;

3° E_{ij} sont les composantes connexes de E_i ($j = 1, \ldots, j_i$).

On dit que la décomposition de la singularité f suivant le type $X = (X_1, \ldots, X_k)$ ($X_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ij_i})$) est compatible (ou

adaptée) à la décomposition de son diagramme E suivant le type $(E_1, \ldots, E_k)$ $(E_i = (E_{i1}, \ldots, E_{ij_i}))$ si pour i quelconque la suite $E_{i1}, \ldots, E_{ij_i}$ est une suite de diagrammes de Dynkine des points critiques $X_{i1}, \ldots, X_{ij_i}$ qui correspondent à l'i-ième valeur critique. On montre sans peine que si f admet une décomposition suivant le type $X = (X_1, \ldots, X_k)$, il existe une base distinguée $\{\Delta_p\}$ dans laquelle le diagramme de Dynkine E de f admet une décomposition suivant le type $(E_1, \ldots, E_k)$ compatible à la décomposition de la singularité. O. Lyashko a montré que pour les singularités simples la réciproque est vraie aussi : si le diagramme E d'une singularité simple f admet dans une base distinguée une décomposition suivant le type $(E_1, \ldots, E_k)$ $(E_i = (E_{i1}, \ldots, E_{ij_i}))$, il existe une déformation de f pour laquelle f subit une décomposition compatible à celle de son diagramme E.

On trouvera dans [224] une description détaillée de toutes les décompositions des singularités simples.

3.4. Strate μ = Cte et type topologique de la singularité. Les déformations qui conservent la multiplicité d'une singularité ne doivent pas affecter beaucoup son type topologique.

En effet, Le et Ramanujam ont montré ([205]) qu'une telle déformation laisse inchangé le type topologique d'un ensemble de niveau singulier (plus exactement, du couple $(\bar{B}_\rho, f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho)$, où $\bar{B}_\rho$ est une boule de rayon ρ suffisamment petit centrée au point critique) et le type différentiable de la fibration de Milnor, sauf si le nombre de variables n est égal à 3. La condition restrictive $n \neq 3$ tient à ce que la démonstration utilise le théorème de h-cobordisme.

I. Timourian a montré ([345]) qu'une déformation conservant la multiplicité laisse inchangé aussi le type topologique de la fonction. Cela signifie ce qui suit. Soit une singularité $f : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, et soit son déploiement $F(x, t)$ différentiable suivant $t \in \mathbf{R}^p$ $(F(x, 0) = f(x))$, tel que pour t quelconque, le germe $F(\cdot, t)$ admette en 0 un point critique de même multiplicité $\mu = \mu(f)$, à valeur critique égale à zéro. Il existe alors un voisinage U de 0 dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p$, un voisinage U_0 de 0 dans $\mathbf{C}^n$, un voisinage D de 0 dans $\mathbf{R}^p$ et un homéomorphisme $\alpha : U \to U_0 \times D$ $(\alpha(0, t) = (0, t))$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\alpha} & U_0 \times D \\ \downarrow F & & \downarrow f \times \mathrm{id} \\ \mathbf{C} & \xleftarrow{\pi} & \mathbf{C} \times D \end{array}$$

soit commutatif (ici π est la projection sur le premier facteur). Le cas de $n = 3$ est décrit dans [265], [266]. Cet ouvrage était sous presse lorsque B. Perron nous a signalé une erreur dans la demonstration produite dans ces articles).

On montre aisément que la matrice des intersections et le groupe

de monodromie de la singularité restent inchangés le long de la strate μ = Cte. Par contre, il en est parfois autrement des caractéristiques « plus analytiques » de la singularité. Par exemple, F. Pham a montré ([274]) qu'un déploiement de multiplicité constante peut affecter la topologie du diagramme de bifurcation des zéros de la singularité, plus exactement sa partition, en accord avec les singularités de l'ensemble de niveau nul.

Pour construire un tel exemple, considérons la singularité $f(x, y) = y^3 + x^9$ de multiplicité 16. Son déploiement miniversel a la base de dimension 16 et se définit par la formule

$$F(x, y, u, v) = y^3 + u(x)\, y + v(x), \quad \text{où}$$

$$u(x) = u_0 + u_1 x + \ldots + u_7 x^7, \quad v(x) = v_0 + v_1 x + \ldots + v_7 x^7 + x^9,$$

$$u = (u_0, u_1, \ldots, u_7), \quad v = (v_0, v_1, \ldots, v_7).$$

Soient $X = F^{-1}(0) \subset \mathbf{C}^{18}$ l'ensemble de niveau nul de F, et $G: X \to \mathbf{C}^{16}_{u,v}$ sa projection sur la base du déploiement. Désignons par $X^{*\alpha}$ l'ensemble (analytique) des points $z \in X$ en lesquels la courbe $G^{-1}(G(z))$ est de degré 3 (i.e. se définit localement par une équation appartenant au cube de l'idéal maximal) et présente un contact d'ordre $\geqslant \alpha$. On voit sans peine que l'ensemble $X^{*\alpha}$ se compose de quadruples (x, y, u, v) dans lesquels $y = 0$, x est racine de l'équation $u(x) = 0$ de multiplicité $\geqslant 2\alpha$ et racine de l'équation $v(x) = 0$ de multiplicité $\geqslant 3\alpha$. En particulier, $X^{**} = X^{*3} = \{(x, y, u, v): x = y = 0, v = 0, u_i = 0 \text{ pour } i < 6\}$. La projection T^{**} de X^{**} sur la base $\mathbf{C}^{16}_{u,v}$ du déploiement miniversel est de dimension deux et est la strate μ = Cte dans cette base.

Considérons l'ensemble $T^{*5/3} = G(X^{*5/3})$. Il est constitué de couples $(u, v) \in \mathbf{C}^{16}_{u,v}$ tels que les polynômes $u(x)$, $v(x)$ admettent une racine commune de multiplicité 4 pour $u(x)$ et de multiplicité 5 pour $v(x)$. On peut mettre l'ensemble $G^{-1}(T^{*5/3}) \cap X^{*4/3}$ sous forme de réunion de deux ensembles, à savoir de $X^{*5/3}$ et de X'. Ici X' est un ensemble de quadruples $(x, y, u, v) \in \mathbf{C}^{18}$ tels que $y = 0$, x soit racine de multiplicité 3 de l'équation $u(x) = 0$ et racine de multiplicité 4 de l'équation $v(x) = 0$ et que, de plus, les polynômes $u(x)$, $v(x)$ admettent une autre racine commune qui est de multiplicité 4 pour $u(x)$ et de multiplicité 5 pour $v(x)$. L'intersection X'' de $X^{*5/3}$ et de X' (plus exactement de son adhérence) se compose de quadruples $(x, y, u, v) \in \mathbf{C}^{18}$ tels que $y = 0$, x soit racine de multiplicité 7 de l'équation $u(x) = 0$ et racine de multiplicité 9 de l'équation $v(x) = 0$. Il s'ensuit que $v = (v_0, \ldots, v_7) = 0$, $x = 0$ et $u_0 = \ldots = u_6 = 0$. L'ensemble X'' est donc contenu dans X^{**} mais ne se confond pas avec X^{**}. Cela signifie que les ensembles $X^{*\alpha}$ ne sont pas disposés de la même façon vis-à-vis des différents points de X^{**}, ce qui veut dire précisément que le diagramme de bifurcation des zéros change le long de la strate T^{**} (μ = Cte).

On voit sans peine que $X^{*4/3}$ est l'ensemble des points $z \in X$ en lesquels la courbe $G^{-1}(G(z))$ admet une singularité de type E_6, et $X^{*5/3}$ l'ensemble des points $z \in X$ en lesquels la courbe $G^{-1}(G(z))$ admet une singularité de type E_8. Donc $G(X')$ est l'ensemble (plus exactement, l'adhérence de l'ensemble) des valeurs $(u, v) \in \mathbf{C}^{16}_{u,v}$ pour lesquelles la courbe $G^{-1}(u, v)$ a deux singularités des types E_6, E_8. Le raisonnement précédent montre que la strate du diagramme de bifurcation des zéros composée de points en lesquels la fonction correspondante admet des singularités des types E_6 et E_8 sur l'ensemble de niveau nul change (disparaît tout simplement) le long de la famille $\mu = \mathrm{Cte}(T^{**})$ de la singularité $x^3 + y^9$.

S. Goussein-Zadé et N. Nékhorochev ont montré ([150]) que pour une déformation de multiplicité constante d'un polynôme homogène non dégénéré de degré 22 de deux variables, c'est la plus grande des multiplicités des singularités adjacentes de type A_k qui change.

Selon une hypothèse (non démontrée), dans la base du déploiement miniversel borné d'une singularité, la strate $\mu = \mathrm{Cte}$ est une variété non singulière *). A. Gabrielov a montré ([115]) que la dimension de cette strate est égale à la modalité de la singularité.

L'hypothèse de la différentiabilité de la strate $\mu = \mathrm{Cte}$ dans la base du déploiement miniversel borné est démontrée pour le cas de deux variables. C'est J. Wahl qui en aurait donnée une première démonstration en 1971. Voir aussi à ce sujet [54], ainsi que l'article de B. Teissier [340].

3.5. Résolution de la singularité et quelques propriétés de l'opérateur de monodromie classique. Un moyen efficace pour l'étude de la topologie de la singularité est la résolution de cette dernière, ou désingularisation.

Soit $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ une singularité, i.e. un germe de fonction holomorphe ayant un point critique isolé à l'origine.

Définition. On appelle *désingularisation* d'une singularité f une application analytique propre $\pi: (Y, Y_0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ d'une variété complexe non singulière Y, telle que

1° l'application $\pi|_{Y-Y_0}$ soit un isomorphisme analytique $Y - Y_0 \to \mathbf{C}^n - 0$ (ou d'un voisinage de Y_0 dans Y sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$);

2° le sous-espace $Y_0 = \pi^{-1}(0)$ de l'espace Y soit une réunion de variétés non singulières de dimension $(n - 1)$ (diviseurs) qui sont en position générale sur Y;

3° il existe au voisinage de tout point de $Y_0 = \pi^{-1}(0)$ un système de coordonnées locales $y_1, \ldots, y_n$ en lequel $f \circ \pi(y_1, \ldots, y_n) =$

*) Cette hypothèse est mise en défaut pour les fonctions de trois variables (communication particulière).

$= y_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{k_n}$; le jacobien de π est égal à $g(y_1, \ldots, y_n) y_1^{m_1} \cdot \ldots$ $\ldots \cdot y_n^{m_n}$, où $g(0, \ldots, 0) \neq 0$.

L'existence d'une désingularisation pour toute singularité découle du théorème de Hironaka ([153]). Au cas où f est une fonction de deux variables, on peut la résoudre par une suite d'éclatements (voir [318] et aussi le n° 4.3 ci-après) dans les points singuliers.

Nombre de caractéristiques topologiques de la singularité, telles que sa multiplicité, le polynôme caractéristique de son opérateur de monodromie classique, etc., se laissent exprimer en termes de caractéristiques topologiques des diviseurs collés pendant la résolution de la singularité. Avant de formuler les résultats correspondants, introduisons quelques notions.

Le *polynôme caractéristique* $P_f(z)$ (de l'opérateur de monodromie classique) d'une singularité f est $\det(z \cdot \mathrm{id} - h_* \mid H_{n-1}(V_\varepsilon))$ (ici V_ε est une variété de niveau non singulière de f). Le polynôme caractéristique $P_f(z)$ a comme racines les valeurs propres de l'opérateur h_* de monodromie classique de la singularité.

Le polynôme caractéristique $P_f(z)$ de la singularité f permet également de définir le déterminant $\det S$ de la forme d'intersection en homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon; Z)$ d'une variété de niveau non singulière de f. Il est défini de façon intrinsèque, car le déterminant du changement de base du réseau d'entiers $H_{n-1}(V_\varepsilon; Z)$ est égal à ± 1. Le déterminant de la forme d'intersection se confond avec le déterminant de la matrice de l'opérateur $i_*: H_{n-1}(V_\varepsilon; Z) \to H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon; Z)$. Si $\det S \neq 0$, il est égal, au signe près, à l'ordre du groupe $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon; Z)/\mathrm{Im}\, i_*$. On a

$$\det S = \det(-\mathrm{Var}^{-1} + (-1)^n (\mathrm{Var}^{-1})^T) =$$
$$= (-1)^{\mu \frac{n(n+1)}{2}} \det(-\mathrm{id} + (-1)^n \mathrm{Var}(\mathrm{Var}^{-1})^T) =$$
$$= (-1)^{\mu \frac{n(n+1)}{2}} \det(-\mathrm{id} + h_*) = (-1)^{\mu \frac{(n-1)(n-2)}{2}} P_f(1).$$

Au lieu du polynôme caractéristique de la singularité, il est parfois plus commode d'utiliser ce qu'on appelle la fonction zêta de la transformation h de monodromie classique de la singularité. Ses avantages sont, premièrement, de fournir des résultats plus élégants et, deuxièmement, d'être définie aussi pour les singularités non isolées, quand le polynôme caractéristique cesse pratiquement d'avoir un sens. Beaucoup de résultats énoncés ci-après restent vrais aussi pour des points critiques non isolés, mais nous omettrons de le spécifier dans chaque cas concret.

Définition. On appelle *fonction zêta d'une transformation* $g: X \to$ $\to X$ d'un espace topologique X (pour fixer les idées, admettons que

X soit un complexe cellulaire fini) la fonction rationnelle

$$\zeta_g(z) = \prod_{q \geqslant 0} \{\det [\mathrm{id} - zg_* \mid H_q(X; R)]\}^{(-1)^q}.$$

Cette définition tient aussi compte de l'homologie de mesure nulle de X, i.e. on ne suppose pas que l'homologie soit réduite modulo un point. La définition a aussi un sens pour un couple d'espaces (X, Y) et une transformation $g: X \to X$ par laquelle le sous-espace Y revient à lui-même. On voit alors figurer dans l'expression de la fonction zêta l'action de la transformation g en homologie relative $H_q(X, Y; R)$.

Définition. On appelle *fonction zêta de la monodromie* d'une singularité f la fonction zêta de la transformation de monodromie classique h d'une variété de niveau non singulière V_ε de f en elle-même.

Pour les singularités isolées on a $H_q(V_\varepsilon) = 0$ pour $q \neq 0$, $n - 1$. Donc

$$\zeta_f(z) = (1 - z)(z^\mu P_f(z^{-1}))^{(-1)^{n-1}},$$

d'où

$$P_f(z) = z^\mu \left(\frac{z}{z-1} \zeta_f(z^{-1})\right)^{(-1)^{n-1}},$$

où μ est la multiplicité de la singularité. Ainsi donc, le polynôme caractéristique $P_f(z)$ et la fonction zêta $\zeta_f(z)$ d'une singularité s'expriment l'un en fonction de l'autre.

On voit sans peine que le degré de la fonction rationnelle $\zeta_f(z)$ (égal au degré du numérateur moins le degré du dénominateur) est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(V_\varepsilon)$ de la variété de niveau non singulière V_ε.

Le résultat suivant permet d'exprimer la fonction zêta de la singularité au moyen des invariants topologiques des diviseurs que l'on colle pendant sa résolution. Soient $\pi: (Y, Y_0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ une désingularisation de f, S_m l'ensemble des points de Y_0 au voisinage desquels la fonction $f \circ \pi$ s'écrit, dans un système de coordonnées locales, sous la forme x_1^m (il est évident que les intersections des diviseurs collés ne sont pas contenues dans les S_m).

Théorème 10 (N. A'Campo [3]).

$$\mu(V_\varepsilon) = \sum_{m \geqslant 1} m\chi(S_m), \quad \zeta_f(z) = \prod_{m \geqslant 1} (1 - z^m)^{\chi(S_m)}.$$

Pour la démonstration, on utilise le fait que si la transformation $h: X \to X$ conserve le sous-espace Y, alors $\zeta_{h_X}(z) = \zeta_{h_Y}(z) \times \zeta_{h_{(X,Y)}}(z)$, où h_X, h_Y, $h_{(X,Y)}$ est la transformation h considérée sur l'espace (couple d'espaces) correspondant. Il existe une

application $\varphi : V_\varepsilon \to (f \circ \pi)^{-1}(0)$ (qui « tire » une fibre non singulière sur la fibre singulière) par laquelle tout point de S_m a m images réciproques, tandis que les k images réciproques des intersections des diviseurs collés sont des fibrés de tores de dimension $(k - 1)$. On peut admettre que la transformation de monodromie classique h est compatible à l'application φ en ce sens qu'elle conserve les images réciproques par φ des points de $(f \circ \pi)^{-1}(0)$ en opérant de façon triviale sur cet espace. La transformation h fait subir alors une permutation circulaire aux images réciproques des points de l'ensemble S_m. La fonction zêta de la permutation circulaire de m points est égale à $(1 - z^m)$, d'où il ressort que la fonction zêta de la restriction de h à l'image réciproque $\varphi^{-1}(S_m)$ de S_m est égale à $(1 - z^m)^{\chi(S_m)}$. Au-dessus des points des intersections des diviseurs collés, la transformation h agit comme des difféomorphismes de tores qui, étant des translations, n'apportent aucune contribution à la fonction zêta.

L'idée d'une telle construction revient à C.H. Clemens ([75]).

De la formule de la fonction zêta d'une singularité, citée dans le théorème 10, il ressort que les valeurs propres de l'opérateur de monodromie classique d'une singularité isolée sont des racines de différents degrés de l'unité. Il existe donc un degré (N) de l'opérateur de monodromie classique dont toutes les valeurs propres sont 1. Comme N, on peut prendre un nombre divisible par les multiplicités m de tous les diviseurs collés pendant la résolution. On a donc le

Théorème 11. *L'opérateur* $(h_*^N - \mathrm{id})$ *est nilpotent, i.e.* $(h_*^N - \mathrm{id})^k = 0$ *pour un certain k.*

Ce théorème a été démontré par Briescorn ([52]), Katz ([175]) et d'autres auteurs. On trouve dans [203] sa généralisation au cas d'un germe de fonction analytique sur l'espace analytique dont tous les ensembles de niveau peuvent avoir des singularités.

De la résolution d'une singularité isolée on peut déduire l'estimation de la valeur de l'exposant k qui, comme on le voit aisément, est égal à la plus grande taille des cellules de Jordan de l'opérateur de monodromie classique. A cet effet, on prend l'application $\mathbf{C}_u \to \mathbf{C}_z$ envoyant u sur $z = u^N$ et l'on considère au-dessus de $\mathbf{C}_u$ la famille de variétés induite de la famille $\{(f \circ \pi)(x) = z\}$ au-dessus de $\mathbf{C}_z$ par l'application précédente. La désingularisation de la fibre au-dessus de 0 nous donne un ensemble collé dans lequel tous les diviseurs interviennent avec la multiplicité 1 (i.e. $S_m = \varnothing$ quand $m > 1$). L'opérateur $\tilde{h}_*$ de monodromie de cette famille est égal à h_*^N. Soit Z_i la partie de la fibre au-dessus de 0 qui est la réunion de toutes les intersections des diviseurs non singuliers collés i à i. On a

$$Z_1 = (f \circ \pi)^{-1}(0) \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \ldots \supset Z_n \supset Z_{n+1} = \varnothing.$$

On obtient comme précédemment une application d'une fibre non singulière sur la fibre singulière nulle, compatible à la transformation

de monodromie. On montre alors que si a est un cycle sur une fibre non singulière appartenant à l'image réciproque de Z_i, alors le cycle $\widetilde{h}_* a - a$ est homologue à un cycle appartenant à l'image réciproque de Z_{i+1}. Il s'ensuit que $(\widetilde{h}_* - \mathrm{id})^n = 0$, i.e. que $(h_*^N - \mathrm{id})^n = 0$. On peut donc prendre comme exposant k dans le théorème 11 le nombre n des variables; par conséquent, la taille d'une cellule de Jordan de l'opérateur de monodromie classique h_* ne peut dépasser $n \times n$. Nous avons démontré le

Théorème 12. *La taille d'une cellule de la forme normale de Jordan de l'opérateur h_* de monodromie classique de la singularité $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ d'une fonction de n variables ne dépasse pas $n \times n$.*

Par exemple, si f est singularité d'une fonction de deux variables, la plus grande taille possible d'une cellule de Jordan de son opérateur de monodromie classique est 2. C'est le cas pour la singularité $f(x, y) = (x^3 + y^2)(x^2 + y^3)$. On peut montrer que l'opérateur de monodromie classique de la singularité f est non diagonalisable. Pour rechercher la forme quadratique de f, on peut employer les méthodes du § 4. Il est montré au nº 4.4 que ses indices d'inertie positif, nul et négatif sont respectivement $\mu_+ = 1$, $\mu_0 = 1$ et $\mu_- = \mu - 2 = 9$. De la formule de Picard-Lefschetz il ressort que les vecteurs propres de l'opérateur h_* de monodromie classique de f associés à la valeur propre 1 sont les éléments de l'espace $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ orthogonaux au sens de la forme d'intersection à tous les cycles évanescents de la base distinguée $\{\Delta_i\}$, donc aussi à tous les éléments de l'espace $H_{n-1}(V_\varepsilon)$. Ainsi donc, pour la singularité de la fonction $\hat{f}(x, y, t) = f(x, y) + t^2$, le sous-espace des vecteurs $a \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$ tels que $h_* a = a$ est de dimension un. Pour le polynôme caractéristique $P_{\hat{f}}(z)$ on a $P_{\hat{f}}(z) = \det(z \cdot \mathrm{id} - h_*) = \det(z \cdot \mathrm{id} + L^{-1} L^T) = \det(zL + L^T) = \det(zL^T + L) = z^\mu \det(L^T + z^{-1} L) = z^\mu P_{\hat{f}}(z^{-1})$. Par conséquent, $P_{\hat{f}}(z)$ est un polynôme récurrent de degré μ (les coefficients des monômes z^ν et $z^{\mu-\nu}$ coïncident). La multiplicité de la racine égale à 1 d'un polynôme récurrent est toujours paire. Aussi l'espace des éléments du groupe d'homologie $H_2(V_\varepsilon)$ d'une variété de niveau non singulière de la singularité $\hat{f}(x, y, t)$ associés à la valeur propre 1 de l'opérateur de monodromie classique h_* est-il de dimension paire et ne se confond donc pas avec l'espace des vecteurs propres de valeur propre 1. A son tour, l'opérateur de monodromie classique de la singularité $f(x, y)$ se laisse déduire de l'opérateur de monodromie classique de $\hat{f}(x, y, t)$ au moyen de la multiplication par (-1), ce qui signifie qu'il n'est pas diagonalisable lui non plus (plus exactement, il a la cellule de Jordan 2×2 pour la valeur propre (-1)).

J. Steenbrink a montré ([334]) que la taille des cellules de Jordan de la forme normale de l'opérateur de monodromie classique de la singularité $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ associées à la valeur propre 1 est non supérieure à $(n - 1) \times (n - 1)$. Voir aussi le n° 13.2, E.

Pour des singularités $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ quasi homogènes le germe f appartient à son idéal jacobien $J_f = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$, et l'opérateur de monodromie classique h_* est d'ordre fini, i.e. est diagonalisable. J. Brianson et H. Skoda ont montré ([51]) que pour des singularités quelconques $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ de n variables la puissance n-ième du germe f appartient à l'idéal jacobien J_f, la taille d'une cellule de Jordan de l'opérateur de monodromie classique h_* étant non supérieure à $n \times n$, comme il a été dit plus haut. J. Scherk en tire l'hypothèse suivante ([306]) : si la puissance k-ième du germe f appartient à l'idéal jacobien J_f, alors la taille des cellules de Jordan de l'opérateur de monodromie classique de f est non supérieure à $k \times k$. Dans [307] il a démontré son hypothèse. Voir aussi à ce sujet le théorème 19 du n° 14.3, E.

Il existe une méthode de résolution de la singularité (de désingularisation) au moyen du diagramme de Newton (dite résolution torique). Pour presque toute fonction ayant un diagramme de Newton donné, cette méthode conduit effectivement à la résolution de la singularité. Voir à ce sujet [350] et aussi § 8.

A. Varchenko [359] a obtenu, à l'aide de cette méthode et du théorème 10, la description de la fonction zêta (ou du polynôme caractéristique) de l'opérateur de monodromie classique de la singularité au départ de son diagramme de Newton.

Soit $\Gamma \subset N^n$ le diagramme de Newton (N est un ensemble d'entiers non négatifs). On appelle *fonction zêta de* Γ la fonction

$$\zeta_\Gamma(z) = \prod_{l=1}^{n} (\zeta^l(z))^{(-1)^{(l-1)}}$$

où les polynômes $\zeta^l(z)$ seront définis ci-après (on les définit d'après les intersections de Γ avec tous les plans de coordonnées possibles de dimension l dans l'espace $\mathbf{R}^n$).

Soit L un sous-espace affine de dimension l dans $\mathbf{R}^n$, tel que $L \cap N^n$ soit un réseau d'entiers de dimension l. Admettons égal à 1 le volume de dimension l d'un parallélépipède construit sur une base quelconque dans $L \cap N^n$. Soit un ensemble $I \subset \{1, \ldots, n\}$ de cardinal $\# I = l$; posons $L_I = \{k \in \mathbf{R}^n : k_i = 0 \text{ pour } i \notin I\}$. Soient $\Gamma_j(I)$ ($j = 1, \ldots, j(I)$) toutes les faces de dimension $(l - 1)$ du polyèdre $L_I \cap \Gamma$, et $L_j(I)$ les sous-espaces affines de dimension $(l - 1)$ dans lesquels ces faces sont contenues. Le groupe quotient du réseau $N^n \cap L_I$ par le sous-groupe engendré par les vecteurs de $N^n \cap L_j(I)$ est cyclique. Désignons son ordre par $m_j(I)$. Soit $V_j(I)$ le volume de dimension $(l - 1)$ de la face $\Gamma_j(I)$ dans l'espace $L_j(I)$.

Remarquons que $m_j(I)\,(l-1)!\,V_j(I)$ est égal à $l!$ fois le volume de dimension l du cône au-dessus de $\Gamma_j(I)$ dont le sommet est à l'origine.

Posons

$$\zeta^l(z)=\prod_{I\,:\,\#I=l}\ \prod_{j=1}^{j(I)}(1-z^{m_j(I)})^{(l-1)!\,V_j(I)}.$$

Théorème 13. *Pour presque toute fonction $f\colon(\mathbf{C}^n,0)\to(\mathbf{C},0)$ ayant le diagramme de Newton donné Γ, la fonction zêta de l'opérateur de monodromie classique de la singularité f coïncide avec la fonction zêta de Γ.*

Les conditions définissant l'ensemble de fonctions pour lequel le théorème 13 a lieu peuvent être écrites au moyen des coefficients avec lesquels les monômes appartenant à Γ interviennent dans la décomposition du germe f (voir § 8). Il se peut d'ailleurs que toutes les fonctions de diagramme de Newton Γ admettent une singularité non isolée: le théorème 13 reste vrai quand même.

Puisque le degré de la fonction zêta de l'opérateur de monodromie d'une singularité coïncide avec la caractéristique d'Euler-Poincaré de sa variété de niveau non singulière, le théorème 13 donne lieu au résultat de A. Kushnirenko ([191]) qui exprime la multiplicité d'une singularité à partir de son diagramme de Newton.

3.6. Groupes de monodromie et bases distinguées des singularités simples. La meilleure description du groupe de monodromie s'obtient dans le cas des singularités simples, i.e. dépourvues de modules continus (voir Première partie, § 15). Comme pour toute singularité, deux cas sont à distinguer ici : le nombre de variables impair et le nombre de variables pair. Dans le premier cas les opérateurs de Picard-Lefschetz sont des réflexions dans des hyperplans orthogonaux, au sens de la forme d'intersection, aux cycles évanescents correspondants; le groupe de monodromie est un groupe engendré par les réflexions. Dans le deuxième cas la description des opérateurs de Picard-Lefschetz est moins habituelle.

On sait que le groupe de monodromie d'une singularité se définit par sa matrice des intersections dans une base faiblement distinguée. Pour les singularités simples, on a le

Théorème 14. *Pour les singularités simples A_k $(x^{k+1}+\sum t_i^2)$, D_k $(x^2y+y^{k-1}+\sum t_i^2)$, E_6 $(x^3+y^4+\sum t_i^2)$, E_7 $(x^3+xy^3+\sum t_i^2)$, E_8 $(x^3+y^5+\sum t_i^2)$ il existe des bases distinguées de cycles évanescents dans lesquelles leurs diagrammes de Dynkine se confondent avec les diagrammes classiques des algèbres de Lie correspondantes de même nom* (fig. 31). *Les groupes de monodromie de ces singularités d'un nombre impair de variables sont finis et isomorphes aux groupes de Weyl des algèbres correspondantes.*

Pour la description des groupes de Weyl classiques, voir [50].

Pour les singularités de type A_k le théorème 14 a été démontré au n° 2.9. Pour les autres singularités simples, on en trouve la démonstration au n° 4.1 (elle utilise le fait que ces singularités sont stablement équivalentes à celles de fonctions de deux variables).

J. McKay ([243]) a trouvé une méthode de construction des diagrammes de Dynkine des singularités simples d'un nombre impair de variables directement d'après leur groupe de monodromie.

Soient $M_f^{(i)}$, $M_f^{(p)}$ les groupes de monodromie des singularités stablement équivalentes à f et ayant un nombre impair (i) et un nombre pair (p) de variables respectivement. Les générateurs des groupes $M_f^{(i)}$, $M_f^{(p)}$ sont les transformations du réseau d'entiers définies par les

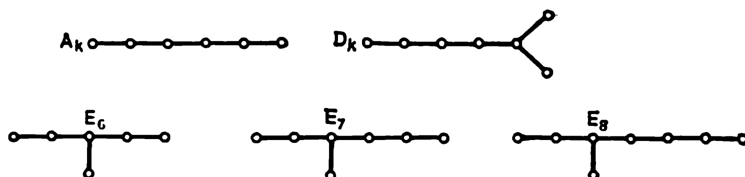


Fig. 31

formules de Picard-Lefschetz. Ces transformations coïncident modulo 2. Par conséquent, coïncident les groupes de transformations correspondants du groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon; Z_2)$ d'une variété de niveau non singulière à coefficients dans le groupe Z_2 ($H_{n-1}(V_\varepsilon; Z_2) \approx (Z_2)^\mu$). Il existe donc un groupe de monodromie unique $M_f^{Z_2}$ modulo 2 de la singularité opérant sur le réseau binaire $(Z_2)^\mu$. On a des épimorphismes naturels $M_f^{(i)} \to M_f^{Z_2}$ et $M_f^{(p)} \to M_f^{Z_2}$ induits par l'homomorphisme $Z \to Z_2$. Par conséquent, le groupe $M_f^{Z_2}$ de monodromie en homologie à coefficients dans Z_2 est groupe quotient tant de $M_f^{(i)}$ que de $M_f^{(p)}$.

Pour les singularités simples la description du groupe $M_f^{Z_2}$ résulte du fait que le noyau de l'homomorphisme $M_f^{(i)} \to M_f^{Z_2}$ ou bien est trivial (auquel cas $M_f^{Z_2} \approx M_f^{(i)}$), ou bien contient une transformation $\pm$ identique (auquel cas $M_f^{Z_2} \approx M_f^{(i)}/Z_2$). Le noyau de l'application $M_f^{(i)} \to M_f^{Z_2}$ se confond avec le groupe Z_2 si et seulement si le groupe de monodromie $M_f^{(i)}$ de la singularité f d'un nombre impair de variables contient une transformation qui est une multiplication par (-1).

Pour les singularités simples d'un nombre pair de variables le groupe de monodromie $M_f^{(p)}$ se décrit comme suit.

Théorème 15 (A. Varchenko, S. Chmutov [70]; voir aussi [6], [388]). *Pour les singularités simples d'un nombre pair de variables, le groupe*

de monodromie se confond avec le groupe de tous les opérateurs linéaires g sur le réseau d'entiers $Z^\mu = H_{n-1}(V_\varepsilon; Z)$ *qui vérifient les conditions suivantes:*

1) *l'opérateur g préserve la forme d'intersection de la singularité;*

2) *la restriction de g au noyau de la forme d'intersection (i.e. à l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments du réseau* Z^μ*) est une transformation identique;*

3) *l'opérateur g réduit modulo 2 appartient au groupe de monodromie* $M_f^{Z_2}$ *en homologie à coefficients dans* Z_2.

La nécessité des conditions 1) à 3) est évidente pour toute singularité (même non simple). Si f est singularité d'une fonction de deux variables, le noyau K de la forme d'intersection est de dimension $r - 1$, où r est le nombre de composantes irréductibles du germe de la courbe $\{f = 0\}$. On a donc pour les singularités simples: $\dim K = 0$ pour A_{2s}, E_6, E_8; $\dim K = 1$ pour A_{2s+1}, D_{2s+1}, E_7; $\dim K = 2$ pour D_{2s}.

Dans [72] le théorème 15 est généralisé au cas d'une singularité arbitraire. D'après le théorème de Frobenius ([233]), on peut choisir dans le réseau d'entiers $Z^\mu = H_{n-1}(V_\varepsilon; Z)$ muni d'une forme d'intersection alternée, une base (entière) $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_l$ $(2n + l = \mu(f))$ telle que $(e_i \circ f_i) = \lambda_i$, $(e_i \circ f_j) = 0$ pour $i \neq j$, $(e_i \circ e_j) = (f_i \circ f_j) = (g_i \circ g_j) = (e_i \circ g_j) = (f_i \circ g_j) = 0$ et que l'entier λ_i divise l'entier λ_{i-1} $(i = 2, \ldots, n)$. La suite d'entiers $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ est définie de façon unique.

Par analogie au groupe de monodromie $M_f^{Z_2}$ en homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon; Z_2)$ à coefficients dans Z_2, on peut définir le groupe de monodromie $M_f^{Z_k}$ en homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon; Z_k)$ à coefficients dans un groupe cyclique Z_k. Dans la proposition qui suit, une importance de premier plan revient au cas de $k = 2\lambda_1$, l'entier λ_1 étant défini dans l'alinéa précédent.

Théorème 16. *Le groupe de monodromie* $M_f^{(p)}$ *d'une singularité isolée d'une fonction d'un nombre pair de variables se confond avec le groupe de tous les opérateurs linéaires g sur le réseau d'entiers* $Z^\mu = H_{n-1}(V_\varepsilon; Z)$ *qui vérifient les conditions* 1) *et* 2) *du théorème* 15 *et la condition supplémentaire suivante:*

3') *l'opérateur g réduit modulo* $2\lambda_1$ *appartient au groupe de monodromie* $M_f^{Z_{2\lambda_1}}$ *en homologie à coefficients dans* $Z_{2\lambda_1}$.

Pour toute singularité d'une fonction de deux variables, on a $\lambda_1 = 1$ ([72]).

W. Janssen a généralisé le résultat de S. Chmutov aux intersections complètes [166] et a établi une classification des réseaux évanescents alternés [167]. G. Ilyuta a étendu les résultats de S. Chmutov aux singularités de bord [164].

Nous avons dit au n° 3.3 que décrire toutes les décompositions

d'une singularité simple qui se rencontrent dans la base du déploiement miniversel borné revient à décrire tous ses diagrammes de Dynkine dans les bases distinguées. On a donc naturellement besoin de décrire toutes les bases distinguées de la singularité.

Soient $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe quelconque de fonction admettant un point critique isolé en 0, $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ une base distinguée de cycles évanescents dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon; Z) \approx Z^\mu$ d'une variété de niveau non singulière. Dans une telle base l'opérateur de variation Var_f de la singularité f s'écrit sous forme d'une matrice triangulaire supérieure (n° 2.5). L'opérateur de monodromie classique h_* de f est le produit $h_1 \circ \ldots \circ h_\mu$ des opérateurs de Picard-Lefschetz h_i $(h_i(a) = a + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a \circ \Delta_i) \Delta_i)$ qui correspondent aux cycles évanescents $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ (loc. cit.).

Il se trouve que, pour les singularités simples, les réciproques sont aussi vraies.

Théorème 17 ([148]). *Soit $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ une base du groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon; Z) \approx Z^\mu$ d'une variété de niveau non singulière d'une singularité simple f. Supposons que l'opérateur de variation* Var_f *de f s'écrit dans la base citée sous forme d'une matrice triangulaire supérieure. Alors $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ est une base distinguée de cycles évanescents.*

Théorème 18. *Soit $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ une base de cycles évanescents en homologie d'une variété de niveau non singulière d'une singularité simple f. Supposons que l'opérateur h_* de monodromie classique de f soit produit $h_1 \circ \ldots \circ h_\mu$ d'opérateurs de Picard-Lefschetz qui correspondent aux cycles évanescents $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$. Alors $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ est une base distinguée de cycles évanescents.*

La démonstration du théorème 18 est contenue dans une lettre de 1980, non publiée, de P. Deligne à E. Looijenga. Les deux théorèmes se démontrent à l'aide d'un résultat non dénué d'intérêt lui-même.

Soient $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ une singularité simple d'un nombre impair de variables n, $\tilde{f}: U \to \mathbf{C}$ une déformée de Morse de f définie au voisinage U de l'origine dans $\mathbf{C}^n$, $z_1, \ldots, z_\mu$ des valeurs critiques de $\tilde{f}$ et z_0 sa valeur non critique telles que $|z_i| < |z_0|$ $(i = 1, \ldots, \mu)$, Δ un cycle évanescent quelconque en homologie de l'ensemble de niveau non singulier F_{z_0} de $\tilde{f}$.

Lemme 3 ([148]). *Le cycle Δ est évanescent le long d'un chemin sans points doubles u joignant une valeur critique z_i de $\tilde{f}$ à sa valeur non critique z_0 et entièrement contenu à l'intérieur d'un cercle $|z| < |z_0|$ (à l'exception de son extrémité qui se confond avec z_0).*

Dans l'énoncé de ce résultat, il est essentiel que f soit fonction d'un nombre impair de variables et que u soit contenu dans un cercle $|z| < |z_0|$. Au cas où f est singularité d'une fonction d'un nombre pair de variables, le lemme 3 cesse d'être vrai.

Si l'on ne demande pas que le chemin u soit contenu dans un cercle $|z| < |z_0|$, le lemme devient trivial (vrai pour toute singularité d'un nombre quelconque de variables) et dénué d'intérêt. Le lemme 3 s'énonce aussi sous forme équivalente:

Lemme 4. *Il existe une base distinguée de cycles évanescents* $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ *en homologie d'une variété de niveau non singulière de la singularité* f, *telle que son premier élément* Δ_1 *coïncide avec le cycle évanescent* Δ.

On ignore si des théorèmes et un lemme analogues aux théorèmes 17, 18 et au lemme 3 ont lieu pour des singularités non simples.

3.7. Courbes polaires et matrices des intersections des singularités. Les résultats obtenus dans [117] établissent des relations entre la matrice des intersections d'une singularité isolée $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ et la matrice des intersections de l'une des singularités $f + z^2$ ou $f|_{z=0}$ et les invariants de la courbe polaire de la singularité f par rapport à une fonction linéaire z. Ces résultats permettent de connaître les matrices des intersections pour un grand nombre de singularités et s'avèrent d'une grande utilité pour la démonstration par récurrence sur la dimension n des propositions sur les matrices des intersections des singularités (une telle démonstration par récurrence a été effectuée par exemple pour le théorème 16 du nº 3.6 dans [72]). Ce nº contient un bref exposé des résultats de [117]. On rencontre aussi des courbes polaires dans d'autres problèmes. Le lecteur trouvera un exposé plus circonstancié de la théorie des courbes polaires dans [342].

Soient $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe avec une singularité isolée en 0, et $z: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ une fonction linéaire. Considérons le germe d'application $(f, z): (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$. L'ensemble des points critiques de cette application est un germe d'espace analytique. Désignons-le par $\Gamma_z(f)$. On voit sans peine que $\Gamma_z(f)$ est un germe de courbe, i.e. que $\dim \Gamma_z(f) = 1$. Cela ressort par exemple du fait que les points critiques de (f, z) sont ceux de toutes les fonctions de la forme $f - \varepsilon z$ ($\varepsilon \in \mathbf{C}$) et que chacune des fonctions $f - \varepsilon z$ admet (au voisinage de 0 de $\mathbf{C}^n$) un ensemble fini de points critiques.

Définition. La courbe $\Gamma_z(f)$ s'appelle *courbe polaire* de la singularité f par rapport à la fonction linéaire z.

La courbe polaire $\Gamma_z(f)$ peut aussi être décrite d'une façon différente (et équivalente): elle est le lieu de tous les points $x \in \mathbf{C}^n$ en lesquels l'espace tangent à l'ensemble de niveau de la fonction f (passant par le point en question) est parallèle à un hyperplan fixé $\{z = 0\}$, i.e. de tous les points $x \in \mathbf{C}^n$ en lesquels la différentielle df est proportionnelle à la différentielle dz.

Soit $\Gamma_z(f) = \bigcup\limits_i \Gamma_i$ une décomposition du germe de courbe $\Gamma_z(f)$ en composantes irréductibles. Comme nous l'avons dit, les

points critiques de la fonction $(f - \varepsilon z)$ appartiennent à la courbe $\Gamma_z(f)$ pour ε quelconque. Soit μ_i le nombre des points critiques de $f - \varepsilon z$ $(\varepsilon \neq 0)$ (compte tenu de leurs multiplicités) qui appartiennent à la composante Γ_i. Il est évident que $\mu(f) = \sum_i \mu_i$.

Les points critiques des fonctions $f|_{z=\varepsilon}$ (sur les hyperplans $\{z = \varepsilon\} \subset \mathbf{C}^n$) appartiennent eux aussi à la courbe polaire $\Gamma_z(f)$. Soit $\Gamma_i \not\subset \{z = 0\}$, et soit ν_i le nombre des points critiques de $f|_{z=\varepsilon}$ $(\varepsilon \neq 0)$ (compte tenu de leurs multiplicités) qui appartiennent à Γ_i. Si la fonction $f|_{z=0}$ a un point critique isolé en 0, aucune des composantes Γ_i n'appartient à l'hyperplan $\{z = 0\}$ et $\mu(f|_{z=0}) = \sum_i \nu_i$.

Si $\Gamma_i \not\subset \{z = 0\}$, on a $f|_{\Gamma_i} \not\equiv 0$. En effet, si $f|_{\Gamma_i} \equiv 0$, alors $df|_{\Gamma_i} = 0$, $dz|_{\Gamma_i} = 0$, $z|_{\Gamma_i} \equiv 0$. On peut développer f sur Γ_i suivant les puissances (fractionnaires) de z (ce développement coïncide avec le développement de Puiseux de l'image de Γ_i par l'application $(f, z)\colon (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$, voir n° 4.3). Soit $a_i z^{\alpha_i}$ le premier terme du développement, $a_i \neq 0$. On a $\alpha_i > 1$. Cela ressort du fait que les racines de l'équation $f'_z = \varepsilon$ (qui définit les valeurs critiques de $(f - \varepsilon z)$) doivent tendre vers 0 pour $\varepsilon \to 0$. Si $\Gamma_i \cap \subset \{z = 0\}$ (auquel cas la fonction $f|_{z=0}$ admet un point critique non isolé), on a $f|_{\Gamma_i} \equiv 0$. Si tel est le cas, nous poserons $\alpha_i = 1$.

Lemme 5. *Si* $\alpha_i > 1$, *on a* $\mu_i = \nu_i(\alpha_i - 1)$.

Démonstration. Si $\alpha_i > 1$, alors $\Gamma_i \not\subset \{z = 0\}$ et $f = a_i z^{\alpha_i} + \ldots$ $(a_i \neq 0)$. Supposons que la composante Γ_i intervient dans $\Gamma_z(f)$ avec la multiplicité un. Cela signifie que les points critiques de la fonction $f - \varepsilon z$ $(\varepsilon \neq 0)$ appartenant à Γ_i sont non dégénérés. Dans le cas contraire on doit modifier légèrement la démonstration. Ecrivons le développement de Puiseux de l'image de Γ_i par l'application $(f, z)\colon (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ sous la forme

$$z = z(t) = t^k, \quad f = f(t) = a_i t^m + \ldots$$

(série suivant les puissances entières de la variable t), où t est un paramètre uniformisant. On a $\alpha_i = m/k$. μ_i est le nombre des racines (non nulles) de l'équation $f'_t - \varepsilon z'_t$ qui s'annulent pour $\varepsilon \to 0$; ν_i est le nombre des racines de l'équation $z(t) = \varepsilon$. Il est évident que $\mu_i = m - k$, $\nu_i = k$, d'où $\mu_i/\nu_i = (m - k)/k = \alpha_i - 1$, ce qu'il fallait démontrer.

La connaissance de la courbe polaire de la singularité aide à cerner le comportement des points et valeurs critiques sous une déformation de forme spéciale. Soit $F_\varepsilon = f + (z - \varepsilon)^2$ une déformée de la fonction $f + z^2$. Les points critiques de F_ε appartiennent à la courbe polaire $\Gamma_z(f)$ de la singularité f. Considérons les points critiques qui appartiennent à une composante Γ_i et qui s'annulent pour

$\varepsilon \to 0$. On les définit par l'équation $(F_\varepsilon)'_z |_{\Gamma_i} = 0$. Il vient

$$a_i \alpha_i z^{\alpha_i - 1} + 2(z - \varepsilon) + o(z^{\alpha_i - 1}) = 0.$$

Pour $\alpha_i > 2$ il s'ensuit que

$$z = \varepsilon + O(\varepsilon^{\alpha_i - 1}), \quad F_\varepsilon = a_i \varepsilon^{\alpha_i} + o(\varepsilon^{\alpha_i}).$$

Le nombre de tels points critiques est ν_i. Pour $\alpha_i = 2$, $a_i \neq -1$ on a

$$z = \varepsilon/(a_i + 1) + o(\varepsilon), \quad F_\varepsilon = \varepsilon^2 a_i/(a_i + 1) + o(\varepsilon^2).$$

Le nombre de tels points critiques est égal à ν_i comme précédemment. Pour $\alpha_i < 2$ on a en première approximation $f'_z = 2\varepsilon$, ce qui coïncide avec l'équation définissant les points critiques de la fonction $(f - 2\varepsilon z)$. Le nombre de tels points critiques est μ_i. Il vient

$$z = (2\varepsilon/(a_i\alpha_i))^{1/\alpha_i - 1} + \ldots = o(\varepsilon),$$

d'où $F_\varepsilon = \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$. Il en découle le

Lemme 6. *Si $a_i \neq -1$ pour $\alpha_i = 2$, le nombre de Milnor $\mu(f + z^2)$ de la singularité $f + z^2$ est égal à*

$$\sum_{i:\, \alpha_i < 2} \mu_i + \sum_{i:\, \alpha_i \geqslant 2} \nu_i.$$

Corollaire. *On a*

$$\mu(f + z^2) \leqslant \mu(f|_{z=0}); \quad \mu(f + z^2) = \mu(f|_{z=0})$$

si et seulement si $\alpha_i \geqslant 2$ pour i quelconque.

On montre sans peine que si $f \in m^k$, i.e. si le développement taylorien du germe f ne contient aucun terme de degré $< k$, alors, en choisissant une fonction linéaire générique z, on a $\alpha_i \geqslant k$ pour i quelconque.

Pour définir la matrice des intersections de la singularité f, on doit connaître celle de la singularité $(f + z^2)$ dans une base distinguée de forme spéciale. Décrivons cette base. Soit A l'ensemble de toutes les valeurs distinctes des exposants α_i. Du comportement asymptotique des valeurs critiques de la déformée $F_\varepsilon = f + (z - \varepsilon)^2$ de $f + z^2$ décrit avant le lemme 6, il découle que, pour un ε suffisamment petit mais non nul, on peut choisir des nombres positifs r'_α, r''_α pour $\alpha = 2$ et pour $\alpha \in A$, $\alpha > 2$, de telle façon que $r''_\alpha < r'_\beta$ pour $\alpha > \beta$, que les valeurs critiques de F_ε dans les points critiques appartenant à la composante Γ_i avec $\alpha_i = \alpha > 2$ soient contenues dans un anneau $\{u : r'_\alpha < |u| < r''_\alpha\}$ et que les valeurs critiques de F_ε dans les points critiques appartenant à la composante Γ_i avec $\alpha_i = \alpha \leqslant 2$ soient contenues dans un anneau $\{u : r'_2 < |u| < r''_2\}$. Soit $\sigma(r)$ une fonction continue non croissante monotone telle que

$\sigma(r) = \alpha - 1$ pour $r'_\alpha \leqslant r \leqslant r''_\alpha$. Posons $V_m = \{u\colon \arg u + 2\pi\sigma(|u|) \geqslant \pi(2m-1)\}$, où $m = 1, 2, \ldots, -\pi \leqslant \arg u \leqslant \pi$. Supposons que $(-a_i)^{q_i} \notin \mathbf{R}_+$, où $\alpha_i = p_i/q_i$, $(p_i, q_i) = 1$ ($\mathbf{R}_+$ est le demi-axe positif). Dans ce cas les valeurs critiques de F_ε n'appartiennent ni au demi-axe $\mathbf{R}_-$, ni aux frontières des domaines V_m. Considérons un système de chemins joignant les valeurs critiques de F_ε à sa valeur non critique 0 qui définit une base distinguée de cycles évanescents en homologie d'une variété de niveau non singulière de la singularité $f + z^2$. Nous exigeons que tous les chemins du système rencontrent le demi-axe $\mathbf{R}_-$ à l'origine et que tous les chemins issus des valeurs critiques de F_ε appartenant à V_m soient contenus dans V_m. Ce peut être par exemple le système des segments joignant les valeurs critiques de F_ε à l'origine. Un des résultats fondamentaux du travail [117] est le

Théorème 19. *Soit $\{\Delta_j\}$ une base distinguée de cycles évanescents pour la singularité $f + z^2$ définie par le système de chemins décrit. Alors:*

1. *Il existe une base distinguée de cycles évanescents $\{\Delta_j^m\}$ pour la singularité f ayant les indices d'intersection suivants:*

$$(\Delta_j^m \circ \Delta_{j'}^m) = (\Delta_j \circ \Delta_{j'}).$$

$$(\Delta_j^m \circ \Delta_j^{m'}) = (m'-m)^{n-1} \quad pour \quad |m'-m| = 1.$$

$$(\Delta_j^m \circ \Delta_{j'}^{m'}) = (-1)^n (\Delta_j \circ \Delta_{j'}) \quad pour \quad |m'-m| = 1, \quad (m'-m)(j'-j) < 0,$$

$$(\Delta_j^m \circ \Delta_{j'}^{m'}) = 0 \quad pour \quad |m'-m| > 1 \quad ou \quad (m'-m)(j'-j) > 0.$$

Un couple (m, j) est permis (i.e. se fait correspondre un cycle évanescent Δ_j^m) si et seulement si le cycle Δ_j s'évanouit le long d'un chemin contenu dans V_m.

2. *$\Delta_j^m = h_* \Delta_j^{m-1}$ pour $m > 1$, où h_* est l'opérateur de monodromie classique de f.*

3. *La condition pour que (m, j) soit un couple permis se laisse aussi s'énoncer comme suit: pour tout i les μ_i premiers couples de (m, j) sont permis (le cycle Δ_j étant évanescent dans un point critique appartenant à la composante Γ_i de la courbe polaire $\Gamma_z(f)$).*

Une relation analogue existe entre les matrices des intersections des singularités f et $f|_{z=0}$ au cas où $f|_{z=0}$ admet une singularité isolée. La fonction $G_\varepsilon = f|_{z=\varepsilon}$ est une déformée de la singularité $f|_{z=0}$. Les valeurs critiques de G_ε dans les points critiques qui appartiennent à Γ_i sont égales à $a_i\varepsilon^{\alpha_i} + o(\varepsilon^{\alpha_i})$ pour $\varepsilon \to 0$. On peut donc, pour tout ε suffisamment petit, choisir des nombres positifs r'_α, r''_α pour tous $\alpha \in A$ de telle façon que $r'_\alpha < r''_\alpha$ pour tous $\alpha \in A$, que $r''_\alpha < r'_\beta$ pour $\alpha > \beta$ et que les valeurs critiques de G_ε dans les

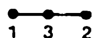
points critiques appartenant à la courbe Γ_i avec $\alpha_i = \alpha$ soient contenues dans un anneau $\{u: r'_\alpha < |u| < r''_\alpha\}$. Définissons la fonction $\sigma(r)$, les domaines V_m et le système de chemins joignant les valeurs critiques de G_ε à sa valeur non critique 0 en parfaite analogie avec la fonction F_ε, à ceci près que l'on prend en compte cette fois-ci tous les $\alpha \in A$ et non seulement les $\alpha \geqslant 2$ comme précédemment. Soit $\{\widetilde{\Delta}'_j\}$ une base distinguée de cycles évanescents pour la singularité $f|_{z=0}$ définie par le système de chemins décrit, et soit $\{\widetilde{\Delta}_j\}$ une base distinguée correspondante de cycles évanescents (définie par le même système de chemins) pour la singularité $f|_{z=0} + z^2$ stablement équivalente à $f|_{z=0}$. La relation entre les matrices des intersections de $f|_{z=0}$ et de $f|_{z=0} + z^2$ dans les bases distinguées $\{\widetilde{\Delta}'_j\}$ et $\{\widetilde{\Delta}_j\}$ respectivement est décrite dans le théorème 14 du n° 2.8.

Théorème 20. *Supposons que le germe $f|_{z=0}$ admette une singularité isolée en 0. On peut alors remplacer, dans le théorème* 19, *la singularité $f + z^2$ et la base distinguée de cycles évanescents $\{\Delta_j\}$ par $f|_{z=0} + z^2$ et $\{\widetilde{\Delta}_j\}$ respectivement.*

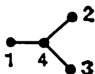
Le théorème 20 ramène le calcul de la matrice des intersections de la singularité f d'une fonction de n variables à celui de la matrice des intersections de la singularité $f|_{z=0}$ d'une fonction de $(n-1)$ variables dans une base distinguée de forme spéciale et des exposants α_i pour les composantes Γ_i de la courbe polaire $\Gamma_z(f)$. Dans le tableau ci-après sont résumés les résultats de calcul pour la plupart des singularités de la Première partie, § 15. Ici la matrice des intersections de la singularité $f|_{z=0}$ dans la base distinguée $\{\widetilde{\Delta}'_j\}$, donc aussi celle de la singularité $f|_{z=0} + z^2$ dans la base distinguée $\{\widetilde{\Delta}_j\}$, est définie par l'un des diagrammes de Dynkine suivants:



pour la singularité f des séries J et E;



pour la singularité f des séries X, Y, Z et W;



pour la singularité f des séries Q, S, T et U.

Dans la deuxième colonne du tableau figurent les nombres $M_1, \ldots, M_{\mu'}$ ($\mu' = \mu(f|_{z=0})$), où l'entier naturel M_j est défini par la présence, dans la base distinguée $\{\Delta_j^m\}$ de la singularité f, de cycles Δ_j^m tels que $1 \leqslant m \leqslant M_j$.

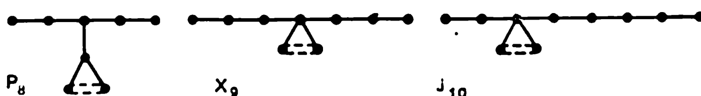
Pour les singularités de corang 2 (i.e. pour les singularités des séries J, E, X, Y, Z et W), on établit facilement des diagrammes analogues par les méthodes du § 4.

Nom	$M_1, \ldots, M_{\mu'}$
$J_{k,i}$	$3k+i-1,\ 3k-1$
E_{6k}	$3k,\ 3k$
E_{6k+1}	$3k+1,\ 3k$
E_{6k+2}	$3k+1,\ 3k+1$
$X_{k,p}$	$4k-1,\ 4k-1,\ 4k+p-1$
$Y^k_{r,s}$	$4k+r-1,\ 4k+s-1,\ 4k-1$
$Z^k_{i,p}$	$4k-1,\ 4k+3i-p-1,\ 4k+3i-1$
$Z^k_{12k+6i-1}$	$4k+3i,\ 4k-1,\ 4k+3i$
Z^k_{12k+6i}	$4k+3i+1,\ 4k-1,\ 4k+3i$
$Z^k_{12k+6i+1}$	$4k+3i+1,\ 4k-1,\ 4k+3i+1$
W_{12k}	$4k,\ 4k,\ 4k$
W_{12k+1}	$4k+1,\ 4k,\ 4k$
$W_{k,i}$	$4k+1,\ 4k+1,\ 4k+i+1$
$W^{\#}_{k,2q-1}$	$4k+\ \ +1,\ 4k+q,\ 4k+1$
$W^{\#}_{k,2q}$	$4k+q+1,\ 4k+q+1,\ 4k+1$
W_{12k+5}	$4k+2,\ 4k+1,\ 4k+2$
W_{12k+6}	$4k+2,\ 4k+2,\ 4k+2$
$Q_{k,i}$	$2,\ 2,\ 3k-1,\ 3k+i-1$
Q_{6k+4}	$2,\ 2,\ 3k,\ 3k$
Q_{6k+5}	$2,\ 2,\ 3k+1,\ 3k$
Q_{6k+6}	$2,\ 2,\ 3k+1,\ 3k+1$
S_{12k-1}	$2,\ 4k-1,\ 4k-1,\ 4k-1$
S_{12k}	$2,\ 4k,\ 4k-1,\ 4k-1$
$S_{k,i}$	$2,\ 4k,\ 4k,\ 4k+i$
$S^{\#}_{k,2q-1}$	$2,\ 4k+q,\ 4k+q-1,\ 4k$
$S^{\#}_{k,2q}$	$2,\ 4k+q,\ 4k+q,\ 4k$
S_{12k+4}	$2,\ 4k+1,\ 4k,\ 4k+1$
S_{12k+5}	$2,\ 4k+1,\ 4k+1,\ 4k+1$
$T_{p,q,r}$	$p-1,\ q-1,\ r-1,\ 2$
U_{12k}	$3k,\ 3k,\ 3k,\ 3k$
$U_{k,2q-1}$	$3k+q,\ 3k+q,\ 3k,\ 3k+1$
$U_{k,2q}$ $(q>0)$	$3k+q+1,\ 3k+q,\ 3k,\ 3k+1$
U_{12k+4}	$3k+1,\ 3k+1,\ 3k+1,\ 3k+1$

3.8. Formes d'intersection des singularités unimodales et bimodales. Au § 15 de la Première partie, nous donnons une classification des singularités unimodales et bimodales de fonctions. Dans ce n° nous citerons des résultats sur leurs formes quadratiques.

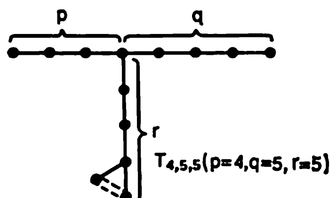
Les diagrammes de Dynkine des singularités unimodales et leurs groupes de monodromie ont été calculés par A. Gabrielov [116]. On peut les déduire à l'aide des résultats du n° 3.7. Désignons par μ_+, μ_0 et μ_- les indices d'inertie positif, nul et négatif de la forme quadratique de la singularité, i.e. le nombre d'éléments positifs, nuls et négatifs dans la diagonalisation de la forme d'intersection d'une singularité stablement équivalente à la singularité donnée et dépendant de $n \equiv 3 \bmod 4$ variables ($\mu_+ + \mu_0 + \mu_- = \mu$).

Théorème 21. *Les diagrammes de Dynkine des singularités paraboliques P_8, X_9 et J_{10} se présentent en certaines bases faiblement distinguées sous la forme*



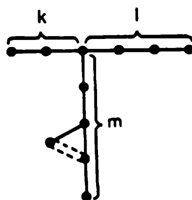
Pour ces singularités on a $\mu_+ = 0$, $\mu_0 = 2$

Les diagrammes de Dynkine des singularités hyperboliques $T_{p\,q,r}$ sont de la forme



Pour ces singularités $\mu_+ = \mu_0 = 1$.

Les diagrammes de Dynkine des quatorze singularités unimodales exceptionnelles sont de la forme



Ici (k, l, m) *sont les nombres de Gabrielov de la singularité* (voir Première partie, introduction au chap. II), $\mu = k + l + m$. *Pour ces singularités* $\mu_+ = 2$, $\mu_0 = 0$.

Entre les nombres de Gabrielov (NG) et les nombres de Dolgatchev (ND) (voir Première partie, introduction au chap. II) des singularités unimodales exceptionnelles il existe une « dualité étrange », à savoir: les NG de toute singularité coïncident avec les ND d'une singularité (en général, distincte de la première), tandis que les NG de cette dernière coïncident avec les ND de la première. Cette dualité a été expliquée par I. Dolgatchev [95] et H. Pinkham [279]. Il se trouve que les ND d'une singularité unimodale quasi homogène sont, dans un sens à préciser, ses NG à l'infini, et inversement.

Les formes quadratiques et les diagrammes de Dynkine des singularités bimodales de deux variables et leurs indices d'inertie s'obtiennent aisément par les méthodes du § 4. A. Gabrielov a établi les diagrammes de Dynkine des singularités bimodales de trois variables (voir nº 3.7), mais ils se prêtent mal aux calculs, par exemple au calcul des indices d'inertie de leurs formes quadratiques. On peut obtenir les indices d'inertie des formes quadratiques d'une singularité bimodale quelconque à l'aide de deux résultats généraux dus à J. Steenbrink. Un de ces résultats permet de calculer les indices d'inertie des formes quadratiques pour les singularités quasi homogènes.

Soit $f\colon (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ $(n \equiv 3 \bmod 4)$ une singularité quasi homogène de poids $w_1, \ldots, w_n$ et de degré 1 (i.e. $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{\beta_1 \ldots \beta_n} x_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$, où $\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i = 1$) ayant un point critique isolé en 0. Posons $l(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1) w_i$ $(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$. Supposons que les monômes $x^{\alpha^{(j)}}$ $(j = 1, 2, \ldots, \mu)$ engendrent une base d'anneau local $J = {}_n\mathcal{O}/(\partial f/\partial x_i)$ de la singularité f. Désignons par $[c]$ la partie entière de c.

Théorème 22 ([333]):

μ_+ *est le nombre des* $\alpha^{(j)}$ *tels que* $l(\alpha^{(j)}) \notin Z$, $[l(\alpha^{(j)})]$ *est pair*;
μ_- *est le nombre des* $\alpha^{(j)}$ *tels que* $l(\alpha^{(j)}) \notin Z$, $[l(\alpha^{(j)})]$ *est impair*;
μ_0 *est le nombre des* $\alpha^{(j)}$ *tels que* $l(\alpha^{(j)}) \in Z$.

Cette proposition est connue sous le nom d'hypothèse de V. Arnold (voir [147]).

Certaines singularités bimodales (mais pas toutes) admettent des représentants quasi homogènes. Pour ces singularités le théorème 22 donne $\mu_+ = 2$, $\mu_0 = 0$. Pour le calcul des indices d'inertie des formes quadratiques des autres singularités bimodales, on utilise les résultats suivants:

Théorème 23 ([348]). *Soit $f_t(x)$ une déformation continue de f_0: $(C^n, 0) \to (C, 0)$ $(t \in [0, 1])$, est soit $\mu(f_0) = \mu$, $\mu(f_t) = \mu'$ pour $0 < t \leqslant 1$. Alors $\mu \geqslant \mu'$ et le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_{t,\lambda}; Z)$ d'un ensemble de niveau non singulier $V_{t,\lambda}$ du germe de fonction f_t au voisinage de* 0 *admet un plongement naturel dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_{0,\lambda}; Z)$ d'un ensemble de niveau non singulier $V_{0,\lambda}$ du germe f_0. La base distinguée de $H_{n-1}(V_{t,\lambda}; Z)$ se prolonge alors à la base distinguée de $H_{n-1}(V_{0,\lambda}; Z)$.*

Théorème 24 ([332]). *Pour toute singularité la somme $\mu_+ + \mu_0$ est paire.*

De ces résultats on déduit le

Théorème 25. *Les formes quadratiques de toutes les singularités bimodales ont les indices d'inertie suivants: $\mu_+ = 2$, $\mu_0 = 0$.*

§ 4. Matrices des intersections des singularités des fonctions de deux variables

La méthode de calcul des matrices des intersections des singularités des fonctions de deux variables décrite dans ce paragraphe appartient à S. Goussein-Zadé ([144, 145]) et à N. A'Campo ([4, 5]). Elle est applicable à toute singularité de deux variables. Cette méthode simplifie remarquablement de nombreux calculs portant sur la forme quadratique de la singularité (par exemple, le calcul de sa signature).

4.1. Matrices des intersections des singularités réelles. La matrice des intersections d'une singularité réelle d'une fonction de deux variables f peut être déterminée d'après la courbe (réelle) de niveau nul d'une certaine déformée $\tilde{f}$ de f.

Soit $f(x, y)$ germe d'une fonction réelle (i.e. prenant des valeurs réelles sur $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{C}^2$) holomorphe $(\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ ayant en 0 un point critique isolé (dans l'espace $\mathbf{C}^2$). Supposons que f admet une déformée réelle $\tilde{f}$ telle que tous ses points critiques (résultant de la décomposition du point critique 0 de f) soient réels et non dégénérés et que les valeurs de $\tilde{f}$ en tout point selle soient nulles. On voit alors sans peine que les valeurs de $\tilde{f}$ sont négatives en tout point minimum et positives en tout point maximum. Si une telle déformée existe, on peut déterminer la matrice des intersections de la singularité f d'après la courbe réelle $\{\tilde{f}(x, y) = 0\}$ dans le plan $\mathbf{R}^2$.

Nous aurons besoin de quelques définitions. Soit dans un disque (ouvert) D du plan $\mathbf{R}^2$ une courbe l (fermée au sens topologique)

n'ayant comme singularités que des self-intersections doubles ordinaires en nombre fini et approchant transversalement la frontière de D. Nous allons associer à la courbe l des formes bilinéaires entières, une symétrique et une alternée, sur le réseau, d'après les règles qui vont suivre.

Chaque composante connexe du complémentaire de l est un polygone curviligne, dont certains couples de sommets peuvent coïncider (comme sur la figure 32). Partageons l'ensemble des composantes du complémentaire de l en deux classes (première et seconde), en rapportant aux classes différentes deux composantes ayant un côté en commun. Une telle répartition en deux classes est possible et unique, à la permutation des classes près. Associons à chaque point de self-intersection p_j de l un générateur formel Δ_j^1, à chaque composante relativement compacte dans D (i.e. sans point commun avec le complémentaire de D) du complémentaire de l de la première classe (U_i^0) un générateur formel Δ_i^0, et de la seconde classe (U_k^2) un générateur formel Δ_k^2. Désignons par $n_{10}(j, i)$ (resp. $n_{21}(k, j)$) le nombre des sommets du polygone curviligne U_i^0 (resp. U_k^2) qui coïncident avec le point p_j. Les $n_{10}(j, i)$ et $n_{21}(k, j)$ peuvent prendre les valeurs 0, 1 ou 2. Désignons par $n_{20}(k, i)$ le nombre des côtés communs des polygones curvilignes U_k^2 et U_i^0. Par exemple, sur la figure 32 on a $n_{20} = 1$, $n_{10} = 2$, $n_{21} = 1$ ($i = j = k = 1$).

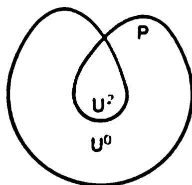


Fig. 32

Construisons un réseau d'entiers sur les générateurs $\{\Delta_m^\sigma\}$ et considérons la base Δ_k^2, Δ_j^1, Δ_i^0 comme base distinguée de ce réseau (l'ordre des éléments Δ_m^σ de même σ est sans importance). Quant à la répartition en deux classes des composantes du complémentaire de l, elle ne sert qu'à fixer un ordre des éléments Δ_m^σ dans la base distinguée.

Définition. La *forme quadratique associée à la courbe l* est définie par le tableau suivant des produits scalaires des générateurs :

$$(\Delta_m^\sigma \circ \Delta_{m'}^\sigma) = -2\delta_{mm'}, \qquad (\Delta_i^0 \circ \Delta_j^1) = n_{10}(j, i),$$
$$(\Delta_j^1 \circ \Delta_k^2) = n_{21}(k, j), \qquad (\Delta_i^0 \circ \Delta_k^2) = -n_{20}(k, i).$$

Définition. La *forme bilinéaire alternée associée à la courbe l* est définie par le tableau suivant des produits scalaires des générateurs :

$$(\Delta_m^\sigma \circ \Delta_{m'}^\sigma) = 0, \qquad (\Delta_j^1 \circ \Delta_i^0) = n_{10}(j, i),$$
$$(\Delta_k^2 \circ \Delta_j^1) = n_{21}(k, j), \qquad (\Delta_i^0 \circ \Delta_k^2) = n_{20}(k, i)$$

(le produit scalaire change de signe quand on permute les arguments).

On appellera diagramme de Dynkine (ou D-diagramme) de la

courbe l le diagramme de Dynkine de la forme quadratique associée à l. Ses sommets correspondent aux self-intersections de la courbe l et aux composantes du complémentaire de l relativement compactes dans D. Les sommets sont reliés dans l'ordre défini par le tableau des indices d'intersection. Par exemple, le diagramme de la figure 33 est le diagramme de Dynkine de la courbe représentée sur la figure 32 (remarquons qu'il ne caractérise aucune singularité).

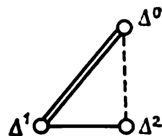


Fig. 33

Soit $\tilde{f}$ une déformée de f vérifiant, rappelons-le, les conditions suivantes : tous les points critiques de $\tilde{f}$ (engendrés par la décomposition de la singularité f) sont réels et les valeurs de $\tilde{f}$ sont nulles en tout point selle. La courbe réelle $\{\tilde{f} = 0\}$ n'admet alors (dans un petit disque D centré en 0) que des self-intersections doubles ordinaires. Toute composante du complémentaire de cette courbe sera rapportée à la première classe si la valeur de $\tilde{f}$ est négative sur cette composante, et à la seconde classe dans le cas contraire. Les valeurs critiques de la fonction $\tilde{f}(x, y)$ (ou, ce qui revient au même, de la fonction de trois variables $\tilde{f}(x, y) + t^2$) sont situées par hypothèse sur l'axe réel du plan $\mathbf{C}$ des valeurs de $\tilde{f}$. Choisissons un z_0 tel que $\operatorname{Im} z_0 > 0$ et fixons un système de chemins joignant la valeur non critique z_0 aux valeurs critiques de $\tilde{f}$ en spécifiant que ces chemins soient entièrement contenus dans le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} z > 0$ à l'exception de leurs extrémités qui se confondent avec les valeurs critiques. Remarquons que les points critiques de $\tilde{f}$ sont en bijection avec les self-intersections de la courbe réelle $\{\tilde{f} = 0\}$ et les composantes relativement compactes de son complémentaire, car toute composante de ce type admet exactement un point critique (maximum ou minimum) de $\tilde{f}$. Par le choix du système de chemins, nous définissons les bases distinguées des cycles évanescents dans les homologies des variétés de niveau non singulières des singularités $f(x, y)$ et de $f(x, y) + t^2$. Ces bases seront désignées elles aussi par $\{\Delta_m^\sigma\}$. Remarquons que les cycles Δ_j^1 sont évanescents dans les points selle p_j de la fonction $\tilde{f}$, les cycles Δ_i^0 dans les points minimum appartenant aux composantes U_i^0 et les cycles Δ_k^2 dans les points maximum appartenant aux composantes U_k^2.

Théorème 1. *La forme d'intersection en homologie d'une variété de niveau non singulière de la singularité $f(x, y)$ dans la base distinguée décrite $\{\Delta_m^\sigma\}$ se confond avec la forme bilinéaire alternée associée à la*

courbe réelle $\{\tilde{f} = 0\}$, et la forme d'intersection de la singularité de trois variables $f(x, y) + t^2$, avec la forme quadratique associée à la même courbe.

Exemples. 1) Soit $f(x, y) = x^m + y^n$. La multiplicité de cette singularité est $(m-1)(n-1)$. Posons $\tilde{f}(x, y) = \lambda^{mn}\left(T_m(\lambda^{-n}x) + 2^{n-m}T_n\left(\lambda^{-m}2^{\frac{m-n}{n}}y\right)\right)$. Ici $T_n(x) = 2^{1-n}\cos(n\cdot\arccos x)$ sont des polynômes de Tchébychev. On voit sans peine que la déformée

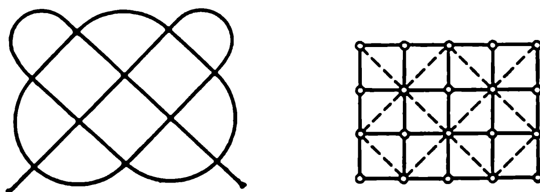


Fig. 34

$\tilde{f}$ de f vérifie les conditions du théorème 1. La courbe $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \tilde{f}(x, y) = 0\}$ et son diagramme de Dynkine sont montrés sur la figure 34 ($m = 6$, $n = 5$). Pour $m = k + 1$ et $n = 2$ on obtient, de même qu'au n° 2.9, le diagramme de Dynkine classique de A_k mais avec un ordre des sommets différent.

2) $f(x, y) = x(x^{k-2} - y^2)$, singularité du type D_k, $k \geqslant 4$. Sa multiplicité est k. On choisit sans difficulté une déformée $\tilde{f}$ de f ayant la courbe de niveau nul comme représenté (pour $k = 9$) sur la figure 35 (il suffit de prendre une déformée de la fonction $x^{k-2} - y^2$ analogue à celle de l'exemple précédent et de la multiplier par $(x - 2\lambda^2)$). Son diagramme de Dynkine est le diagramme classique de D_k.

3) $f(x, y) = x^3 + xy^3 = x(x^2 + y^3)$, singularité du type E_7. Sa déformée vérifiant les conditions du théorème 1 est $\tilde{f}(x, y) = (x + \lambda^{3/2}/3)(x^2 + y^3 - \lambda^2 y - 2\lambda^3/3\sqrt{3})$. La courbe $\{\tilde{f} = 0\}$ et son diagramme de Dynkine sont montrés sur la figure 36.

Un inconvénient du théorème 1 est qu'il est généralement assez difficile de choisir une déformée $\tilde{f}$ conforme aux conditions du théorème. En outre, dans le cas des singularités E_6 $(x^3 + y^4)$, E_7 et E_8 $(x^3 + y^5)$ par exemple, le choix le plus naturel des déformées donne lieu à des diagrammes non classiques qui donc demandent à être transformés. Il est alors plus facile de chercher non pas une déformée de la fonction mais une déformée de sa courbe de niveau nul. La procédure correspondante sera décrite dans les n^{os} suivants. Le

résultat ci-après permet d'éliminer dans une certaine mesure le deuxième inconvénient.

Soit l la même courbe que précédemment. Abstraction faite des self-intersections, elle se compose de quelques cercles et intervalles. Autrement dit, il existe une application propre non dégénérée $\chi: L \to D$ d'une variété différentiable L de dimension 1 dans un disque D, telle que $\mathrm{Im}\ \chi = l$ et que χ soit une application bijective de L sur l partout sauf en les points singuliers (self-intersections) de l. Soit $\chi_t: L \to D$ ($t \in [0, 1]$) une homotopie de χ ($\chi = \chi_0$) dans la classe

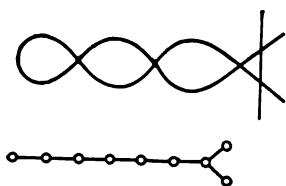


Fig. 35

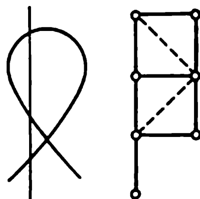


Fig. 36



Fig. 37

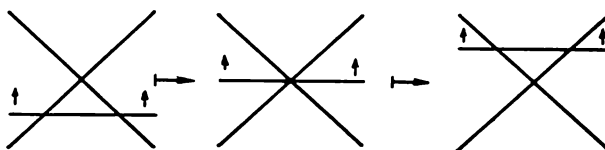


Fig. 38

des applications propres non dégénérées, constantes sur l'image réciproque du voisinage de la frontière de D. Si χ_t est une homotopie générique, le type de la courbe $\mathrm{Im}\ \chi_t$ (considérée comme sous-variété différentiable de dimension 1 du cercle D à self-intersections ordinaires) changera quand le paramètre t prendra un nombre fini de valeurs. La courbe subit des métamorphoses, ou chirurgies, de trois types :

1) deux points de self-intersection de la courbe $\mathrm{Im}\ \chi_t$ fusionnent et disparaissent (fig. 37 ; le paramètre prenant une valeur exceptionnelle, il se produit un simple contact des deux branches de la courbe $\mathrm{Im}\ \chi_t$) ;

2) on voit apparaître deux nouveaux points de self-intersection (ce type de métamorphose est l'inverse du précédent quand on

change le sens de variation du paramètre t);

3) trois points de self-intersection de Im χ_t fusionnent, puis s'écartent (fig. 38; le paramètre prenant une valeur exceptionnelle, on voit apparaître sur la courbe un point triple).

La condition de non-dégénérescence de χ_t (non-nullité de sa différentielle) interdit toute autre chirurgie de codimension 1. Les deux premiers types de chirurgies ne préservent pas le nombre total des points de self-intersection de la courbe Im χ_t, ce qui entraîne le changement de la dimension du réseau d'entiers associé à cette courbe. Le troisième type de chirurgie conserve la dimension du réseau et aussi la forme bilinéaire associée à Im χ_t: seule change la base dans le réseau sur lequel cette forme est définie.

Définition. On dit que l'homotopie χ_t est *permise* si, quel que soit le paramètre $t \in [0, 1]$, il n'existe de points $h_1 \neq h_2$ de L tels que $\chi_t(h_1) = \chi_t(h_2)$, Im $d\chi_t(h_1) =$ Im $d\chi_t(h_2)$ ($d\chi_t =$ différentielle de l'application χ_t) et si en outre la courbe Im χ_1 n'admet que des self-intersections doubles ordinaires.

On montre qu'une homotopie permise est celle pour laquelle la courbe Im χ_t ne subit que des chirurgies du troisième type (et $t = 1$ n'est pas une valeur exceptionnelle du paramètre, i.e. n'entraîne aucune chirurgie). Si χ_t est une homotopie permise, les courbes Im $\chi_0 = l$ et Im χ_1 ont même nombre de self-intersections (et même nombre de composantes du complémentaire). Les réseaux d'entiers correspondant à ces courbes ont donc même dimension.

Théorème 2. *Soit* $\chi_t: L \to D$ *une homotopie permise. Alors les formes bilinéaires symétrique et alternée associées à la courbe* Im χ_1 *se laissent déduire des formes associées à la courbe* Im $\chi_0 = l$ *moyennant un changement de la base distinguée.*

Pour la démonstration, on peut exhiber un changement de base correspondant à une chirurgie du troisième type sur Im χ_t. Seuls seront transformés quatre cycles évanescents correspondant aux trois points de self-intersection de Im χ_t, qui fusionnent à la suite de cette chirurgie, et à un triangle curviligne ayant ses sommets dans ces points, composante connexe du complémentaire de la courbe Im χ_t. On peut décrire explicitement un tel changement de base dans un exemple où l'homotopie correspondante χ_t se réalise comme déploiement de la déformée $\tilde{f}$ de la singularité (par exemple, pour $\tilde{f}_t(x, t) = x \cdot y \cdot (x + y + t)$; $t = 0$ est une valeur exceptionnelle du paramètre). Les systèmes de chemins définissant dans ce cas les bases distinguées sont décrits avant le théorème 1. En laissant sortir t dans le domaine complexe et en faisant un demi-tour autour de la valeur exceptionnelle $t = 0$, on suit la transformation du système de chemins correspondant.

Soit $t = t_0$ la valeur du paramètre pour laquelle la courbe Im χ_t

subit une métamorphose du troisième type. Pour fixer les idées, admettons que pour $t < t_0$ le triangle ayant ses sommets dans les trois points fusionnants se rapporte à la première classe des composantes du complémentaire de la courbe Im χ_t (c'est la classe des composantes sur lesquelles la déformée $\tilde{f}$ reste négative). Pour $t > t_0$ le triangle analogue se rapporte à la seconde classe. Soient Δ_m, Δ_{m+1}, Δ_{m+2} les cycles évanescents correspondant aux trois points de self-intersection, et Δ_{m+3} le cycle correspondant au triangle ayant ses sommets

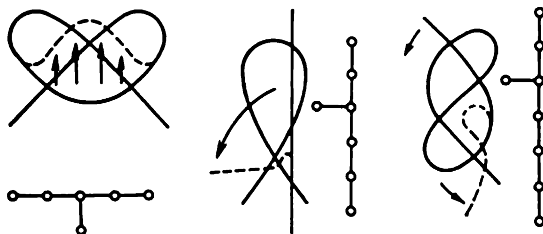


Fig. 39

en ces points. Alors la suite des opérations β_{m+3}, β_{m+2}, β_{m+1}, β_{m+1}, β_{m+2}, β_{m+3}, β_{m+3}, β_{m+2}, β_{m+1} est équivalente à la métamorphose considérée de la courbe Im χ_t.

Comme exemple d'application du théorème 2, on montre sur la figure 39 la réduction à la forme classique par l'homotopie permise des diagrammes de Dynkine des singularités E_6 $(x^3 + y^4)$, E_7 $(x^3 + xy^3)$ et E_8 $(x^3 + y^5)$ (voir exemples 1 et 3).

La démonstration du théorème 12 du n° 3.6 est donc achevée.

Légèrement modifiée, la méthode décrite de calcul de la matrice des intersections de la singularité de deux variables s'applique aux singularités de bord (voir Première partie, n° 17.4); on montre que les diagrammes de Dynkine des singularités B_k, C_k et F_4 sont des diagrammes classiques des algèbres de Lie correspondantes, tandis que leurs groupes de monodromie (pour un nombre impair de variables) sont les groupes de Weyl classiques correspondants (n° 5.2).

4.2. Germes de courbes complexes et singularités des fonctions de deux variables. Soit f: $(\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe qui admet un point critique isolé en 0. Le germe de courbe $M(f) = \{\bar{x} \in \mathbf{C}^2 : f(\bar{x}) = 0\}$ peut être réductible. Soit $M(f) = \bigcup_{i=1}^{r} M_i$ sa représentation sous la forme d'une réunion de r composantes irréductibles. Pour chacun des germes de courbes complexes irréductibles M_i, il existe un germe d'application φ_i: $(\mathbf{C}_i, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ (l'uniformisation) tel que Im $\varphi_i = M_i$ et φ est un iso-

morphisme des courbes $\mathbf{C}_i$ et M_i partout sauf en 0. Le germe φ_i est défini au germe près de l'isomorphisme holomorphe $(\mathbf{C}_i, 0) \to (\mathbf{C}_i, 0)$ (changement du paramètre d'uniformisation). Pour de petites déformées $\tilde{\varphi}_i$ des applications génériques φ_i, la courbe complexe $\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Im} \tilde{\varphi}_i$ (au voisinage de 0) n'admet comme singularités que des points doubles ordinaires. Leur nombre, qui est bien sûr indépendant du choix des déformées, sera désigné par $s = s\{\varphi_i\} = s(f)$.

Lemme 1. *La multiplicité de la singularité f est égale à* $\mu(f) = 2s(f) - (r - 1)$.

La proposition suivante permet de réduire le calcul de la matrice des intersections d'une singularité arbitraire d'une fonction de deux variables au cas d'une singularité réelle.

Théorème 3. *Pour toute collection de germes d'applications* $\{\varphi_i\}$ $(\varphi_i : (\mathbf{C}_i, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$, φ_i *associe bijectivement* $\mathbf{C}_i$ *à son image*, $\operatorname{Im} \varphi_i \neq \operatorname{Im} \varphi_j$ *pour* $i \neq j)$, *il existe une collection de germes réels d'applications* $\{\psi_i\}$ *appartenant à la même composante connexe de l'ensemble* $s = \text{Cte}$ *dans l'espace de toutes les familles de r applications* $(\mathbf{C}_i, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ *que* $\{\varphi_i\}$.

Les applications (ou courbes) $\{\varphi_i\}$ et $\{\psi_i\}$ ont alors mêmes couples de Puiseux et mêmes ordres des contacts deux à deux, ce qui fournit le moyen de construire les applications $\{\psi_i\}$.

Corollaire. *Pour toute singularité d'une fonction de deux variables, il existe une singularité réelle qui appartient à la même composante connexe de l'ensemble* $\mu = \text{Cte}$ *dans l'espace de tous les germes de fonctions* $(\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ *et qui a donc la même matrice des intersections*

Cette proposition n'est pas démontrée pour les singularités d'un plus grand nombre de variables.

Si toutes les applications φ_i sont réelles et admettent des déformées réelles $\tilde{\varphi}_i$ telles que la courbe $\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Im} \tilde{\varphi}_i$ n'a que des points doubles ordinaires et que tous ces s points sont réels, alors le diagramme de Dynkine de la courbe réelle $\left(\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Im} \tilde{\varphi}_i\right) \cap \mathbf{R}^2$ est le diagramme de Dynkine de la singularité f qui correspond à la collection d'applications $\{\varphi_i \mid i = 1, \ldots, r\}$. Cela ressort du fait que la déformée $\tilde{f}$ de f correspondant à la déformée $\{\tilde{\varphi}_i\}$ de la collection d'applications $\{\varphi_i\}$ est conforme aux conditions du théorème 1 (n° 4.1).

Théorème 4. *Pour toute collection de germes d'applications réelles* $\{\varphi_i\}$ $(\varphi_i : (\mathbf{C}_i, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0))$ *il existe des déformées réelles* $\{\tilde{\varphi}_i\}$ *pour*

lesquelles la courbe $\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Im} \tilde{\varphi}_i$ *n'a que des points doubles ordinaires qui sont tous réels.*

Remarquons que les deux démonstrations connues de ce théorème ont un caractère constructif, i.e. permettent de construire les déformées en question. Au n° 4.3 nous décrirons un moyen de construction, qui est le plus facile à comprendre sans toutefois être le plus efficace.

Il ressort du théorème 4 que si $f: (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ est une singularité réelle telle que la courbe $\{f = 0\}$ est réelle (i.e. que toutes ses composantes irréductibles sont réelles), alors f admet une déformée réelle $\tilde{f}$ conforme aux conditions du théorème 1, i.e. n'ayant que des points critiques réels non dégénérés avec les mêmes valeurs critiques en tout point selle.

Ce résultat se démontre d'une façon presque analogue pour toute singularité réelle de deux variables.

4.3. Résolution des singularités de fonctions de deux variables et construction de leurs déformées réelles. La résolution de la singularité d'une fonction $f: (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ (ou d'une courbe $\{(x, y): f(x, y) = 0\}$) peut être réalisée par une suite d'éclatements.

Considérons un espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^n$ et son point 0. Un *éclatement* de centre en 0 est une application $\sigma: \Pi^n \to \mathbf{C}^n$ d'une variété complexe Π^n de dimension n telle que:

σ est un isomorphisme analytique en dehors de l'image réciproque du point $0 \in \mathbf{C}^n$;

l'image réciproque $\sigma^{-1}(0)$ du point 0 est un espace complexe CP^{n-1} de dimension $(n-1)$ (le complété projectif de $\mathbf{C}^n$) collé au complémentaire $\Pi^n - \sigma^{-1}(0) \approx \mathbf{C}^n - 0$ de telle façon que la droite dans $\mathbf{C}^n$ passant par 0 soit adjacente au point du complété projectif CP^{n-1} de $\mathbf{C}^n$ qui lui correspond.

On obtient donc la variété Π^n à partir de l'espace $\mathbf{C}^n$ en collant l'espace projectif CP^{n-1} de dimension $(n-1)$ à la place du point 0.

Un éclatement de centre en 0 de $\mathbf{C}^n$ peut être décrit comme suit. Soit $(\mathbf{C}^n - 0) \to CP^{n-1}$ une application de complétion projective qui à tout vecteur non nul de $\mathbf{C}^n$ associe une droite engendrée par ce vecteur. Considérons le graphe de cette application comme un sous-espace du produit $\mathbf{C}^n \times CP^{n-1}$. Ce n'est pas une sous-variété fermée de l'espace $\mathbf{C}^n \times CP^{n-1}$. On montre cependant que son adhérence Π^n est une sous-variété fermée non singulière de dimension n du produit $\mathbf{C}^n \times CP^{n-1}$. La projection canonique $\Pi^n \hookrightarrow \mathbf{C}^n \times CP^{n-1} \to \mathbf{C}^n$ est une bijection partout sauf en 0 de $\mathbf{C}^n$. Le point 0 a comme image réciproque l'espace projectif $0 \times CP^{n-1}$. L'application $\Pi^n \to \mathbf{C}^n$ est un éclatement de centre en 0 de $\mathbf{C}^n$.

On peut aussi décrire la variété Π^n d'une autre façon, au moyen de coordonnées. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des coordonnées dans l'espace $\mathbf{C}^n$,

et $u_1 : \ldots : u_n$ les coordonnées homogènes correspondantes dans l'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^{n-1}$. Soit Π^n un sous-espace dans le produit $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}P^{n-1}$ défini par les équations $x_i u_j = u_i x_j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n$, $(u_1 : \ldots : u_n) \in \mathbf{C}P^{n-1}$. On montrera plus tard que Π^n est une variété de dimension n. Soit $\sigma : \Pi^n \hookrightarrow \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}P^{n-1} \to \mathbf{C}^n$ la projection sur le premier facteur. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, l'image réciproque $\sigma^{-1}(x)$ de $x \in \mathbf{C}^n$ se réduit à un point unique $(x_1, \ldots, x_n ; x_1 : \ldots : x_n)$. L'application σ définit donc un isomorphisme $\Pi^n - \sigma^{-1}(0) \to \mathbf{C}^n - 0$ partout sauf l'image réciproque de $0 \in \mathbf{C}^n$. Le point $0 \in \mathbf{C}^n$ admet comme image réciproque l'espace $0 \times \mathbf{C}P^{n-1}$ isomorphe à l'espace projectif $\mathbf{C}P^{n-1}$.

Soit L la droite dans $\mathbf{C}^n$ qui passe par les points 0 et $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Elle est constituée de points de la forme $(tx_1^0, \ldots, tx_n^0)$ $(t \in \mathbf{C})$. L'image réciproque $\sigma^{-1}(L - 0)$ de la droite L privée de son point 0 est la réunion des points de la forme $(tx_1^0, \ldots, tx_n^0 ; x_1^0 : \ldots : x_n^0)$ $(t \neq 0)$ appartenant au produit $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}P^{n-1}$. L'espace $\sigma^{-1}(L - 0)$ a donc comme adhérence la droite $\{(tx_1^0, \ldots, tx_n^0 ; x_1^0 : \ldots : x_n^0)\} \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}P^{n-1}$. Cette droite passe par le point $(0, \ldots, 0 ; x_1^0 : \ldots : x_n^0)$ de l'image réciproque $\sigma^{-1}(0) = 0 \times \mathbf{C}P^{n-1}$ correspondant à la droite L.

Pour montrer que l'espace Π^n est une variété complexe non singulière, examinons-le au voisinage d'un point $(0, \ldots, 0, u_1^0 : \ldots : u_n^0) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}P^{n-1}$. Soit par exemple $u_1^0 \neq 0$. Puisque $u_1 : \ldots : u_n$ sont des coordonnées homogènes dans l'espace $\mathbf{C}P^{n-1}$, on peut admettre que $u_1^0 = 1$. Soit $\mathbf{C}_1^{n-1} \subset \mathbf{C}P^{n-1}$ la partie affine de l'espace projectif $\mathbf{C}P^{n-1}$ définie par la condition $u_1 = 1$. Dans la partie $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}_1^{n-1}$ du produit $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}P^{n-1}$, l'espace Π^n peut être défini par les équations $x_j = x_1 u_j$ $(j = 2, \ldots, n)$. On voit donc que l'espace $\Pi^n \cap (\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}_1^{n-1})$ est isomorphe à un espace vectoriel complexe de dimension n muni de coordonnées $x_1, u_2, \ldots, u_n$ et, par conséquent, est non singulier. Des équations définissant Π^n il découle que dans la partie définie par la condition $u_1 = 1$ les coordonnées $u_2, \ldots, u_n$ se laissent exprimer en fonction des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbf{C}^n$ au moyen des formules $u_j = x_j/x_1$ $(j = 2, \ldots, n)$.

On montre sans peine que la construction décrite est indépendante du choix des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbf{C}^n$ et est donc applicable à n'importe quel espace analytique complexe et à son point non singulier. Pour la démonstration, il suffit de vérifier que tout isomorphisme analytique complexe local $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ se laisse relever en isomorphisme analytique complexe $\Pi^n \to \Pi^n$ au voisinage de l'image réciproque $\sigma^{-1}(0) = \mathbf{C}P^{n-1}$.

Soient à présent $n = 2$, $f : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe ayant un point critique isolé en 0, $M = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$ un germe de courbe analytique complexe dans l'espace $\mathbf{C}^2$. Par l'éclatement $\sigma : \Pi^2 \to \mathbf{C}^2$ de centre au point 0, la droite projective $\mathbf{C}P^1 \subset \Pi^2$ de coordonnées $(u : v)$ vient se coller à la place du point

$0 \in \mathbf{C}^2$. La composée $f \circ \sigma$ est alors une fonction holomorphe sur le voisinage de l'espace $\sigma^{-1}(0)$ dans la variété Π^2. La fonction $f \circ \sigma$ admettra d'une façon générale des points critiques non isolés. Elle s'annule sur la droite projective collée $\mathbf{C}P^1 \subset \Pi^2$, la droite $\mathbf{C}P^1$ intervenant dans le diviseur $\{f \circ \sigma = 0\}$ avec la multiplicité égale au degré m du germe $f: (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$. Cela signifie qu'au voisinage du point $(1:0) \in \mathbf{C}P^1 \subset \Pi^2$ défini par la condition $u = 1$ la fonction $f \circ \sigma$ s'écrit sous la forme $f \circ \sigma = x_1^m \cdot g_1$, où g_1 ne s'annule pas identiquement sur la droite projective collée $\mathbf{C}P^1$. Le degré m du germe f est le plus petit des exposants des monômes qui interviennent avec des coefficients non nuls dans le développement de f. Une relation analogue ($f \circ \sigma = y^m \cdot g_2$) a lieu aussi au voisinage du point $(0:1) \in \mathbf{C}P^1 \subset \Pi^2$ défini par la condition $v = 1$. On ne doit donc pas considérer comme singularités de $f \circ \sigma$ la totalité des points en lesquels sa différentielle s'annule: de tels points sont trop nombreux et, de surcroît, la fonction $f \circ \sigma$ est équivalente à x^m au voisinage de la plupart de ces points. On ne retient donc que les points où g_1 (ou g_2) s'annule. Or, g_1 (et g_2) est une fonction sur la partie de la variété Π^2 définie par la non-nullité de l'une des coordonnées. On ne peut pas la définir sur Π^2 d'une façon intrinsèque (sans l'assimiler à une section de fibré).

Pour éviter de pareils obstacles, au lieu de considérer la singularité de la fonction $f: (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, nous considérerons la singularité du germe de courbe $M = \{f = 0\}$. Comme on l'a vu au nº 4.2, le problème de construction des déformées réelles de la singularité f nécessaires pour la détermination de sa matrice des intersections se laisse réduire au problème de construction des déformées réelles de la courbe M. Soit $M = \bigcup_{i=1}^{r} M_i$ la décomposition du germe M en composantes irréductibles. Chacune des courbes M_i se laisse définir par une équation $f_i = 0$ de degré m_i (où $f = \prod_{i=1}^{r} f_i$, $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$).

Considérons provisoirement une des courbes irréductibles M_i (en omettant son indice i). Comme nous l'avons déjà dit, il existe un germe d'application $\varphi: (\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ qui a pour image le germe M et qui est un isomorphisme $\mathbf{C} - 0 \to M - 0$ partout sauf en 0. L'application φ se définit par les formules $x = x(t) = at^m + \ldots$, $y = y(t) = bt^m + \ldots$, où les points de suspension remplacent la somme des termes de degrés plus élevés (t est la coordonnée sur la droite $\mathbf{C}$, et x, y les coordonnées sur le plan $\mathbf{C}^2$; on a soit $a \neq 0$, soit $b \neq 0$). On montre que l'entier naturel m coïncide avec le degré du germe de la fonction qui détermine la courbe M. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées dans l'espace $\mathbf{C}^2$, on peut supprimer le terme de degré m dans la série de $y(t)$, i.e. poser $x(t) = at^m + \ldots$, $y(t) = bt^n + \ldots$, avec $n > m$, $a \neq 0$. On peut ensuite

faire un changement (local) $\tilde{t} = \sqrt[m]{x(t)} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{t^m + \ldots} = \sqrt[m]{a}\,(t + \ldots)$ de la coordonnée sur la droite C et poser $x(t) = t^m$, $y(t) = bt^n + \ldots$ $(n > m)$. Si n est divisible par m $(n = k \cdot m)$, le changement $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y - bx^k$ annule le terme de degré n dans la série de $y(t)$. On peut donc, après avoir effectué les changements de variables dans l'image réciproque C et dans l'image directe C^2, admettre que l'application φ se définit par les formules $x(t) = t^m$, $y(t) = \sum\limits_{k \geqslant n} a_k t^k$ $(n > m,\ a_n \neq 0)$, où n n'est pas divisible par m. Alors le plus grand commun multiple de m, de n et des k tels que $a_k \neq 0$ est 1. On voit sans peine que dans ce cas la courbe M est tangente à la droite de coordonnée $y = 0$. L'équation de M se laisse écrire sous la forme $y = \sum\limits_{k \geqslant n} a_k x^{k/m}$. La série $\sum\limits_{k \geqslant n} a_k x^{k/m}$ suivant les puissances fractionnaires de la variable x est appelée *série de Puiseux* de la courbe M. Le couple d'entiers naturels (n, m) est appelé *exposants supérieurs de Puiseux* de M.

Pour donner une description plus exhaustive au germe de M, on utilise les *couples caractéristiques de Puiseux*. Mettons le rapport n/m sous la forme d'une fraction irréductible n_1/m_1. Le couple (n_1, m_1) s'appelle premier couple caractéristique de Puiseux du germe de courbe M. Si le plus grand commun multiple de n et m (égal à m/m_1) est 1 (auquel cas on a bien sûr $m_1 = m$), le couple en question épuise tous les couples caractéristiques de Puiseux. Si $m/m_1 > 1$, posons $k_2 = \min\{k\colon a_k \neq 0,\ k$ est non divisible par $(m/m_1)\}$. Mettons le rapport $k_2/(m/m_1)$ sous la forme d'une fraction irréductible n_2/m_2. Le couple (n_2, m_2) s'appelle deuxième couple caractéristique de Puiseux du germe de courbe M. Si $m/(m_1 m_2) = 1$, les deux couples en question épuisent tous les couples caractéristiques de Puiseux. Si $m/(m_1 m_2) > 1$, posons $k_3 = \min\{k\colon a_k \neq 0,\ k$ est non divisible par $(m/m_1 m_2)\}$, $k_3/(m/(m_1 m_2)) = n_3/m_3, \ldots$ On obtient en fin de compte une suite de couples premiers entre eux d'entiers naturels $(n_1, m_1), (n_2, m_2), \ldots, (n_g, m_g)$, dits *couples caractéristiques de Puiseux* de la courbe M. On a alors $m_1 \cdot \ldots \cdot m_g = m$, $n_{i-1} m_i < n_i$. On montre que les couples caractéristiques de Puiseux fournissent une description topologique assez détaillée du germe de courbe M. En particulier, deux germes de courbes ayant mêmes couples caractéristiques de Puiseux sont topologiquement équivalents entre eux et sont les variétés de niveau nul des singularités de germes de fonctions qui se trouvent dans une même famille $\mu =$ Cte.

Voyons ce qui arrive à la courbe M quand on effectue un éclatement $\sigma\colon \Pi^2 \to C^2$. Dans la partie affine de la variété Π^2 définie par la condition $u = 1$, on a comme coordonnées x et $v = y/x$ ($(u : v)$ sont les coordonnées homogènes sur la droite projective $CP^1 \subset \Pi^2$). Des formules $x(t) = t^m$, $y(t) = t^n + \ldots$ il ressort qu'en coordonnées

(x, v) sur Π^2 on a $x(t) = t^m$, $v(t) = t^{n-m} + \ldots$ Il s'ensuit que l'image réciproque $\sigma^{-1}(M - 0)$ de la courbe M privée de son point 0 par l'application σ est complétée en la courbe $\sigma^{-1}(M)$ dans la variété Π^2, cette dernière courbe rencontrant la droite projective collée CP^1 au point $(1:0)$. En considérant les équations paramétriques de la courbe $\sigma^{-1}(M)$, on voit qu'elles sont, dans un sens à préciser, de degré plus bas que celles de la courbe M. En effet, si $m < n < 2m$, le degré de la courbe $\sigma^{-1}(M)$ (égal à $n - m$) est simplement plus petit que celui de M. Si au contraire $n > 2m$, le degré de la courbe $\sigma^{-1}(M)$ (égal à m) coïncide avec celui de M, mais le premier des exposants supérieurs de Puiseux $(n - m, m)$ de $\sigma^{-1}(M)$ est moins grand que celui de M.

Ainsi donc, la singularité de la courbe $\tilde{M} = \sigma^{-1}(M)$ est plus simple (au sens précisé ci-dessus) que celle de la courbe M. En effectuant un éclatement sur la surface Π^2 de centre en un point singulier de $\tilde{M} = \sigma^{-1}(M)$, nous obtenons une surface $\tilde{\Pi}^2$ ($\tilde{\sigma}$: $\tilde{\Pi}^2 \to \Pi^2$) et une courbe $\tilde{\tilde{M}} = \tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{M})$ sur cette surface dont la singularité est encore plus simple. La droite projective complexe qui vient se coller sur $\tilde{\Pi}^2$ pendant cet éclatement rencontre transversalement en un point (et un seul!) la droite projective collée lors du premier éclatement. En faisant autant d'éclatements que nécessaire, nous finirons par trouver une image réciproque de M sans singularité.

Supposons maintenant que la courbe M ne soit pas nécessairement irréductible ($M = \bigcup_{i=1}^{r} M_i$). En effectuant un éclatement en 0, puis dans les points singuliers des images réciproques des courbes M_i, etc., nous finirons par obtenir les r images réciproques des M_i sans singularités. Autrement dit, nous obtiendrons une application analytique π: $(Z, Z_0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ (composée d'éclatements) d'une surface analytique non singulière Z dans l'espace $\mathbf{C}^2$ telle que:

1) la restriction de π à $Z - Z_0$ est un isomorphisme $Z - Z_0 \to \mathbf{C}^2 - 0$;

2) le sous-espace $Z_0 = \pi^{-1}(0)$ est réunion de droites projectives complexes en position générale sur Z;

3) les images réciproques $\pi^{-1}(M_i)$ des courbes $M_i \subset \mathbf{C}^2$ (adhérences de $\pi^{-1}(M_i - 0)$) sont des courbes non singulières sur la surface Z. La généricité des courbes projectives formant le sous-espace Z_0 veut dire que celles-ci ne présentent que des intersections réciproques deux à deux et que deux droites projectives ou bien ne se coupent pas, ou bien se coupent transversalement en un seul point.

Les courbes $\pi^{-1}(M_i)$ peuvent être tangentes l'une à l'autre, ainsi qu'aux droites projectives complexes collées. On voit sans peine qu'un éclatement effectué au point de tangence de deux courbes non singulières a pour effet de baisser l'ordre du contact des courbes, et un

éclatement effectué au point de leur intersection transversale écarte les courbes, i.e. les rend disjointes. On peut donc, quitte à faire autant d'éclatements supplémentaires que nécessaire, admettre que les courbes $\pi^{-1}(M_i)$ ne se rencontrent pas entre elles et coupent transversalement l'image réciproque Z_0 de 0 en ses points non singuliers (i.e. en dehors des points d'intersection des différentes droites projectives collées).

Une telle application $\pi: (Z, Z_0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ sera appelée *désingularisation* de la courbe $M = \{(x, y): f(x, y) = 0\}$. On montre que cette application est une désingularisation de f au sens du n° 3.5.

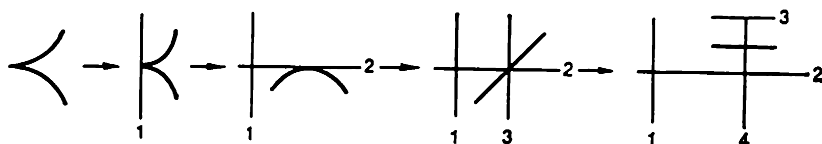


Fig. 40

Par exemple, supposons que la courbe M soit irréductible et définie paramétriquement par $x = t^2$, $y = t^5$. Un éclatement de centre en 0 la transforme en une courbe d'équations $x = t^2$, $y = t^3$. En effectuant un éclatement au point singulier de cette dernière, on obtient une courbe sans singularité, tangente à une droite projective collée, le contact étant simple. Un éclatement effectué au point de tangence

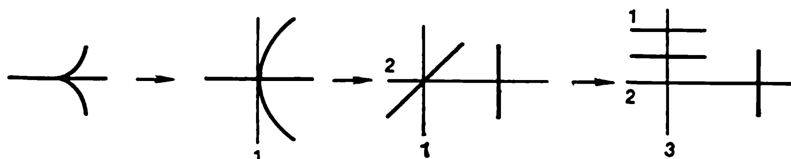


Fig. 41

aura pour effet l'intersection de l'image réciproque de M avec deux droites projectives collées, au point d'intersection de ces droites. Enfin, un éclatement en ce point rendra définitivement génériques l'image réciproque de la courbe en question et toutes les droites projectives collées (fig. 40; pour la clarté du dessin, la courbe M et ses images réciproques sont tracées en trait gras et les droites projectives collées sont numérotées dans l'ordre de leur apparition).

Un autre exemple (pour la singularité de la fonction $f(x, y) = x(x^2 + y^3)$, $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 = \{x = 0\}$, $M_2 = \{x^2 + y^3 = 0\}$) est donné sur la figure 41.

On montre sans peine que la multiplicité et, par conséquent, la matrice des intersections de la singularité de la fonction correspon-

dant à la courbe $M = \bigcup_{i=1}^{r} M_i$, dépendent des droites projectives collées et des images réciproques des M_i qui se rencontrent et ne dépendent pas des points en lesquels a lieu l'intersection (transversale). Il s'ensuit que l'on ne change pas la multiplicité de la singularité ni sa matrice des intersections si l'on admet que toutes les droites projectives collées et les images réciproques des courbes M_i sont réelles (i.e. que tous les éclatements ont été effectués aux points réels des surfaces correspondantes et que les courbes M_i étaient elles-mêmes réelles). Si tel est le cas, on voit sur les figures 40 et 41 les

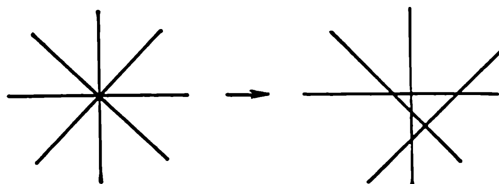


Fig. 42

parties réelles des droites projectives collées et des courbes M_i.

En principe, la construction que nous venons de décrire démontre le théorème 3.

La contraction de l'une des droites projectives collées (plus exactement, de celle qui a été collée la dernière) conduit à l'intersection en un point de quelques courbes non singulières (droites projectives collées et images réciproques des courbes M_i), les intersections étant transversales deux à deux. Par déformation, on s'arrange pour que ces courbes ne se coupent que deux à deux et pour que les intersections deux à deux simples soient toutes réelles (fig. 42).

En contractant de cette façon toutes les droites projectives collées (dans l'ordre inverse de leur apparition pendant la désingularisation) et en supprimant par déformation toute intersection plus que double après chaque contraction, nous finirons par obtenir des déformées de courbes initiales M_i qui n'auront que des intersections doubles ordinaires (self-intersections ou intersections deux à deux), toutes les intersections étant réelles. Ainsi nous aurons construit les déformées des courbes M_i nécessaires à la détermination de la matrice des intersections de la singularité, conformément au n° 4.2.

Pour les singularités dont les résolutions ont été représentées sur les figures 40 et 41, on voit les constructions correspondantes sur les figures 43 et 44.

Le mode de construction des déformées réelles que nous avons proposé a l'inconvénient de nécessiter une suite d'éclatements pour

la désingularisation, or, c'est une procédure assez longue. Par exemple, pour la singularité $x^m + y^n$ envisagée au n° 4.1 (exemple 1), on est amené à effectuer toute une série de constructions (pas trop difficiles d'ailleurs). Il existe une méthode plus efficace, fondée sur la récurrence sur les couples de Puiseux de la singularité, mais elle est plus difficile à décrire.

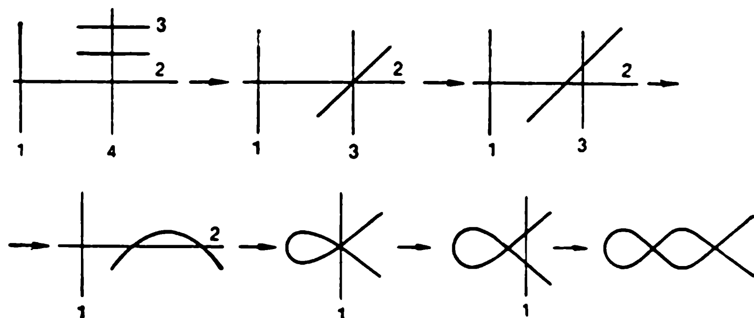


Fig. 43

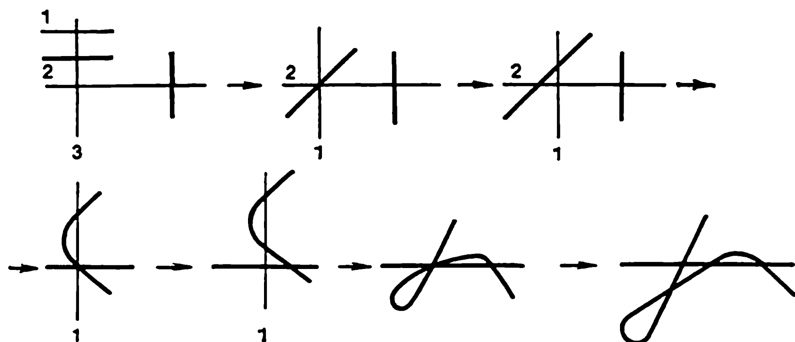


Fig. 44

4.4. Diagonalisation partielle de la forme quadratique de la singularité. Nous avons déjà dit que la possibilité de mettre le diagramme de Dynkine de la singularité d'une fonction de deux variables sous forme de diagramme de Dynkine d'une courbe réelle facilite singulièrement certains calculs liés à la forme quadratique correspondante (par exemple, le calcul de ses indices d'inertie).

Les indices des intersections des cycles évanescents (formels) associés à une courbe réelle l (voir n° 4.1) sont liés entre eux par une relation particulière.

Lemme 2. *On a l'égalité*

$$2n_{20}(k, i) = \sum_j n_{21}(k, j)\, n_{10}(j, i).$$

La démonstration s'obtient par un raisonnement géométrique élémentaire.

Plongeons un réseau d'entiers muni de la base Δ_i^0, Δ_j^1, Δ_k^2 dans l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^\mu$ muni de la même base, puis faisons le prolongement de la forme quadratique $(x \circ y)$ à $\mathbf{R}^\mu$ tout entier. Définissons dans $\mathbf{R}^\mu$ une nouvelle base $\overline{\Delta}_i^0$, $\overline{\Delta}_j^1$, $\overline{\Delta}_k^2$ telle que

$$\overline{\Delta}_i^0 = \Delta_i^0 + \frac{1}{2} \sum_j (\Delta_i^0 \circ \Delta_j^1)\, \Delta_j^1,$$

$$\overline{\Delta}_j^1 = \Delta_j^1,$$

$$\overline{\Delta}_k^2 = \Delta_k^2 + \frac{1}{2} \sum_j (\Delta_k^2 \circ \Delta_j^1)\, \Delta_j^1.$$

A l'aide du lemme 2, on vérifie sans peine que $(\overline{\Delta}_i^0 \circ \overline{\Delta}_j^1) = (\overline{\Delta}_k^2 \circ \overline{\Delta}_j^1) = (\overline{\Delta}_k^2 \circ \overline{\Delta}_i^0) = 0$. De plus $(\overline{\Delta}_j^1 \circ \overline{\Delta}_{j'}^1) = -2\delta_{jj'}$. Nous venons de faire une diagonalisation partielle de la matrice des intersections.

On voit sans difficulté que

$$(\overline{\Delta}_i^0 \circ \overline{\Delta}_i^0) = -2 + \frac{1}{2} \sum_j [n_{10}(j, i)]^2,$$

$$(\overline{\Delta}_k^2 \circ \overline{\Delta}_k^2) = -2 + \frac{1}{2} \sum_j [n_{21}(k, j)]^2.$$

Il s'ensuit que si, parmi les domaines limités par la courbe l (ou par une courbe déduite de l par homotopie permise), il y a au moins un quadrilatère, sa forme quadratique n'est pas définie négative, et s'il y a parmi ces domaines un n-latère à $n > 4$, elle n'est même pas semi-définie négative.

Voici un exemple d'application de cette construction. Pour une forme quadratique sur le réseau Z^μ la notion de déterminant a un sens, car le déterminant d'un changement de base dans un réseau d'entiers est égal à ± 1. Soit $D(f)$ le déterminant de la forme quadratique correspondant à la singularité f. Le déterminant $D(f)$ est égal à 0 si l'application $i_*: H_{n-1}(V_\varepsilon) \to H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ des groupes d'homologie induite par le plongement $V_\varepsilon \subset (V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ (pour la singularité $f(x, y) + t^2$) n'est pas un monomorphisme; dans le cas contraire, $D(f)$ est égal au signe près à l'ordre du conoyau $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)/\mathrm{Im}\, i_*$ de l'application i_* (la matrice de i_* est précisément la matrice des intersections de la singularité).

Théorème 5. *Soient* $f: (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ *la singularité d'une fonction de deux variables et r le nombre maximal des facteurs dans la décomposition du germe de fonction f en produit de facteurs irréductibles (i.e. le nombre des composantes irréductibles de la courbe* $\{f = 0\}$*). Alors* $D(f)$ *est divisible par* 2^{r-1}.

Dans le cas particulier où f est réductible, i.e. $r > 1$, l'application i_* (pour la singularité $f(x, y) + t^2$) ne peut être un isomorphisme.

D é m o n s t r a t i o n. Conformément aux théorèmes 3 et 4 (nº 4.2), construisons une famille d'applications réelles $\widetilde{\varphi}_l: \mathbf{C}_l \to \mathbf{C}^2$ (définies au voisinage de 0), telle que le diagramme de Dynkine de la courbe $\left(\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Im} \widetilde{\varphi}_l\right) \cap \mathbf{R}^2$ se confonde avec celui de la singularité f. Soit $\{\Delta_m^\sigma\}$ une base du réseau sur lequel la forme quadratique $(x \circ y)$ est définie pour la courbe en question. Le nombre des self-intersections s de la courbe $(\bigcup \operatorname{Im} \widetilde{\varphi}_l) \cap \mathbf{R}^2$ est égal au nombre des éléments de base Δ_j^1. Le nombre des autres éléments de base (Δ_i^0 et Δ_k^2) est égal à $s - (r - 1)$ (voir le lemme 1 du nº 4.2). La matrice de passage de la base $\{\Delta_m^\sigma\}$ du réseau d'entiers à la base $\{\overline{\Delta}_m^\sigma\}$ de l'espace $\mathbf{R}^\mu$ décrite plus haut a le déterminant $+1$. Le déterminant $D(f)$ se confond donc avec celui de la matrice de la forme quadratique de la singularité f par rapport à la base $\{\overline{\Delta}_m^\sigma\}$. Ce déterminant se décompose en produit des trois déterminants : $|(\overline{\Delta}_i^0 \circ \overline{\Delta}_{i'}^0)|$, $|(\overline{\Delta}_k^2 \circ \overline{\Delta}_{k'}^2)|$ et $|(\overline{\Delta}_j^1 \circ \overline{\Delta}_{j'}^1)|$. Le dernier facteur est égal à $(-2)^s$. On voit sans peine que les indices des intersections $(\overline{\Delta}_i^0 \circ \overline{\Delta}_{i'}^0)$ et $(\overline{\Delta}_k^2 \circ \overline{\Delta}_{k'}^2)$ appartiennent à l'ensemble des demi-entiers $(1/2 \cdot Z)$. Donc $|(\overline{\Delta}_i^0 \circ \overline{\Delta}_{i'}^0)| \times \times |(\overline{\Delta}_k^2 \circ \overline{\Delta}_{k'}^2)| \in 2^{-s+(r-1)} \cdot Z$, d'où il ressort que $D(f) = \pm 2^s \times \times |(\overline{\Delta}_i^0 \circ \overline{\Delta}_{i'}^0)| \cdot |(\overline{\Delta}_k^2 \circ \overline{\Delta}_{k'}^2)|$ appartient à $2^{r-1}Z$, ce qu'il fallait démontrer.

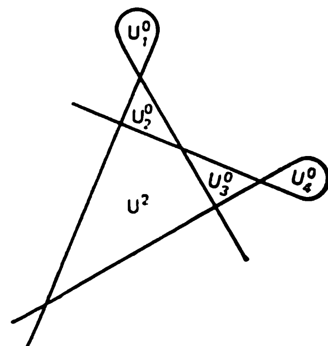


Fig. 45

Par exemple, pour la singularité A_k ($f(x, y) = x^{k+1} + y^2$) le déterminant $D(f)$ est égal à $(-1)^k (k + 1)$.

Citons un autre exemple de diagonalisation partielle de la forme quadratique de la singularité d'une fonction de deux variables. Considérons la singularité de la fonction $f(x, y) = x^5 + x^2y^2 + y^5$. Elle est équivalente à celle de la fonction $(x^3 + y^2)(x^2 + y^3)$. La déformée réelle de la courbe $\{f(x, y) = 0\}$, qui n'a que des self-intersections doubles ordinaires réelles, est montrée sur la figure 45.

La multiplicité de f est 11. Ecrite dans la base $\bar{\Delta}_m^\sigma$ définie plus haut, la forme quadratique de f se décompose en somme directe de trois formes quadratiques. La première — sur le sous-espace de dimension 6 engendré par les éléments $\bar{\Delta}_j^1$ — est définie négative. La seconde — sur le sous-espace de dimension 1 engendré par l'élément $\bar{\Delta}^2$ auquel correspond le quadrilatère U^2 sur la figure 45 — est nulle. Enfin, la troisième est définie sur le sous-espace de dimension 4 engendré par les éléments $\bar{\Delta}_1^0, \ldots, \bar{\Delta}_4^0$ auxquels correspondent sur la

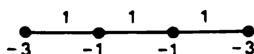


Fig. 46

figure 45 les boucles U_1^0, U_4^0, et les triangles U_2^0 et U_3^0. On a $(\bar{\Delta}_1^0 \circ \bar{\Delta}_1^0) =$ $= (\bar{\Delta}_4^0 \circ \bar{\Delta}_4^0) = -3/2$, $(\bar{\Delta}_2^0 \circ \bar{\Delta}_2^0) = (\bar{\Delta}_3^0 \circ \bar{\Delta}_3^0) = -1/2$, $(\bar{\Delta}_1^0 \circ \bar{\Delta}_2^0) =$ $= (\bar{\Delta}_2^0 \circ \bar{\Delta}_3^0) = (\bar{\Delta}_3^0 \circ \bar{\Delta}_4^0) = 1/2$ (voir la figure 46 où sont indiqués les indices des self-intersections et les indices des intersections des éléments de base $\bar{\Delta}_i^0$, multipliés par 2 pour plus de commodité). Une telle forme se prête aisément à la diagonalisation et a l'indice d'inertie positif 1 et l'indice d'inertie négatif 3. Il s'ensuit que la forme quadratique de la singularité f a l'indice d'inertie positif $\mu_+ = 1$, nul $\mu_0 = 1$ et négatif $\mu_- = \mu - 2 = 9$. Il s'agit donc d'une singularité hyperbolique au sens de la Première partie.

§ 5. Formes d'intersection des singularités de bord et topologie des intersections complètes

Ce paragraphe décrit brièvement quelques généralisations liées aux notions de forme d'intersection et de cycle évanescent pour les singularités de fonctions sur une variété à bord, pour les intersections complètes, etc.

5.1. Singularités et actions des groupes finis. Certains résultats et notions dégagés dans les paragraphes précédents se laissent généraliser au cas d'un germe de fonctions f: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ invariant par l'action linéaire d'un groupe fini G sur l'espace $\mathbf{C}^n$. Dans cette voie on rencontre naturellement les singularités correspondant aux algèbres de Lie B_k, C_k, F_4 et G_2 dont les systèmes de racines contiennent des vecteurs de longueur différente.

Soit une représentation linéaire du groupe fini G sur l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^n$. La transformation de $\mathbf{C}^n$ correspondant à un élément g de G sera notée T_g. Soit f: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction invariant par l'action de G, i.e. tel que $f(T_g x) = f(x)$ pour $g \in G$. Alors G opère sur une variété de niveau non singulière

$V_\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho$ de la fonction f au voisinage du point critique, donc aussi sur son groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ à coefficients dans les groupes Z, **R** ou **C**.

Dans le cas où f est une singularité ordinaire d'une fonction (i.e. quand G est trivial), la multiplicité de f est la dimension de l'espace $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbf{R})$ (ou $H_{n-1}(V_\varepsilon, \mathbf{C})$). Si G est non trivial, l'analogue naturel de la dimension est le G-module $[H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbf{R})]$ (ou $[H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbf{C})]$) comme élément de l'anneau $R_\mathbf{R}(G)$ (resp. de $R_\mathbf{C}(G)$) des représentations réelles (resp. complexes) de G (voir [316]). L'élément $[H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbf{C})]$ de l'anneau $R(G) = R_\mathbf{C}(G)$ des représentations complexes de G sera noté $[H]$.

Soit ${}_n\mathcal{O}$ l'anneau des germes en 0 de fonctions holomorphes de n variables, et $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ l'idéal jacobien du germe f, i.e. l'idéal engendré par les dérivées partielles de la fonction f. La dimension de l'anneau quotient Q_f de ${}_n\mathcal{O}$ par l'idéal jacobien $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ (comme dimension d'un espace vectoriel complexe) coïncide avec la multiplicité de la singularité f. L'action de G sur $\mathbf{C}^n$ définit une représentation de G sur l'anneau ${}_n\mathcal{O}$. Au cas où le germe f est invariant par l'action de G, cette représentation définit naturellement celle de G sur l'espace vectoriel Q_f. Comme nous l'avons déjà dit, les espaces vectoriels $H = H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbf{C})$ et Q_f ont même dimension. La relation entre $[H]$ et $[Q_f]$ comme éléments du groupe $R(G)$ a été établie dans [390].

Le groupe G opère sur l'espace de définition $\mathbf{C}^n$ de f. Il opère donc aussi sur sa puissance extérieure n-ième $\lambda^n\mathbf{C}^n$ qui est un espace vectoriel de dimension un. L'action d'un élément $g \in G$ sur l'espace $\lambda^n\mathbf{C}^n$ se confond avec la multiplication par le déterminant $\det T_g$ de l'opérateur T_g.

A la représentation du groupe G sur un espace vectoriel V correspond sa représentation sur l'espace vectoriel dual V^*. Par exemple, à la représentation de G sur l'espace d'homologie $H = H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbf{C})$ d'une variété de niveau non singulière correspond la représentation duale sur l'espace de cohomologie $H^* = H^{n-1}(V_\varepsilon; \mathbf{C})$ de cette variété de niveau non singulière.

Théorème 1 ([390]). *Les G-modules (i.e. les espaces vectoriels avec représentations du groupe G) H et $Q_f^* \otimes_\mathbf{C} \lambda^n\mathbf{C}^n$ sont isomorphes.*

L'isomorphisme dont l'existence est stipulée dans le théorème 1 se définit d'une façon non canonique.

Nous avons dit au n° 3.5 qu'au lieu de calculer la multiplicité de la singularité, i.e. la dimension du groupe d'homologie de sa variété de niveau non singulière V_ε, il est souvent plus commode de calculer sa caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(V_\varepsilon)$. Si X est un espace topologique (supposons pour fixer les idées que X soit un complexe cellulaire fini) sur lequel opère le groupe G, on appelle *caractéristique équivariante d'Euler-Poincaré* $\chi_G(X)$ de X l'élément

$\sum_q (-1)^q [H_q(X;\ \mathbf{C})]$ de l'anneau $R(G)$ des représentations complexes de G, où $[H_q\ (X;\ \mathbf{C})]$ est l'élément de $R\ (G)$ défini par le groupe d'homologie de dimension q de X avec la représentation correspondante de G. La caractéristique équivariante d'Euler-Poincaré $\chi_G\ (V_\varepsilon)$ d'une variété de niveau non singulière V_ε est égale à $[\mathbf{C}] + (-1)^{n-1}\ [H]$, où $[\mathbf{C}]$ est l'élément de l'anneau $R\ (G)$ défini par l'espace $\mathbf{C}$ de dimension un avec la représentation triviale de G (le groupe d'homologie $H_0\ (V_\varepsilon;\ \mathbf{C})$ de dimension zéro d'une variété de niveau non singulière est de dimension un, et la représentation de G sur ce groupe est triviale).

Si l'action de G est compatible à la structure de complexe cellulaire sur X, une représentation naturelle de G est définie sur l'espace vectoriel $C_q(X;\ \mathbf{C})$ des chaînes cellulaires de dimension q de X à coefficients dans le corps commutatif $\mathbf{C}$. On montre que, par analogie à la relation $\chi\ (X) = \sum_q (-1)^q \dim C_q\ (X;\ \mathbf{C})$ établie pour la caractéristique ordinaire d'Euler-Poincaré, on a pour la caractéristique équivariante d'Euler-Poincaré la formule $\chi_G\ (X) = \sum_q (-1)^q \times [C_q(X;\ \mathbf{C})]$.

On sait (voir par exemple [316]) qu'un élément $[V]$ de l'anneau $R\ (G)$ des représentations complexes du groupe G se laisse définir par son caractère $[V]\ (g) = \mathrm{tr}\ T_g|_V$, ce dernier étant assimilé à une fonction sur G (ici $\mathrm{tr}\ T_g|_V$ est la trace de l'opérateur $T_g|_V$). Si X est un complexe cellulaire et l'action de G sur X est compatible à la structure de complexe cellulaire, la valeur $\chi_G\ (X)\ (g)$ du caractère de l'élément $\chi_G\ (X) \in R\ (G)$ sur $g \in G$ coïncide avec la caractéristique (ordinaire) d'Euler-Poincaré $\chi\ (X_g)$ de l'ensemble X_g des points fixes de l'action de g sur X. Cela ressort du fait qu'en dehors de X_g l'élément g permute les cellules, donc la contribution de ces cellules à $\mathrm{tr}\ (g_* \mid C_q\ (V_\varepsilon;\ \mathbf{C}))$ est égale à 0. Par contre, les cellules appartenant à X_g restent fixes, si bien que leur contribution à $\mathrm{tr}\ (g_* \mid C_q\ (V_\varepsilon;\ \mathbf{C}))$ est égale à 1.

D'où le

Théorème 2. *Le caractère de la caractéristique équivariante d'Euler-Poincaré d'une variété de niveau non singulière de la singularité f est*

$$\chi_G\,(V_\varepsilon)\ (g) = 1 + (-1)^{d_g - 1}\mu_g,$$

où d_g est la dimension du sous-espace de $\mathbf{C}^n$ sur lequel l'élément $g \in G$ opère de façon triviale, et μ_g est la multiplicité de la restriction de f à ce sous-espace.

La multiplicité μ_g est définie, car si la fonction f a un point critique isolé au point 0 de l'espace $\mathbf{C}^n$, elle a aussi des points critiques isolés dans les sous-espaces de $\mathbf{C}^n$ qui sont fixes par l'action de $g \in G$.

Corollaire. *Le caractère de la représentation naturelle du groupe G sur l'espace d'homologie* $H = H_{n-1}(V_\varepsilon;\ \mathbf{C})$ *d'une variété de niveau non singulère est*

$$[H](g) = (-1)^{n-d_g}\mu_g.$$

Si G est un sous-groupe fini du groupe unitaire $U(n)$ engendré par les réflexions, on a $\mathbf{C}^n/G \cong \mathbf{C}^n$. Un germe $f\colon (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ invariant par l'action de G définit un germe f_* sur $(\mathbf{C}^n/G, 0) \cong \cong (\mathbf{C}^n, 0)$.

Théorème 3 ([390]). $\mu(f_*) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(-1)^{n-d_g}\mu_g$, *où* $|G|$ *est le cardinal de* G.

Exemple. Soit $G = Z_2$ un groupe à deux éléments opérant sur l'espace $\mathbf{C}^n$ muni de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ par la formule $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (σ est un élément non neutre du groupe). L'isomorphisme de l'espace $\mathbf{C}^n/Z_2$ à l'espace $\mathbf{C}^n$ muni de coordonnées $y_1, \ldots, y_n$ se définit par les formules $y_1 = x_1^2$, $y_i = x_i$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$. On a alors $|G| = 2$, le sous-espace de $\mathbf{C}^n$ invariant par σ se confond avec l'espace $\{x_1 = 0\}$ de dimension $(n - 1)$. Du théorème 3 on déduit que $\mu(f_*) = \frac{1}{2}(\mu(f) - \mu(f \mid \{x_1 = = 0\})$, où $\mu(f \mid \{x_1 = 0\})$ est la multiplicité de la restriction du germe f au sous-espace $\{x_1 = 0\}$. On voit sans peine que $f \mid \{x_1 = = 0\} = f_* \mid \{y_1 = 0\}$, donc $\mu(f) = 2\mu(f_*) + \mu(f_* \mid \{y_1 = 0\})$.

Considérons l'action de Z_2 dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon;\ \mathbf{R})$ d'une variété de niveau non singulière de la fonction f. Le groupe Z_2 admet deux représentations réelles irréductibles : la représentation triviale et la multiplication par (-1). Le groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon;\ \mathbf{R})$ se décompose donc en la somme directe $H^+ \oplus H^-$ de l'espace H^+ des cycles invariants par l'involution σ_* et de l'espace H^- des cycles antiinvariants ; $\dim H^+ + \dim H^- = \mu(f)$.

Conformément au corollaire du théorème 2, on a $[H](\sigma) = = \dim H^+ - \dim H^- = -\mu(f \mid \{x_1 = 0\}) = -\mu(f_* \mid \{y_1 = 0\})$. Puisque $\dim H^+ + \dim H^- = 2\mu(f_*) + \mu(f_* \mid \{y_1 = 0\})$, on a $\dim H^+ = \mu(f_*)$, $\dim H^- = \mu(f_*) + \mu(f_* \mid \{y_1 = 0\})$.

On peut aussi démontrer ces formules de façon directe (sans faire intervenir les théorèmes 2 et 3), ce que nous proposons au lecteur de faire à titre d'exercice.

La classification des singularités de fonctions invariantes par une telle action du groupe cyclique Z_2 coïncide avec celle des singularités de fonctions sur une variété à bord (voir Première partie, § 17). Une classification des singularités de basse codimension de fonctions invariantes par l'action du groupe $(Z_2)^q$, interprétée comme classification des singularités de fonctions sur une variété « à coins », est envisagée, en particulier, dans [326].

5.2. Singularités de fonctions sur une variété à bord. Nous allons décrire brièvement, pour le cas d'une variété à bord, quelques notions analogues à celles que nous avons considérées plus haut. On en trouve dans [16] un exposé plus circonstancié, ainsi que la justification de leur introduction.

Soit f la singularité d'une fonction sur une variété à bord (voir Première partie, § 17). On entend par là que f est un germe de fonction holomorphe $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ sur un espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^n$ dans lequel on a fixé un hyperplan $\mathbf{C}^{n-1}$, et que f a un point critique isolé en 0 tant dans $\mathbf{C}^n$ que dans $\mathbf{C}^{n-1}$ (ou que f est sans point critique en 0 de $\mathbf{C}^n$). On peut admettre que l'hyperplan $\mathbf{C}^{n-1}$ est défini par $x_1 = 0$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont des coordonnées sur $\mathbf{C}^n$.

Soit $\hat{\mathbf{C}}^n$ un revêtement à deux feuillets de $\mathbf{C}^n$ ramifié le long de $\mathbf{C}^{n-1}$. Si $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ sont des coordonnées dans $\hat{\mathbf{C}}^n$, le revêtement ramifié $\hat{\mathbf{C}}^n \mapsto \mathbf{C}^n$ se définit par $x_1 = \hat{x}_1^2$, $x_2 = \hat{x}_2, \ldots, x_n = \hat{x}_n$. Il existe sur $\hat{\mathbf{C}}^n$ une involution canonique $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \mapsto$ $\mapsto (-\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$; autrement dit, est définie l'action d'un groupe cyclique Z_2 du second ordre. Le germe f se fait correspondre sur $\hat{\mathbf{C}}^n$ un germe de fonction $\hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) = f(\hat{x}_1^2, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ invariant par l'action de Z_2. A un automorphisme analytique local de $\mathbf{C}^n$ conservant $\mathbf{C}^{n-1}$ correspond un automorphisme analytique local de $\hat{\mathbf{C}}^n$ équivariant par l'action de Z_2. Ainsi donc, il est naturel de considérer les singularités des fonctions sur une variété à bord comme des germes de fonctions $\hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ invariantes par l'involution $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \mapsto (-\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$. Réciproquement, à tout germe de cette nature correspond une singularité d'une fonction sur la variété à bord $\mathbf{C}^n$ de bord $\mathbf{C}^{n-1}$.

On associe à la singularité f d'une fonction sur une variété à bord des variétés de niveau non singulières de deux façons. A la fonction f elle-même correspond sa variété de niveau non singulière $V_\varepsilon = \{x \in \mathbf{C}^n : f(x) = \varepsilon, \|x\| \leqslant \rho\}$, qui est une variété complexe à bord (au sens réel usuel) de dimension $(n - 1)$. Au bord $\mathbf{C}^{n-1}$ correspond une sous-variété complexe de dimension $(n - 2)$ $V'_\varepsilon =$ $= \{x \in \mathbf{C}^{n-1} : f(x) = \varepsilon, \|x\| \leqslant \rho\}$, à savoir une variété de niveau non singulière de la restriction de f à $\mathbf{C}^{n-1}$.
De la suite d'homologie exacte du couple $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$: $\ldots \to H_{n-1}(V'_\varepsilon) \to$

$$\to H_{n-1}(V_\varepsilon) \to H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon) \to H_{n-2}(V'_\varepsilon) \to H_{n-2}(V_\varepsilon) \to \ldots$$

dans laquelle $H_k(V_\varepsilon) = 0$ pour $k \neq n - 1$, $H_k(V'_\varepsilon) = 0$ pour $k \neq n - 2$, il découle que $H_k(V_\varepsilon, V'_\varepsilon) = 0$ pour $k \neq n - 1$ et $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ est un groupe abélien libre dont la dimension est égale à la somme de la multiplicité du point critique de f sur $\mathbf{C}^n$

et de celle du point critique de la restriction de f à $\mathbf{C}^{n-1}$. Des théorèmes généraux de topologie homotopique il ressort (au moins pour un nombre de variables $n > 2$ où l'espace $V_\varepsilon/V'_\varepsilon$ est simplement connexe; pour $n = 2$ la démonstration est encore plus simple) que l'espace quotient $V_\varepsilon/V'_\varepsilon$ a le type d'homotopie d'un bouquet de quelques sphères. Le nombre $\mu = \mu (f \mid x_1)$ de ces sphères est appelé *multiplicité* de la singularité de bord f (la notation citée contient la fonction elle-même et la coordonnée qui s'annule au bord $\mathbf{C}^{n-1}$). Nous avons montré que $\mu (f \mid x_1)$ est égale à la somme $\mu (f) + \mu (f \mid \{x_1 = 0\})$ des multiplicités des points singuliers de f sur $\mathbf{C}^n$ et sur $\mathbf{C}^{n-1}$.

On peut construire une base dans le groupe d'homologie $H_{n-1} (V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ de la façon suivante. Soit $\tilde{f}$ une déformée générique de la singularité f. Cela veut dire que la fonction $\tilde{f}$ sur $\mathbf{C}^n$ et sa restriction $\tilde{f}\,|_{\mathbf{C}^{n-1}}$ au bord $\mathbf{C}^{n-1} = \{x_1 = 0\}$ sont des fonctions de Morse et que de surcroît les valeurs critiques de $\tilde{f}$ et de $\tilde{f} \mid \{x_1 = 0\}$ sont distinctes. En particulier, $\tilde{f}$ n'a aucun point critique sur l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$. Soient $\mu (f) = \mu_0$, $\mu (f \mid \{x_1 = 0\}) = \mu_1$, $z_1, \ldots, z_{\mu_0}$ les valeurs critiques de $\tilde{f}$ au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$, $z'_1, \ldots, z'_{\mu_1}$ les valeurs critiques de la restriction de $\tilde{f}$ au sous-espace $\mathbf{C}^{n-1} = \{x_1 = 0\}$, z_0 la valeur non critique de $\tilde{f}$ et de $\tilde{f} \mid \{x_1 = 0\}$. Soient $F_{z_0} = \{x \in \mathbf{C}^n: \tilde{f} (x) = z_0, \| x \| \leqslant \rho\}$ et $F'_{z_0} = F_{z_0} \cap \{x_1 = 0\}$ des variétés de niveau non singulières de $\tilde{f}$ et de $\tilde{f} \mid \{x_1 = 0\}$. Comme pour des singularités ordinaires de fonctions, le couple de variétés (F_{z_0}, F'_{z_0}) est difféomorphe au couple $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$, quitte à consentir des restrictions naturelles. Si u est un chemin joignant une valeur critique z_i de $\tilde{f}$ à sa valeur non critique z_0 (sans passer par les valeurs critiques de $\tilde{f}$ et de $\tilde{f} \mid \{x_1 = 0\}$), il lui correspond comme précédemment un cycle évanescent Δ dans le groupe d'homologie $H_{n-1} (F_{z_0})$ de la variété de niveau non singulière de $\tilde{f}$ isomorphe au groupe d'homologie $H_{n-1} (V_\varepsilon)$ de la variété de niveau non singulière de f. Alors, puisque u ne passe pas par les valeurs critiques de $\tilde{f} \mid \{x_1 = 0\}$, on peut relever l'homotopie $t \mapsto u (t)$ en homotopie de la fibre de façon à laisser inchangées les sous-variétés $F_{u(t)} \cap \{x_1 = 0\}$. Dans ce cas le cycle Δ est situé tout entier hors de la sous-variété $F_{z_0} \cap \{x_1 = 0\}$.

De la suite exacte du couple $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ il ressort que l'homomorphisme canonique $i_*: H_{n-1} (V_\varepsilon) \to H_{n-1} (V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$, induit par le plongement $V_\varepsilon \hookrightarrow (V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$, est un monomorphisme. Il existe donc un cycle évanescent qui correspond à u dans le groupe d'homologie relative $H_{n-1} (V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ de la variété de niveau non singulière modulo la sous-variété $\{x_1 = 0\}$.

Si u est un chemin joignant une valeur critique z'_j de la fonction $\tilde{f} \mid \{x_1 = 0\}$ (qui n'est pas une valeur critique de $\tilde{f}$) à la valeur non critique z_0 ($u(0) = z'_j$, $u(1) = z_0$) sans passer par les valeurs critiques de $\tilde{f}$ et de $\tilde{f} \mid \{x_1 = 0\}$, il lui correspond un « demi-cycle » évanescent $\Delta' \in H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ qui se définit comme suit. Soit $p'_j \in \mathbf{C}^{n-1}$ un point critique de $\tilde{f} \mid \{x_1 = 0\}$, $\tilde{f}(p'_j) = z'_j$. On montre qu'au voisinage du point p'_j, on peut, moyennant un changement local de coordonnées conservant l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$, mettre $\tilde{f}$ sous la forme $\tilde{f} = -x_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k^2 + z'_j$. Sans perte de généralité, on peut admettre que $z'_j = 0$ et que $u(t) = t$ quand t est petit. Donc, pour petit $t > 0$, la variété de niveau non singulière $F_{u(t)} = \{\tilde{f} = t\}$ admet une sous-variété à bord réelle $D^{n-1}(t)$ de dimension $(n-1)$, telle que $\operatorname{Im} x_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), $\sum_{k=2}^{n} x_k^2 \leqslant t$, $x_1 = \sum_{k=2}^{n} x_k^2 - t \leqslant 0$ (voir la figure 47 pour $n = 2$). La variété $D^{n-1}(t)$ est difféomorphe à une boule de dimension $(n-1)$. Sa frontière (une sphère de dimension $(n-2)$) est située sur la sous-variété $F_{u(t)} \cap \{x_1 = 0\}$. Quand t varie de 0 à 1, on obtient une famille continue de disq)ues $D^{n-1}(t) \subset F_{u(t)}$ de dimension $(n-1)$ pour lesquels $S^{n-2}(t)p = \partial D^{n-1}(t) \subset F_{u(t)} \cap \{x_1 = 0\}$ pour tout $t \in [0, 1]$. On a de plus $D^{n-1}(t) \cap \{x_1 = 0\} = \partial D^{n-1}(t)$. Le disque $D^{n-1}(1) \subset F_{z_0}$ de frontière $\partial D^{n-1}(t) = S^{n-2}(t)$, qui appartient à $F_{z_0} \cap \{x_1 = 0\}$, définit un cycle relatif Δ' dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(F_{z_0}, F_{z_0} \cap \{x_1 = 0\})$ isomorphe à $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$.

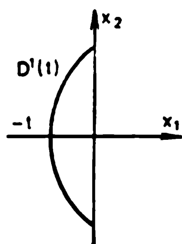


Fig. 47

Soit $u_1, \ldots, u_{\mu_0}$ (resp. $u'_1, \ldots, u'_{\mu_1}$) un système de chemins joignant des valeurs critiques $z_1, \ldots, z_{\mu_0}$ (resp. $z'_1, \ldots, z'_{\mu_1}$) de la fonction $\tilde{f}$ (resp. de $\tilde{f} \mid \{x_1 = 0\}$) à la valeur non critique z_0 et définissant en homologie d'une variété de niveau non singulière de $\tilde{f}$ (resp. de $\tilde{f} \mid \{x_1 = 0\}$) une base distinguée de cycles évanescents. Il sera supposé que les chemins $u_1, \ldots, u_{\mu_0}, u'_1, \ldots, u'_{\mu_1}$ évitent les valeurs critiques $z_1, \ldots, z_{\mu_0}, z'_1, \ldots, z'_{\mu_1}$ de $\tilde{f}$ et de $\tilde{f} \mid \{x_1 = 0\}$ (pour $t \neq 0$). Comme nous l'avons dit plus haut, de tels systèmes de chemins définissent une suite de cycles évanescents $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\mu_0}$ et une suite de demi-cycles évanescents $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{\mu_1}$ dans le groupe d'homologie relatif $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$. L'homomorphisme bord $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon) \to H_{n-2}(V'_\varepsilon)$ du couple $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ fait passer un demi-cycle évanescent Δ'_j en un cycle évanescent, en homologie d'une variété de niveau non singulière de $\tilde{f} \mid \{x_1 = 0\}$, qui correspond au chemin u'_j. De là

et de la suite exacte du couple $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ il ressort que la suite d'éléments $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\mu_0}, \Delta'_1, \ldots, \Delta'_{\mu_1}$ forme une base dans le groupe d'homologie relatif $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$.

On montre que la dimension du groupe d'homologie $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ coïncide avec celle de la base du déploiement miniversel de la singularité de bord $f \mid x_1$, égale à $\dim_{\mathbf{C}}\, {}_n\mathcal{O}/(x_1\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \ldots \ldots, \partial f/\partial x_n)$, où ${}_n\mathcal{O}$ est l'anneau des germes de fonctions holomorphes en 0 de $\mathbf{C}^n$.

Tout ce qui précède nous porte à croire que le groupe d'homologie relatif $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ doit jouer pour la singularité de bord le même rôle que le groupe d'homologie absolu $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ pour les singularités ordinaires. Or, il se trouve que sur le groupe $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ on ne peut pas définir intrinsèquement la forme d'intersection et obtenir une formule analogue à celle de Picard-Lefschetz. On est donc amené à remplacer ce groupe par un autre, isomorphe comme le premier à un réseau d'entiers $Z^\mu = Z^{\mu_0+\mu_1}$ de dimension $\mu = \mu\,(f \mid x_1)$ mais sans isomorphisme canonique avec le groupe $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$. Ce groupe est défini comme suit.

On peut faire correspondre à la singularité de bord f encore une variété de niveau non singulière, à savoir : une variété de niveau $\hat{V}_\varepsilon$ d'une fonction correspondante $\hat{f}$ sur $\hat{\mathbf{C}}^n$, invariante par l'action du groupe Z_2. Sur cette variété de niveau est définie l'action d'une involution induite de son action sur $\hat{\mathbf{C}}^n$. L'espace quotient de $\hat{V}_\varepsilon$ par l'action de cette involution se confond avec la variété de niveau V_ε de f. La variété $\hat{V}_\varepsilon$ est un revêtement au-dessus de V_ε ramifié suivant V'_ε. On a $\dim H_{n-1}(\hat{V}_\varepsilon) = 2 \dim H_{n-1}(V_\varepsilon) + \dim H_{n-2}(V'_\varepsilon) = \dim H_{n-1}(V_\varepsilon) + \dim H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ (voir l'exemple au nº 5.1).

On distingue dans le groupe d'homologie $H_{n-1}(\hat{V}_\varepsilon, Z)$ deux sous-espaces H^+ et H^- qui correspondent aux deux représentations réelles irréductibles possibles du groupe Z_2. Le sous-espace H^+ se compose de classes d'homologie invariantes par l'action de l'involution σ (i.e. telles que $\sigma_* a = a$), et le sous-espace H^-, de classes d'homologie antiinvariantes $(\sigma_* a = -a)$. On a montré dans l'exemple du nº 5.1 que $\dim H^+ = \dim H_{n-1}(V_\varepsilon)$, $\dim H^- = \dim H_{n-1}(V_\varepsilon) + \dim H_{n-2}(V'_\varepsilon) = \dim H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$. C'est le groupe H^-, isomorphe au réseau d'entiers de dimension $\mu\,(f \mid \{x_1 = 0\})$, qui joue pour les singularités de bord le rôle dévolu au groupe $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ pour les singularités ordinaires. En particulier, la forme d'intersection est définie justement sur ce groupe (considéré comme sous-groupe du groupe d'homologie $H_{n-1}(\hat{V}_\varepsilon)$ d'une variété non singulière).

On peut construire une base dans H^- comme suit. Soit $\Delta_1, \ldots \ldots, \Delta_{\mu_0}, \Delta'_1, \ldots, \Delta'_{\mu_1}$ la base de cycles et demi-cycles évanescents de $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ construite plus haut d'après le système de chemins $u_1, \ldots, u_{\mu_0}, u'_1, \ldots, u'_{\mu_1}$ joignant les valeurs critiques $z_1, \ldots$

$\ldots, z_{\mu_0}, z'_1, \ldots, z'_{\mu_1}$ de $\tilde{f}$ et de $\tilde{f} \mid \{x_1 = 0\}$ à la valeur non critique z_0. L'image réciproque d'un cycle Δ_i ($i = 1, \ldots, \mu_0$) par l'application $\hat{V}_\varepsilon \to V_\varepsilon$ (qui est un revêtement à deux feuillets ramifié suivant V'_ε) se compose de deux cycles $\Delta_i^{(1)}, \Delta_i^{(2)}$ dont chacun admet une projection isomorphe sur Δ_i. Leur différence $\hat{\Delta}_i = \Delta_i^{(1)} - \Delta_i^{(2)}$ est un cycle antiinvariant en homologie de $\hat{V}_\varepsilon$. L'image réciproque d'un demi-cycle Δ'_j se compose elle aussi de deux demi-cycles $\Delta_j'^{(1)}$, $\Delta_j'^{(2)}$ qui se projettent isomorphiquement sur Δ'_j, mais les demi-cycles $\Delta_j'^{(1)}$ et $\Delta_j'^{(2)}$ ont la frontière commune (située sur la variété de ramification). Leur différence $\hat{\Delta}'_j = \Delta_j'^{(1)} - \Delta_j'^{(2)}$ est donc elle aussi un cycle antiinvariant absolu en homologie de $\hat{V}_\varepsilon$. Les cycles $\hat{\Delta}_1, \ldots$ $\ldots, \hat{\Delta}_{\mu_0}, \hat{\Delta}'_1, \ldots, \hat{\Delta}'_{\mu_1}$ forment une base dans le groupe H^- des classes d'homologie antiinvariantes.

On peut aussi les décrire d'une autre façon. Soit une fonction $\hat{\tilde{f}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) = \tilde{f}(\hat{x}_1^2, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$. Elle a $\mu_0 + \mu_1$ valeurs critiques $z_1, \ldots, z_{\mu_0}, z'_1, \ldots, z'_{\mu_1}$. Les valeurs $z_1, \ldots, z_{\mu_0}$ sont doublement dégénérées et ont lieu dans des couples de points critiques différents. A chacune de ces valeurs critiques z_i correspondent deux cycles évanescents $\hat{\Delta}_i^1, \hat{\Delta}_i^2$. On peut admettre que $\sigma_* \hat{\Delta}_i^1 = \hat{\Delta}_i^2$. A une valeur critique z'_j correspond un seul cycle évanescent Δ'_j. On voit sans peine que $\sigma_* \hat{\Delta}'_j = -\hat{\Delta}'_j$. Les cycles $\hat{\Delta}_i = \hat{\Delta}_i^1 - \hat{\Delta}_i^2$ et $\hat{\Delta}'_j$ sont antiinvariants, et les cycles $\hat{\Delta}_i^1 + \hat{\Delta}_i^2$, invariants par l'action de l'involution σ. La suite de cycles $\{\hat{\Delta}_i, \hat{\Delta}'_j\}$ se confond avec celle que nous avons décrite plus haut.

Nous avons donc défini pour les singularités de bord un réseau d'entiers H^- avec sa forme d'intersection. La base de H^- construite d'après le système de chemins $\{u_i, u'_j\}$ joignant les valeurs critiques z_i, z'_j de $\hat{\tilde{f}}$ à la valeur non critique z_0 contient μ_0 cycles évanescents « longs » $\hat{\Delta}_i$ ($= \Delta_i^{(1)} - \Delta_i^{(2)}$) et μ_1 cycles évanescents « courts » $\hat{\Delta}'_j$. Si le nombre des variables $n \equiv 3 \bmod 4$, on a $(\hat{\Delta}_i \circ \hat{\Delta}_i) = -4$, $(\hat{\Delta}'_j \circ \hat{\Delta}'_j) = -2$.

Sur le réseau H^- opère un groupe de monodromie qui est image de la représentation canonique $\pi_1(\mathbf{C} - \{z_i, z'_j\}) \to \operatorname{Aut} H^-$ du groupe fondamental du complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques de la fonction $\hat{\tilde{f}}$. Le groupe de monodromie est engendré par les opérateurs de monodromie correspondant aux lacets simples τ_i, τ'_j associés aux chemins u_i, u'_j. A un lacet simple τ'_j correspond alors un opérateur ordinaire de Picard-Lefschetz $h'_j(a) = a +$

$+ (-1)^{n(n+1)/2} (a \circ \Delta'_j) \Delta'_j$, et à un lacet τ_i, un opérateur de Picard-Lefschetz $h_i(a) = a + (-1)^{n(n+1)/2} (a \circ \Delta_i) \Delta_i/2$. Remarquons que l'indice d'intersection $(a \circ \Delta_i)$ d'un cycle antiinvariant $a \in H^-$ et d'un cycle évanescent long Δ_i est toujours pair. Si le nombre de variables est $n \equiv 1 \mod 2$, les opérateurs h_i et h'_j sont les réflexions dans des hyperplans orthogonaux (au sens de la forme d'intersection) aux cycles évanescents Δ_i et Δ'_j respectivement.

Comme pour les singularités ordinaires, on définit pour les singularités de bord le déploiement miniversel et les diagrammes de bifurcation d'ensembles et de fonctions. Le déploiement miniversel d'une singularité de bord $f \mid x_1$ peut être défini sous la forme

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \varphi_i(x) \quad (x \in \mathbf{C}^n,\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu) \in \mathbf{C}^\mu),$$

où les germes $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ engendrent une base de l'espace vectoriel ${}_n\mathcal{O}/(x_1\, \partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \ldots, \partial f/\partial x_n)$. L'ensemble (plus exactement son germe en 0) des valeurs des paramètres $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ dans la base du déploiement miniversel telles que soit la fonction $F(\cdot, \lambda)$, soit sa restriction au bord $\mathbf{C}^{n-1} = \{x_1 = 0\}$ ont 0 pour valeur critique est appelé *diagramme de bifurcation des ensembles* de la singularité de bord $f \mid x_1$ (et est noté Σ). Au lieu de la condition imposée aux valeurs des paramètres $\lambda \in \Sigma$, on peut exiger que 0 soit valeur critique de la fonction

$$\hat{F}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \lambda) = F(\hat{x}_1^2, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \lambda).$$

Le diagramme de bifurcation des ensembles d'une singularité de bord est réductible. C'est une réunion de deux composantes. La première est constituée par les valeurs des paramètres λ pour lesquelles 0 est valeur critique de la fonction $F(\cdot, \lambda)$ correspondante, et la seconde, par celles pour lesquelles 0 est valeur critique de la restriction de F au bord $\mathbf{C}^{n-1}$. Il est parfois plus commode de dire que la seconde composante est constituée par les valeurs de λ pour lesquelles l'hypersurface $\{x : F(x, \lambda) = 0\} \subset \mathbf{C}^n$ est non transversale au bord $\mathbf{C}^{n-1}$. Une telle formulation permet de ne pas spécifier le cas de $n = 1$.

Du fait que le diagramme de bifurcation des ensembles d'une singularité ordinaire est irréductible (théorème 2 du nº 3.2) découle l'irréductibilité des composantes du diagramme de bifurcation des ensembles d'une singularité de bord. De même que dans le théorème 4 du nº 3.2, on en déduit que le groupe de monodromie d'une singularité de bord opère transitivement sur les ensembles de cycles évanescents courts et longs (sans mélanger bien sûr ces derniers).

Pour les singularités de bord simples B_k, C_k, F_4 (voir Première partie, § 17), le diagramme de bifurcation d'ensembles peut être obtenu par la méthode proposée au nº 3.3 pour des singularités

ordinaires de fonctions. Cela veut dire qu'il est biholomorphiquement équivalent à la variété des orbites non régulières du groupe correspondant engendré par les réflexions et opérant sur le complexifié de l'espace euclidien. Les miroirs de deux types (orthogonaux aux racines longues et courtes respectivement) engendrent alors deux composantes du diagramme de bifurcation des ensembles de la singularité de bord simple.

Proposons-nous de le vérifier pour des singularités simples de type B_k ($f(x_1) = x_1^k$, $n = 1$) et C_k ($f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2^k$, $n = 2$). Leurs déploiements miniversels peuvent être définis comme suit:

$$\text{pour } B_k: F = x_1^k + \lambda_1 x_1^{k-1} + \ldots + \lambda_k,$$
$$\text{pour } C_k: F = x_1x_2 + x_2^k + \lambda_1 x_2^{k-1} + \ldots + \lambda_k.$$

Dans le premier cas comme dans le second, 0 n'est pas valeur critique de $F(\cdot, \lambda)$ si le polynôme $x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \ldots + \lambda_k$ est sans racines multiples, une variété de niveau locale de $F(\cdot, \lambda)$ est transversale au bord $\{x_1 = 0\}$ si 0 n'est pas racine de ce polynôme. Ainsi donc, les diagrammes de bifurcation des ensembles des singularités B_k et C_k sont identifiés à l'espace des polynômes de la forme $x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \ldots + \lambda_k$ qui ont des racines soit multiples, soit nulles.

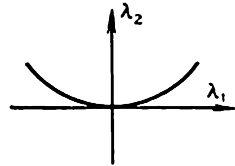


Fig. 48

Les groupes de Weyl de B_k et de C_k sont identiques. Ils réunissent les transformations de l'espace $\mathbf{R}^k$ (ou de son complexifié $\mathbf{C}^k$) qui sont des permutations de coordonnées, éventuellement avec changement de signe. Le rôle des miroirs est joué par les hyperplans $z_i = 0$ et $z_i = \pm z_j$. Dans un cas les premiers correspondent aux cycles courts et les seconds, aux cycles longs, et dans l'autre cas, inversement. L'espace des orbites de l'action du groupe de Weyl sur le complexifié $\mathbf{C}^k$ est identifié à l'espace des polynômes de degré k de la forme $x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \ldots + \lambda_k$ (à coefficients complexes) si l'on associe à un point $(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbf{C}^k$ un polynôme aux racines $z_1^2, \ldots, z_k^2$. L'espace des polynômes de degré k est isomorphe à un espace vectoriel complexe de dimension k. L'espace des orbites non régulières (i.e. l'image de la réunion des miroirs par l'application de factorisation) se compose des polynômes aux racines multiples ou nulles, i.e. se confond avec les diagrammes de bifurcation des ensembles des singularités B_k et C_k.

Les diagrammes de bifurcation des ensembles des singularités B_2 et C_2 se composent de deux courbes $\lambda_2 = 0$, $4\lambda_2 = \lambda_1^2$ (fig. 48).

Pour les singularités de bord simples (et aussi pour d'autres singularités de bord de deux variables), on peut décrire les bases formées de cycles évanescents et les formes d'intersection par les méthodes du § 4. On montre que les singularités de bord vérifient des théorè-

mes analogues aux théorèmes 1, 3 et 4 du § 4, mais nous n'allons pas nous attarder là-dessus. Pour les singularités simples B_k ($\pm x^k \pm y^2$), C_k ($xy \pm y^k$) et F_4 ($\pm x^2 + y^3$) les germes de fonctions équivariants correspondants sont définis sur le revêtement $\hat{\mathbf{C}}^2$ de l'espace $\mathbf{C}^2$ par les formules suivantes:

$$\text{pour } B_k: \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^{2k} + \hat{y}^2,$$

$$\text{pour } C_k: \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}(\hat{x}^2 - \hat{y}^{k-1}),$$

$$\text{pour } F_4: \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^4 + \hat{y}^3$$

(les signes sont choisis de façon à rendre réelles les courbes $\{\hat{f}=0\}$). Comme germes de fonctions ordinaires, ils présentent des singularités

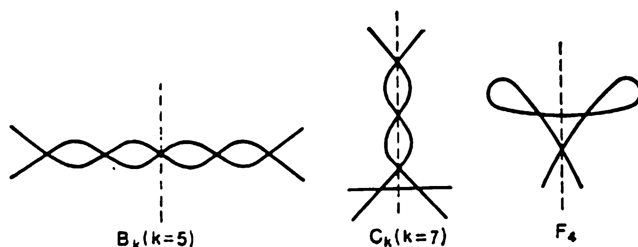


Fig. 49

des types A_{2k-1}, D_{k+1} et E_6 respectivement. Il est facile de construire les déformées $\tilde{\hat{f}}$ des germes de fonctions $\hat{f}$ (ou des germes de courbes $\{\hat{f} = 0\}$) vérifiant les conditions du théorème 1 du n° 4.1. et invariantes par l'involution qui opère sur $\hat{\mathbf{C}}^2$. En réalité, les déformées des singularités A_{2k-1}, D_{k+1} et E_6 utilisées au § 4 possèdent ces propriétés. Les courbes réelles correspondantes $\{\tilde{\hat{f}} = 0\}$ sont montrées sur la figure 49. La droite $x = 0$ est tracée en trait interrompu.

La base du groupe d'homologie d'une variété de niveau locale de la singularité $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{t}^2$ décrite dans le théorème 1 du n° 4.1 est invariante par l'involution σ: $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) \to (-\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$ opérant sur l'espace $\hat{\mathbf{C}}^3$. Plus exactement, on a ceci:

$$\sigma_* \Delta = -\Delta$$

si le cycle évanescent de base Δ correspond à un point critique de la fonction $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y})$ situé sur la droite $\{\hat{x} = 0\}$;

$$\sigma_* \Delta_1 = \Delta_2$$

si Δ_1, Δ_2 sont deux cycles évanescents de base qui correspondent à deux points critiques symétriques par rapport à la droite $\{\hat{x} = 0\}$.

On en déduit aussitôt que les diagrammes de Dynkine des singularités B_k, C_k et F_4 se présentent comme il est montré sur la figure 50. Remarquons cependant que les règles de lecture de ces diagrammes ne sont pas tout à fait les mêmes que dans le n° 2.8. Les flèches portées sur les arêtes indiquent la direction des sommets associés aux cycles évanescents longs (à indice de self-intersection —4) vers les sommets associés aux cycles évanescents courts (à indice de self-intersection —2). L'indice d'intersection de deux cycles évanescents

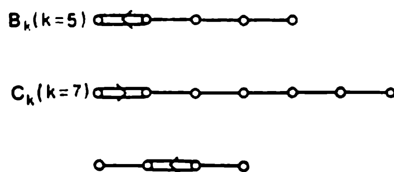


Fig. 50

associés à deux sommets joints par une arête de multiplicité k est égal à $2k$ si les deux cycles sont longs et à k si les deux cycles sont courts ou si l'un est long et l'autre court. Pour les diagrammes des singularités B_k, C_k et F_4 de la figure 50 cela signifie que deux cycles évanescents associés aux sommets joints par une arête de multiplicité 1 forment entre eux un angle de $2\pi/3$, et deux cycles évanescents associés aux sommets joints par une arête de multiplicité 2 font un angle égal à $3\pi/4$.

Mme I. Sherbak a montré que le passage de la fonction $f(x, y)$ de bord $\{x = 0\}$ à la fonction $f(x, y) + zx$ de bord $\{z = 0\}$ définit sur l'ensemble des classes de singularités de bord stablement équivalentes une involution qui permute une singularité considérée comme celle d'une variété sans bord et sa restriction au bord.

5.3. Topologie des intersections complètes. Soit $f = (f_1, \ldots, f_p)$: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ un germe d'application analytique définissant une intersection complète avec une singularité isolée en 0 ($n \geqslant p$, f_i: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$). Cela signifie que l'application f est de rang p en tout point (sauf 0) du germe d'espace analytique $\{f = 0\}$ (i.e. $\{x \in \mathbf{C}^n$: $f_1(x) = \ldots = f_p(x) = 0\}$). Autrement dit, la différentielle de f est un épimorphisme, ou, ce qui revient au même, rang $(\partial f_i/dx_j) = p$. Il s'ensuit que l'espace $\{f = 0\}$ est une variété complexe non singulière de dimension $(n - p)$ en tout point sauf 0.

Par analogie au lemme 1 du n° 2.1, on montre sans peine qu'il existe un $\rho > 0$ tel qu'une sphère $S_r \subset \mathbf{C}^n$ de rayon r tel que $0 < r \leqslant \rho$ de centre en 0 rencontre transversalement la variété $\{f = 0\}$.

Alors pour un $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbf{C}^p$ suffisamment petit ($\| z \| \leqslant \varepsilon_0$), l'espace $\{f = z\}$ rencontre transversalement la sphère S_ρ. L'espace $\{f = z\}$ est en général non singulier pour $z \neq 0$. L'ensemble (plus exactement, le germe) Σ des $z \in \mathbf{C}^p$ ($\| z \| \leqslant \varepsilon_0$) pour lesquels l'espace $\{f = z\}$ admet des points singuliers à l'intérieur de la boule B_ρ de rayon ρ centrée en 0 est appelé ensemble discriminant de l'application f. On voit sans peine que pour $z \in \Sigma$ l'espace analytique $\{f = z\}$ n'admet à l'intérieur de la boule B_ρ que des singularités isolées. En accord avec le théorème de Sard, le complémentaire de Σ est partout dense dans une boule $\{z : \| z \| \leqslant \varepsilon_0\} \subset \mathbf{C}^p$. Pour $z \notin \Sigma$ ($\| z \| \leqslant \varepsilon_0$) l'espace $F_z = \{f = z\} \cap B_\rho = \{x \in \mathbf{C}^n : \| x \| \leqslant \rho, f(x) = z\}$ est une variété à bord, complexe, non singulière de dimension $(n - p)$, de bord $\{f = z\} \cap S_\rho$. Les variétés F_z sont difféomorphes entre elles pour tout $z \notin \Sigma$, $\| z \| \leqslant \varepsilon_0$. On les appelle *variétés de niveau non singulières* de l'application f.

On a un résultat analogue au théorème 1 du n° 2.1 :

Théorème 4 ([151]). *Si le germe d'application* $f : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ *définit une intersection complète avec une singularité isolée en* 0, *toute variété de niveau non singulière* F_z *de l'application* f *est homotopiquement équivalente à un bouquet de quelques sphères de dimension* $(n - p)$.

Voici en grandes lignes le schéma de la démonstration.

Pour $p = 1$ l'assertion du théorème 4 découle du théorème 1 du n° 2.1 et est donc vérifiée. Supposons qu'elle soit déjà démontrée pour les applications $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^{p-1}, 0)$ définissant des intersections complètes de dimension $(n - p + 1)$ avec des singularités isolées en 0. Les points singuliers de l'application $f : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$, i.e. les points $x \in \mathbf{C}^n$ pour lesquels rang $(\partial f_i / \partial x_j) < p$, forment un germe d'espace analytique S. L'ensemble discriminant $(\Sigma, 0) \subset (\mathbf{C}^p, 0)$ est l'image de S par f. L'image réciproque de 0 par $f|_S : S \to \mathbf{C}^p$ se réduit à un point unique $0 \in \mathbf{C}^n$. Par conséquent, $f|_S$ est une application propre (dans un voisinage suffisamment restreint de $0 \in \mathbf{C}^n$), si bien que le germe d'ensemble discriminant Σ est un germe de sous-espace analytique de dimension au moins non supérieure à $(p - 1)$ dans l'espace $(\mathbf{C}^p, 0)$. Il s'ensuit que pour presque toute $l \subset \mathbf{C}^p$ passant par 0, l'intersection $l \cap \Sigma$ a un point isolé en 0. Fixons une droite de ce type. On peut admettre que ε_0 est si petit qu'à l'intérieur d'une boule $\{\| z \| \leqslant \varepsilon_0\}$ dans l'espace $\mathbf{C}^p$ l'intersection $l \cap \Sigma$ se réduit à un point $0 \in \mathbf{C}^p$. Quitte à faire au besoin un changement linéaire de coordonnées $z_1, \ldots, z_p$ dans $\mathbf{C}^p$, on peut admettre que la droite l se confond, en coordonnées nouvelles, avec l'axe $z_1 = \ldots = z_{p-1} = 0$. Dans ce cas le sous-espace $f^{-1}(l) \subset (\mathbf{C}^n, 0)$, confondu avec la variété de niveau nul de l'application $f' = (f_1, \ldots, f_{p-1}) : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^{p-1}, 0)$, est une intersection complète de dimension $(n - p + 1)$ avec un point singulier isolé en 0. Nous avons montré que presque tout changement linéaire du système d'équa-

tions $f_1 = \ldots = f_p = 0$ définissant l'intersection complète de dimension $(n - p)$ avec une singularité isolée en 0 conduit à un nouveau système d'équations tel que les $(p - 1)$ premières équations $(f_1 = \ldots = f_{p-1} = 0)$ définissent elles aussi une intersection complète (de dimension $(n - p + 1)$) avec une singularité isolée en 0.

Par hypothèse de récurrence, pour presque tout z' suffisamment petit, $z' = (z_1, \ldots, z_{p-1}) \in \mathbf{C}^{p-1}$, l'ensemble $F' = F'_{z'} = (f')^{-1}(z') \cap B_\rho$ est une variété (à bord) complexe non singulière de dimension $(n - p + 1)$ homotopiquement équivalente à un bouquet de sphères de dimension $(n - p + 1)$. On montre que, pour un z' suffisamment petit, toute la non-trivialité homotopique de $F'_{z'}$ se trouve entièrement concentrée dans un voisinage restreint de 0. Plus exactement, cela signifie que pour $\| z' \| \ll \varepsilon_p^0$ l'espace $F' = F'_{z'}$ est homotopiquement équivalent à son sous-espace $F'' = F' \cap \cap f_p^{-1}(\{ | z_p | \leqslant \varepsilon_p^0\}) = \{x \in F' : f_p(x) \leqslant \varepsilon_p^0\}$. La démonstration demande un raisonnement par récurrence assez rigoureux, mais nous omettrons de l'entreprendre ici.

La restriction $f_{p|F'}$ de la fonction f_p à F' définit une application de la variété F' dans la droite complexe $\mathbf{C}$ qui possède les propriétés décrites au nº 1.1, avec comme U un disque $\{| z_p | \leqslant \varepsilon_p^0\}$. La fonction $f_{p|F'}$ peut avoir en général des points critiques dégénérés. Quitte à remplacer $f_{p|F'}$ par sa déformée $\widetilde{f}_p$, nous obtiendrons une nouvelle fonction sur F' qui possède les mêmes propriétés. On peut admettre que, sur l'espace $\widetilde{F}'' = \widetilde{f}_p^{-1}(\{| z_p | \leqslant \varepsilon_p^0\})$, la fonction $\widetilde{f}_p$ n'admet que des points critiques non dégénérés, au nombre de ν_0, à valeurs critiques distinctes $z^{(1)}, \ldots, z^{(\nu_0)}$ situées à l'intérieur d'un disque $\{| z_p | < \varepsilon_p^0\}$. Le type d'homotopie de l'espace $\widetilde{F}''$, difféomorphe à F'', est un bouquet de sphères de dimension $(n - p + 1)$. Les variétés de niveau non singulières $\widetilde{f}_p^{-1}(z_p)$ de $\widetilde{f}_p$ sur la variété F' sont difféomorphes à des variétés de niveau non singulières de $f_{p|F'}$ (pour $| z_p | \leqslant \varepsilon_p^0$), qui se confondent avec les variétés de niveau non singulières de l'application f.

La situation obtenue est très semblable à celle que nous avions envisagée en démontrant le théorème 1 du nº 2.1. Le rôle de la fonction $\widetilde{f}$ sur la boule B_ρ dans l'espace $\mathbf{C}^n$ est joué par la fonction $\widetilde{f}_p$ sur la variété F'. Cette fonction définit, au-dessus du complémentaire de l'ensemble $\{z^{(1)}, \ldots, z^{(\nu_0)}\}$ de ses valeurs critiques dans un disque $\{| z_p | \leqslant \varepsilon_p^0\}$, une fibration localement triviale avec comme fibres des variétés de niveau non singulières de l'application f. L'unique différence est que l'image réciproque du disque $\{| z_p | \leqslant \leqslant \varepsilon_p^0\}$ par l'application $\widetilde{f}_p$ n'est pas contractile mais homotopiquement équivalente à un bouquet de plusieurs (μ_1) sphères de dimension $(n - p + 1)$.

Soient $z^{(0)}$ la valeur non critique de $\tilde{f}_p$ avec $|z^{(0)}| = \varepsilon_p^0$, $\tilde{f}_p^{-1}(z^{(0)}) = F$, $\tilde{f}_p^{-1}(\{|z_p| \leqslant \varepsilon_p^0\}) = \tilde{F}''$ (l'espace $\tilde{F}''$ est homotopiquement équivalent à un bouquet de μ_1 sphères de dimension $(n - p + 1)$).

Choisissons un système de chemins u_i $(i = 1, \ldots, \nu_0)$ joignant les valeurs critiques $z^{(1)}, \ldots, z^{(\nu_0)}$ de la fonction $\tilde{f}_p$ à sa valeur non critique $z^{(0)}$ et vérifiant les conditions énumérées dans la définition d'une base distinguée (nº 1.2). Cela signifie que les chemins u_i sont sans points de self-intersection et n'ont d'autres points communs que $z^{(0)}$. Un tel système de chemins définit comme précédemment une suite de ν_0 cycles évanescents $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\nu_0}$ dans le groupe d'homologie $H_{n-p}(F; Z)$ d'une variété de niveau non singulière F de l'application f. Par le même raisonnement que pour le théorème 1 du nº 2.1, nous montrons que

1) l'espace $\tilde{F}'' = \tilde{f}_p^{-1}(\{|z_p| \leqslant \varepsilon_p^0\})$ est homotopiquement équivalent à son sous-espace $X = \tilde{f}_p^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\nu_0}\{u_i(t)\}\right)$, image réciproque de la réunion des chemins u_i;

2) l'espace quotient $X/F = X/\tilde{f}_p^{-1}(z^{(0)})$ est homotopiquement équivalent à un bouquet de ν_0 sphères de dimension $(n - p + 1)$;

3) sous l'action de l'homomorphisme bord $H_{n-p+1}(X/F) = H_{n-p+1}(X, F) \to H_{n-p}(F)$ du couple (X, F), les cycles correspondant à ces sphères passent en classes d'homologie de cycles évanescents $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\nu_0}$.

Il s'ensuit que la variété de niveau non singulière F de l'application f est simplement connexe pour $(n - p) > 1$; pour $(n - p) \leqslant 1$ la démonstration du théorème 4 est encore plus simple. Des assertions générales sur les sous-variétés complexes dans l'espace $\mathbf{C}^n$ il découle que les groupes d'homologie $H_i(F; Z)$ de F sont nuls pour $i > (n - p)$ et que le groupe $H_{(n-p)}(F; Z)$ est abélien libre. Cela ressort par exemple du fait que toute sous-variété complexe non singulière de dimension (complexe) m d'une boule B_ρ dans $\mathbf{C}^n$ est homotopiquement équivalente à un complexe cellulaire fini de dimension (réelle) m. Cette proposition se démontre exactement de la même façon que le théorème de A. Andreotti et T. Frankel dans [244], à ceci près que la variété complexe n'est pas considérée dans une boule B_ρ mais dans $\mathbf{C}^n$ tout entier.

De la suite d'homologie exacte du couple (X, F)

$$\ldots \to H_{i+1}(X) \to H_{i+1}(X, F) \to H_i(F) \to H_i(X) \to \ldots$$

il découle que $H_i(F) = 0$ pour $i \neq (n - p)$ et qu'on a la suite exacte courte

$$0 \to H_{n-p+1}(X) \to H_{n-p+1}(X, F) \to H_{n-p}(F) \to 0$$

dans laquelle tous les groupes sont abéliens libres. Il s'ensuit qu'une variété de niveau non singulière F de l'application f est homotopiquement équivalente à un bouquet de $(\nu_0 - \mu_1)$ sphères de dimension $(n - p)$, où μ_1 est le rang du groupe d'homologie de dimension $(n - - p + 1)$ d'une variété de niveau non singulière F' de l'application $f' = (f_1, \ldots, f_{p-1})$, et ν_0 est le nombre des points critiques de f_p sur F' (compte tenu de leurs multiplicités). Cela achève la démonstration du théorème 4.

Par analogie au cas d'une singularité ordinaire de fonction $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, le nombre $\mu_0 = (\nu_0 - \mu_1)$, égal au rang du groupe d'homologie de dimension $(n - p)$ d'une variété de niveau non singulière F du germe d'application $f\colon (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$, est appelé *nombre de Milnor* de la singularité isolée du germe f.

Pour la démonstration du théorème 4 nous avons construit la suite exacte courte

$$0 \to Z^{\mu_1} \to Z^{\nu_0} \to H_{n-p}(F; Z) \to 0$$

dans laquelle μ_1 est le nombre de Milnor de la singularité isolée du germe $f' = (f_1, \ldots, f_{p-1})\colon (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^{p-1}, 0)$ qu'on obtient à partir du germe f en négligeant l'une des composantes (f_p), et ν_0 est le nombre des points critiques (compte tenu de leurs multiplicités) de f_p sur une variété de niveau non singulière de f' au voisinage du point singulier. La base dans le groupe Z^{ν_0} est formée par les cycles évanescents (formels) $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\nu_0}$ associés aux chemins $u_1, \ldots, u_{\nu_0}$ décrits plus haut. Leurs indices d'intersection sur une variété de niveau non singulière F du germe f définissent la forme bilinéaire sur le groupe Z^{ν_0}. Le groupe Z^{μ_1} se confond avec le groupe des relations linéaires entre les cycles évanescents $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\nu_0}$ dans le groupe d'homologie $H_{n-p}(F)$ d'une variété de niveau non singulière de l'application f. Il est bien sûr contenu dans le noyau de la forme définie sur le groupe Z^{ν_0} par les indices d'intersection.

Les entiers naturels μ_1, ν_0 dépendent naturellement du choix du système de coordonnées $z_1, \ldots, z_p$ dans l'espace $\mathbf{C}^p$. Or, on voit sans peine que pour un système de coordonnées génériques $z_1, \ldots, z_p$ les nombres μ_1, ν_0 ne dépendent que du germe $f\colon (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ lui-même. On définit ainsi intrinsèquement, pour la singularité isolée d'un germe d'intersection complète, la suite exacte courte

$$0 \to Z^{\mu_1} \to Z^{\nu_0} \to H_{n-p}(F)\ (= Z^{\mu_0}) \to 0.$$

D'une façon analogue, pour un germe $f'\colon (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^{p-1}, 0)$ est définie la suite exacte courte

$$0 \to Z^{\mu_2} \to Z^{\nu_1} \to Z^{\mu_1} \to 0,$$

puis les suites exactes courtes

$$0 \to Z^{\mu_2} \to Z^{\nu_2} \to Z^{\mu_1} \to 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$0 \to Z^{\mu_{n-p-1}} \to Z^{\nu_{n-p-2}} \to Z^{\mu_{n-p-2}} \to 0,$$
$$0 \to Z^{\nu_{n-p-1}} \xrightarrow{\sim} Z^{\mu_{n-p-1}} \to 0$$

qui donnent ensemble une suite exacte longue (la résolvante)

$$0 \to Z^{\nu_{n-p-1}} \to Z^{\nu_{n-p-2}} \to \dots \to Z^{\nu_2} \to Z^{\nu_1} \to Z^{\nu_0} \to H_{n-p}(F\,;Z) \to 0$$

constituée de groupes abéliens libres. Ici ν_i est le nombre des points critiques (compte tenu de leurs multiplicités) de la fonction f_{p-i} sur une variété de niveau non singulière du germe d'application $(f_1, \dots, f_{p-i-1})$: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^{p-i-1}, 0)$ (dans un système de coordonnées générique choisi dans $(\mathbf{C}^p, 0)$).

Pour un germe d'application définissant une intersection complète avec une singularité isolée, on peut définir sa matrice des intersections comme celle des cycles évanescents $\Delta_1, \dots, \Delta_{\nu_0}$ décrits plus haut, ainsi que le diagramme correspondant (pour $n - p \equiv 2 \bmod 4$). Rappelons que les cycles $\Delta_1, \dots, \Delta_{\nu_0}$ engendrent le groupe d'homologie $H_{n-p}(F\,;Z)$ de dimension $(n-p)$ d'une variété de niveau non singulière mais ne forment pas une base dans ce groupe. Donc, à l'exception du cas trivial où l'intersection complète définie par $f' = (f_1, \dots, f_{p-1})$ est non singulière et l'intersection complète définie par f est par suite isomorphe à un germe d'hypersurface, la matrice des intersections d'un tel germe d'application est toujours dégénérée et le nombre des sommets du diagramme correspondant est toujours supérieur au nombre de Milnor de la singularité.

5.4. Singularités des projections sur droite. On appelle *projection sur droite* (ou projection tout court dans le texte qui suit) le triplet

$$E \hookrightarrow (\mathbf{C}^n, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbf{C}, 0)$$

dans lequel E est un germe d'intersection complète de codimension p dans $\mathbf{C}^n$, avec un point singulier isolé en 0, π: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ la projection linéaire le long d'un hyperplan $\mathbf{C}^{n-1} = \pi^{-1}(0) \subset \mathbf{C}^n$. On dit que deux projections $E_1 \hookrightarrow (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ et $E_2 \hookrightarrow (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ sont équivalentes si elles rendent commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \hookrightarrow & (\mathbf{C}^n, 0) & \to & (\mathbf{C}, 0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_2 & \hookrightarrow & (\mathbf{C}^n, 0) & \to & (\mathbf{C}, 0), \end{array}$$

dans lequel toute flèche verticale est un isomorphisme au voisinage de 0.

Comme d'ordinaire, on dit que la singularité de la projection $E \subset (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ est simple s'il existe parmi ses déformées un nombre fini de projections distinctes par rapport à l'équivalence décrite. Les singularités simples de projections sont décrites dans [129]. Elles éxistent pour $p = 1$ et $p = 2$. Pour décrire leurs représentants, introduisons dans $\mathbf{C}^n$ un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de telle façon que la projection π envoie un point $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n$ dans le point $x_1 \in \mathbf{C}$. Pour $p = 1$ les singularités simples de projections existent pour tout $n \geqslant 2$. Elles se définissent par les équations $f_1 = 0$ avec les fonctions $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ suivantes (ici $q = x_3^2 + \ldots + x_n^2$):

$A_0 : f_1 = x_2$;

$X_\mu : f_1 = x_1 + X_\mu$, où X_μ est une des singularités simples de fonctions de $(n-1)$ variables $x_2, \ldots, x_n$ (A_μ, D_μ ou E_μ avec $\mu > 0$);

$B_\mu : f_1 = x_1^\mu + x_2^2 + q \quad (\mu \geqslant 2)$;

$C_\mu : f_1 = x_1 x_2 + x_2^\mu + q \quad (\mu \geqslant 3)$;

$F_4 : f_1 = x_1^2 + x_2^3 + q$.

Pour $p = 2$ les singularités simples de projections existent pour $n = 3$. Elles se définissent par les équations $f_1 = f_2 = 0$, où les fonctions f_1, f_2 sont les suivantes:

$$C_{k+l}^{k,\,l} : f_1 = x_2 x_3, \qquad f_2 = x_1 + x_2^k + x_3^l \qquad (2 \leqslant k \leqslant l);$$

$$F_{2k+1} : f_1 = x_2^2 + x_3^2 \qquad f_2 = x_1 + x_3^k \qquad (k \geqslant 2);$$

$$F_{2k+4} : f_1 = x_2^2 + x_3^3, \qquad f_2 = x_1 + x_2 x_3^k \qquad (k \geqslant 1).$$

Fixons une projection linéaire $\pi : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ le long d'un hyperplan $\mathbf{C}^{n-1} \subset \mathbf{C}^n$. Alors les germes d'intersections complètes E_1, E_2 intervenant dans les singularités équivalentes de projections $E_i \subset (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ $(i = 1, 2)$ se déduisent les uns des autres sous l'action d'un isomorphisme analytique local $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ par lequel l'hyperplan $\mathbf{C}^{n-1}$ revient à lui-même. Ainsi donc, à la singularité d'une projection $E \subset (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ correspond un germe d'intersection complète E avec une singularité isolée en 0 considéré au difféomorphisme analytique local près $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ envoyant l'hyperplan $\mathbf{C}^{n-1} \subset \mathbf{C}^n$ dans lui-même. Pour cette raison, on peut dire que les singularités de projections sont une généralisation et, dans un certain sens, une synthèse de singularités de bord

et de singularités des germes d'intersections complètes dont nous avons parlé au n° 5.2 et au n° 5.3 respectivement.

Conformément aux n°s 5.2 et 5.3, pour les singularités de bord (i.e. pour les singularités isolées des germes de fonctions ou d'hypersurfaces dans $(\mathbf{C}^n, 0)$ considérées aux isomorphismes analytiques locaux près de l'espace $(\mathbf{C}^n, 0)$ conservant son hyperplan $\mathbf{C}^{n-1} \subset \mathbf{C}^n$) et pour les singularités isolées des germes d'intersections complètes dans $(\mathbf{C}^n, 0)$, on peut, par analogie aux singularités ordinaires de fonctions, définir un réseau d'entiers avec une forme bilinéaire entière, ainsi que les collections d'éléments privilégiées (distinguées) qui définissent cette forme. La différence par rapport au cas des singularités ordinaires de fonctions réside, dans le premier cas, en ce que, parmi ces éléments, on trouve des cycles évanescents « courts » aussi bien que « longs » (pour $n \equiv 3 \bmod 4$ leurs indices de self-intersection sont -2 et -4 respectivement). Dans le second cas la différence est que la collection des éléments en question est redondante : on entend par là que son cardinal est plus grand que la dimension du réseau, si bien que ces éléments sont linéairement dépendants sur le réseau. Par les raisonnements développés dans les n°s 5.2 et 5.3, on définit également pour la singularité d'une projection $E \hookrightarrow (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un réseau d'entiers muni d'une forme bilinéaire entière, ainsi que des collections d'éléments privilégiées définissant cette forme. Ces collections présentent d'ailleurs les deux différences décrites par rapport au cas des singularités ordinaires de fonctions : elles contiennent des cycles évanescents à la fois courts et longs et leur cardinal est plus grand que la dimension du réseau.

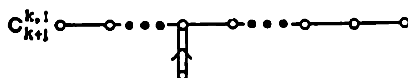
La construction exacte du réseau et des collections d'éléments distinguées dans ce réseau est la suivante. Supposons que l'intersection complète $E \hookrightarrow (\mathbf{C}^n, 0)$ soit définie par la famille d'équations $f_1 = f_2 = \ldots = f_p = 0$ ($\dim E = n - p$). Quitte à faire un changement linéaire générique de ce système d'équations, on peut admettre que le système d'équations $f_1 = f_2 = \ldots = f_{p-1} = 0$ définit une intersection complète de dimension $(n - p + 1)$ avec une singularité isolée en 0 (voir n° 5.3). Une variété de niveau non singulière $F' = F'_{z'} = \{f_1 = z_1, \ldots, f_{p-1} = z_{p-1}\} \cap B_\rho$ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dimension $(n - p + 1)$ dont le nombre est indépendant du choix concret du changement linéaire du système d'équations générique. L'intersection de cette variété de niveau avec un hyperplan $\mathbf{C}^{n-1} \subset \mathbf{C}^n$ est une sous-variété non singulière de dimension $(n - p)$ dans la variété F' (toujours pour un choix générique du système d'équations), et la fonction f_p définit sur F' une fonction qui a des points critiques isolés. Quitte à remplacer au besoin la fonction f_p par sa déformée, on peut admettre que f_p ne possède sur les variétés F' et $F' \cap \mathbf{C}^{n-1}$ que des points critiques non dégénérés à valeurs critiques distinctes. Prenant le couple de variétés

$(F', F' \cap \mathbf{C}^{n-1})$ et la fonction f_p sur ce couple, on peut réaliser la construction décrite dans le n° 5.2 pour le couple $(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^{n-1})$. Cela signifie qu'on considère un revêtement à deux feuillets $\hat{F}'$ de F' ramifié suivant la sous-variété $F' \cap \mathbf{C}^{n-1}$, et une fonction $\hat{f}_p$ qu'on déduit de f_p en relevant celle-ci sur l'espace de revêtement. Sur une variété de niveau de $\hat{f}_p$ opère une involution qui permute les feuillets du revêtement. On distingue dans le groupe d'homologie entière d'une variété de niveau non singulière de $\hat{f}_p$ un sous-groupe H^- qui réunit les classes d'homologie antiinvariantes par l'involution. C'est H^- qui constitue le réseau d'entiers associé à la singularité de la projection $E \subset (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$. Au système de chemins joignant les valeurs critiques de $\hat{f}_p$ à sa valeur non critique (et vérifiant les conditions imposées au système de chemins qui définit une base distinguée) est associée une suite de cycles évanescents « ordinaires » en homologie d'une variété de niveau non singulière de $\hat{f}_p$ sur $\hat{F}'$: deux cycles pour chaque valeur critique de la fonction $f_{p/F'}$ et un cycle pour chaque valeur critique de la fonction $f_{p|F' \cap \mathbf{C}^{n-1}}$. L'involution permute les premiers et opère sur les seconds comme multiplication par (-1). Les différences des cycles correspondant aux valeurs critiques de $f_{p|F'}$ et les cycles correspondant aux valeurs critiques de $f_{p|F' \cap \mathbf{C}^{n-1}}$ engendrent le groupe H^- des cycles antiinvariants en homologie d'une variété de niveau non singulière de $\hat{f}_p$ sur $\hat{F}'$. C'est cette suite de cycles qui doit être considérée comme distinguée dans le réseau d'entiers H^-.

Puisque le groupe d'homologie de la variété $\hat{F}'$ (à la différence de l'espace $\mathbf{C}^n$) est non trivial en général, le nombre des cycles est plus grand que la dimension du réseau H^- (exactement égal à la somme des dimensions de H^- et du réseau constitué de classes d'homologie antiinvariantes de $\hat{F}'$). Les indices d'intersection des cycles décrits permettent de tracer le diagramme de Dynkine correspondant d'après les mêmes règles que dans le n° 5.2. On ne doit cependant pas oublier que ces règles définissent le diagramme d'après les indices d'intersection des cycles évanescents pour $n - p \equiv 2 \mod 4$. Donc, pour $p = 2$ $(n - p = 1)$, il convient de faire une conversion formelle de la matrice des intersections, pareille à celle qu'on fait en ajoutant à une singularité ordinaire d'une fonction le carré d'une nouvelle variable (voir n° 2.8), après quoi on construit le diagramme comme s'il y avait $n - p \equiv 2 \mod 4$. Dans le cas envisagé cela signifie que l'i-ième et le j-ième sommets sont reliés par une arête de multiplicité $(\Delta_i \circ \Delta_j)$ (si l'un quelconque au moins des cycles Δ_i, Δ_j est court) ou de multiplicité $(\Delta_i \circ \Delta_j)/2$ (si les deux cycles sont longs), $i < j$ (dans l'ordre ordinaire des cycles $\{\Delta_k\}$ dans la suite

distinguée) ; les flèches sur les arêtes partent des sommets correspondant aux cycles évanescents longs et aboutissent aux sommets correspondant aux cycles évanescents courts.

On voit sans peine que les diagrammes des singularités simples de projections sur droite pour $p = 1$ se confondent avec les diagram-



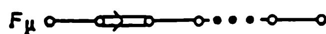


Fig. 51

mes de même nom des singularités ordinaires de fonctions ou des singularités de bord. Les diagrammes des singularités des projections $C^{k,l}_{k+l}$ $(2 \leqslant k \leqslant l)$ et F_μ $(\mu \geqslant 5)$ se présentent comme il est montré sur la figure 51 ([129] ; les sommets ne sont pas numérotés).

CHAPITRE II

INTÉGRALES OSCILLANTES

Le présent chapitre est consacré à l'étude du comportement asymptotique des intégrales oscillantes, i.e. des intégrales de la forme

$$I(\tau) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f(x)} \varphi(x)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

pour des valeurs élevées du paramètre réel τ. Ici f et φ sont des fonctions différentiables. La fonction f est appelée *phase*, et la fonction φ, *amplitude*. Conformément au principe de la phase stationnaire, ce sont les voisinages des points critiques de la phase qui apportent la plus grande contribution à la série asymptotique. Dans ce chapitre nous considérons le comportement asymptotique en fonction des différentes caractéristiques des points critiques de la phase (désingularisation, polyèdres de Newton) et nous proposons des méthodes de calcul du développement asymptotique. Le chapitre suivant sera consacré à l'étude du comportement asymptotique en fonction de la monodromie et des structures de Hodge mixtes des points critiques.

Pendant les 10 ou 15 dernières années, la théorie des singularités s'est trouvée étroitement liée à l'étude des intégrales oscillantes. D'un côté, beaucoup de problèmes de la théorie des singularités ont résulté des tentatives de comprendre le comportement des intégrales. D'un autre côté, un grand nombre d'études des points critiques se sont trouvé des applications immédiates dans les études du comportement asymptotique d'intégrales. Rappelons à titre d'exemple que la classification des points critiques simples de fonctions est née comme sous-produit du calcul des développements asymptotiques de quelques intégrales oscillantes élémentaires (voir [9, 11]). La relation entre le comportement asymptotique des intégrales et les structures de Hodge mixtes des points critiques en est un autre exemple (voir chapitre III).

§ 6. Discussion des résultats

6.1. Exemples, définitions.

A. Intégrales oscillantes et oscillations à ondes courtes. Dans beaucoup de problèmes d'optique, d'acoustique, de mécanique des quanta, de théorie des équations aux dérivées partielles, de calcul des probabilités, de théorie des nombres, on est amené à étudier des intégrales oscillantes pour des valeurs élevées du paramètre.

Exemple. Soit une surface dans l'espace tridimensionnel. Supposons que chaque point de la surface émette une onde sphérique de fréquence et de longueur données. Supposons que la longueur d'onde soit faible devant les dimensions de la surface et devant la vitesse de variation de l'amplitude de l'onde lors du changement du point émetteur.

Les oscillations en un point y de l'espace sont définies par la fonction

$$e^{2\pi i\omega t}\int\limits_S \frac{e^{2\pi i\|x-y\|/\lambda}}{\|x-y\|}\,\varphi(x)\,dx$$

dans laquelle t est le temps, ω la fréquence angulaire (pulsation), λ la longueur d'onde, S l'aire de la surface émettrice, φ l'amplitude, dx l'élément d'aire. Ainsi donc, l'oscillation complexe est définie par une intégrale oscillante où le rôle de grand paramètre réel est joué par l'inverse de la longueur d'onde, et celui de la phase, par une fonction de la distance séparant le point émetteur d'un point fixé de l'espace.

Ce sont les voisinages des points critiques de la phase qui apportent la plus grande contribution à l'oscillation complexe (i.e. à l'intégrale oscillante). Si tous les points critiques de la phase sont non dégénérés, la contribution de chacun est proportionnelle à la longueur d'onde. Si la phase admet des points critiques dégénérés, leurs voisinages restreints apportent à l'oscillation complexe une contribution encore plus importante: la longueur d'onde intervenant dans ce cas avec un degré inférieur à 1. En règle générale, la fonction sur la surface égale à la distance séparant le point émetteur d'un point fixe de l'espace n'admet que des points critiques non dégénérés. Si cette fonction a un point critique dégénéré, le point fixe en question est appelé *point caustique* ou *point focal*. Le lieu des points critiques dans l'espace est une nouvelle surface appelée *caustique*. Dans les points de la caustique l'oscillation complexe a une amplitude singulièrement élevée. Si la surface émet des ondes de lumière, la caustique est le lieu des points anormalement lumineux. On peut la voir sur un mur éclairé par les rayons lumineux réfléchis

par une surface concave (par l'intérieur d'une tasse par exemple).

Voici une autre définition de la caustique. Une caustique est l'ensemble des valeurs critiques de l'application exponentielle d'un fibré normal à la surface émettrice. Rappelons la définition de l'application exponentielle. Tout point du fibré normal à une surface est un couple constitué par un point de la surface et le vecteur appliqué en ce point et normal à la surface. L'application exponentielle associe à un tel couple un deuxième point de l'espace, qui est le point terminal du vecteur.

Il existe enfin une troisième définition de la caustique. Sur la normale à la surface émettrice, portons les rayons de courbure principaux. Le lieu des points terminaux de tous ces segments est précisément la caustique (voir [140]).

Citons encore une source d'intégrales oscillantes. Un des problèmes classiques de théorie des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles est le problème de recherche du développement asymptotique par rapport au paramètre de la solution du problème de Cauchy à données initiales rapidement oscillantes. Les méthodes asymptotiques (voir [234 à 236]) conduisent dans ce cas au résultat suivant. Pour tout entier naturel N, dans un voisinage restreint d'un point quelconque y^0, la solution du problème de Cauchy se laisse mettre sous la forme d'une somme finie d'intégrales oscillantes

$$\int e^{i\tau F(y,\, x)} \varphi(y,\, x,\, (i\tau)^{-1})\, dx$$

et d'un terme résiduel d'ordre $o(\tau^{-N})$ pour $\tau \to +\infty$. Dans cette intégrale F est une fonction à valeurs réelles, τ le grand paramètre du problème, x des paramètres réels, φ une fonction à support borné en x qui est un polynôme en $(i\tau)^{-1}$. Le calcul du comportement asymptotique de la solution du problème de Cauchy se réduit donc au calcul des séries asymptotiques des intégrales oscillantes.

On trouve dans les travaux de M. Berry et de J. Nye (voir [47]) de nombreux exemples de problèmes physiques dans lesquels on est amené à étudier le comportement asymptotique d'intégrales. Notons aussi les articles intéressants [30, 120, 271].

B. Principe de la phase stationnaire. Son énoncé est: ce sont les voisinages des points critiques de la phase qui apportent la plus grande contribution à l'intégrale oscillante.

Théorème 1. *Supposons que l'amplitude d'une intégrale oscillante soit à support compact et que sa phase soit sans points critiques sur le support de l'amplitude. Alors, quand le paramètre de l'intégrale oscillante tend vers* $+\infty$, *l'intégrale tend vers* 0 *plus vite que n'importe quelle puissance du paramètre.*

Démonstration. Supposons pour commencer que l'intégrale soit de dimension un. Intégrons-la par parties:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau f(x)}\varphi(x)\,dx = \frac{-1}{i\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau f(x)}(\varphi(x)/f'(x))'\,dx.$$

Quitte à répéter l'intégration autant de fois que nécessaire, nous verrons que le théorème est vérifié.

En dimension >1 on procède à une partition de l'unité et au choix de nouvelles variables d'intégration où la fonction phase est une des variables.

C. Intégrale de Fresnel. Une intégrale oscillante dont la phase n'a que des points critiques non dégénérés est appelée *intégrale de Fresnel.*

Exemple. Considérons une intégrale oscillante de dimension un avec comme phase la fonction x^2. On voit sur la figure 52 la courbe

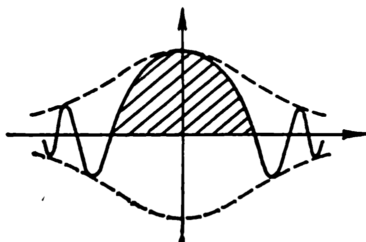


Fig. 52

$y = \cos(\tau x^2)\,\varphi(x)$, partie réelle de l'expression sous le signe somme de l'intégrale oscillante. Il est clair que pour τ grand l'intégrale est proportionnelle à l'aire sous la première demi-onde, i.e. à $\varphi(0)\,\tau^{-1/2}$. Le calcul exact montre que pour $\tau \to +\infty$ l'intégrale oscillante se laisse mettre sous la forme

$$\varphi(0)\sqrt{\pi/\tau}\exp(i\pi/4)$$

plus un terme résiduel de l'ordre de $O(\tau^{-3/2})$ (voir [108]).

Considérons une intégrale de Fresnel de dimension >1:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \exp(i\tau f(x))\,\varphi(x)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Théorème 2 (voir [107, 108]). *Supposons que la phase de l'intégrale ci-dessus ait un point critique non dégénéré à l'origine et que le support de l'amplitude soit compact et ne contienne aucun autre point critique de la phase. Alors, pour* $\tau \to +\infty$, *l'intégrale peut*

s'écrire

$$\varphi(0)(2\pi/\tau)^{n/2}\exp(i\tau f(0)+$$
$$+(i\pi/4)\operatorname{sign} f''_{xx}(0))\,|\det f''_{xx}(0)|^{-1/2}+O(\tau^{-n/2-1}),$$

où sign $f''_{xx}(0)$ *est la signature de la matrice des dérivées secondes de la phase à l'origine, et* det $f''_{xx}(0)$ *le déterminant de la matrice en question.*

Démonstration. D'après le lemme de Morse, la phase s'écrit en coordonnées convenables au voisinage du point critique sous la forme

$$y_1^2+\ldots+y_k^2-y_{k+1}^2-\ldots-y_n^2.$$

Il suffit donc de démontrer le théorème dans ce cas précis. Or, le théorème de Fubini permet de réduire sans peine ce cas à l'assertion de l'exemple précédent. Le théorème est démontré.

D. Caustiques. Dans les problèmes physiques la phase et l'amplitude des intégrales oscillantes sont généralement fonctions de certains paramètres auxiliaires. Considérons une intégrale de ce type. Supposons que la phase soit une famille générique de fonctions dépendant de paramètres auxiliaires (voir à ce sujet la Première partie, chapitre II). Dans ce cas l'intégrale est de Fresnel pour presque toutes les valeurs des paramètres et, pour ces valeurs-ci, est de l'ordre de $\tau^{-n/2}$ (théorème 2). Dans l'espace des paramètres, le lieu des valeurs des paramètres pour lesquelles la phase a un point critique dégénéré est une hypersurface appelée *caustique.* Quand les paramètres prennent des valeurs caustiques, l'intégrale tend vers 0 avec la vitesse définie par les points critiques dégénérés de la phase.

E. Comportement asymptotique des intégrales oscillantes au voisinage d'une caustique. Supposons que pour une valeur particulière des paramètres auxiliaires la phase de l'intégrale oscillante n'admette qu'un point critique unique et que, considérée comme une famille de fonctions dépendant de paramètres, elle soit une famille de fonctions génériques. Dans ce cas la caustique au voisinage de la valeur particulière considérée des paramètres est appelée *caustique élémentaire.*

On voit sur les figures 53 à 57 quelques exemples de caustiques élémentaires qui se présentent quand les paramètres sont au nombre de 2 et de 3. Sur chaque partie de la caustique on a marqué les types des points critiques dégénérés de la phase qui apparaissent quand les paramètres prennent les valeurs caustiques indiquées. Par exemple, A_2+A_2 signifie que la phase a deux points critiques de type A_2, les autres points critiques de la phase étant non dégénérés. Chaque point critique dégénéré de la phase apporte à l'intégrale une contribution de l'ordre de $\tau^{\beta-n/2}$. Le nombre β pour les points critiques

des types A_k, D_k est $(k-1)/(2k+2)$ et $(k-2)/(2k-2)$ respectivement (voir le théorème 4 dans le texte qui suit).

En accord avec les résultats cités dans le chapitre III de la Première partie, pour les phases qui dépendent génériquement de deux ou de trois paramètres, chaque caustique élémentaire est localement difféomorphe à l'une des caustiques des figures 53 à 57. Aux valeurs



Fig. 53

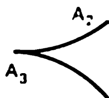


Fig. 54

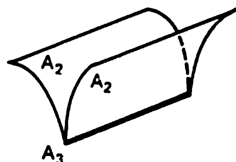
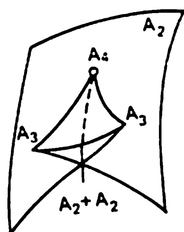


Fig. 55



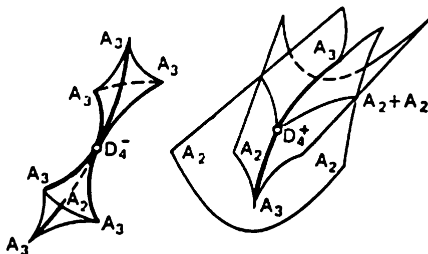


Fig. 56 Fig. 57

des paramètres qui passent les unes aux autres par le difféomorphisme local correspondent des intégrales d'ordres égaux.

Supposons que les paramètres auxiliaires soient au nombre de quatre et qu'un paramètre, le temps, soit privilégié. Pour des familles de fonctions génériques, toutes les métamorphoses possibles des caustiques en fonction du temps sont montrées sur les figures 58, 59. V. Zakalyukin [403] a établi une classification des métamorphoses des caustiques (voir Première partie, chapitre III). Chaque type de métamorphose a son nom. Les familles correspondantes sont indiquées dans le n° 22.3 de la Première partie.

Attirons l'attention du lecteur sur la colonne $A^2_{3,+,+}$ de la fig. 58. On y voit la métamorphose qui est unique en ce sens que pour elle la caustique est inexistante dans le temps positif mais apparaît dans le temps négatif. V. Zakalyukin ([403]) en tire l'explication du phénomène de disparition énigmatique des « soucoupes volantes ».

F. Intégrales oscillantes étendues à un demi-espace. Reprenons l'exemple du sous-paragraphe A. Supposons que la surface émettrice soit opaque pour des ondes émises. Alors il n'arrive au point con-

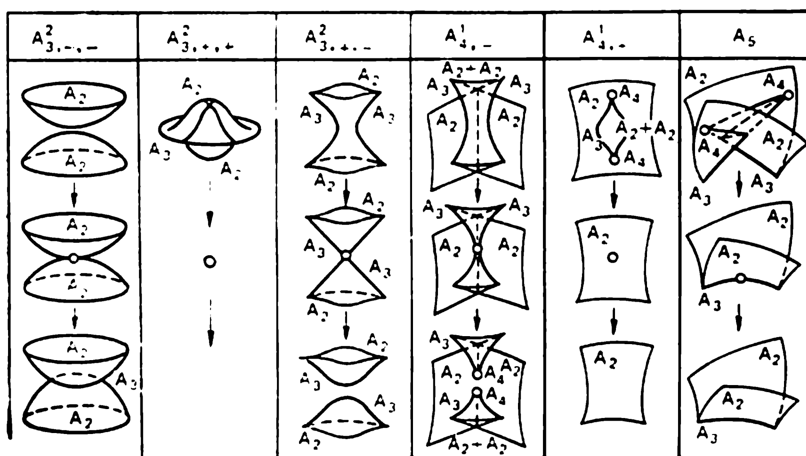


Fig. 58

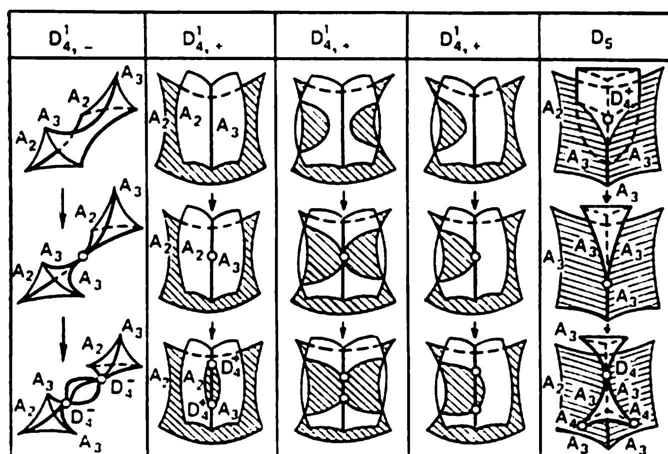


Fig. 59

sidéré de l'espace que les ondes émises par la partie visible de la surface. Aussi l'oscillation complexe dans un point de l'espace représente-t-elle une somme d'intégrales oscillantes dont chacune est étendue à une partie de la surface. Donc, en étudiant les oscillations H.F., il est bon de savoir calculer le développement asymptotique des intégrales oscillantes étendues à un domaine délimité par une frontière. Nous allons considérer le cas d'une frontière différentiable.

Soit une intégrale oscillante étendue à une partie de $\mathbf{R}^n$ délimitée par la condition de positivité de la première coordonnée ; la phase et l'amplitude de l'intégrale seraient des fonctions différentiables dans l'espace tout entier.

Théorème 1′. *Supposons que l'amplitude d'une intégrale oscillante étendue au demi-espace soit à support compact. Supposons que sa phase étendue au demi-espace n'admette pas de points critiques sur le support de l'amplitude dans le domaine d'intégration. Supposons que la restriction de la phase au bord du demi-espace soit sans points critiques sur le support de l'amplitude. Alors, quand le paramètre de l'intégrale oscillante tend vers* $+\infty$, *l'intégrale tend vers* 0 *plus vite que toute puissance du paramètre.*

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de considérer le cas où le support de l'amplitude est contenu dans un petit voisinage d'un point de la frontière du demi-espace. Quitte à changer les variables d'intégration, on passe au cas où le demi-espace d'intégration est tel que la première variable y est positive et la phase constitue la seconde variable. Intégrant par parties autant de fois qu'il est nécessaire suivant la seconde variable, on obtient la proposition du théorème.

Supposons que la phase de l'intégrale oscillante étendue au demi-espace soit sans points critiques sur la frontière du demi-espace. Supposons que tous ses points critiques intérieurs au demi-espace soient non dégénérés et que les points critiques de sa restriction à la frontière du demi-espace d'intégration soient non dégénérés eux aussi. Une intégrale oscillante possédant une telle phase sera appelée *intégrale de Fresnel étendue à un demi-espace.*

Théorème 2′. *Considérons une intégrale de Fresnel suivant un demi-espace dans lequel la première coordonnée est positive. Supposons que l'origine des coordonnées ne soit pas un point critique de la phase mais qu'elle soit un point critique non dégénéré de la restriction de la phase à la frontière du demi-espace. Supposons que le support de l'amplitude soit compact, qu'il ne contienne pas de points critiques de la phase ni aucun autre point critique de la restriction de la phase à la frontière du demi-espace. Alors, quand le paramètre de l'intégrale tend vers* $+\infty$, *l'intégrale se laisse mettre sous la forme*

$$\varphi(0)(i\tau)^{-1}(2\pi/\tau)^{(n-1)/2}\exp(i\tau f(0)+$$
$$+(i\pi/4)\operatorname{sign}\tilde{f}''_{x'x'}(0))\,|\det\tilde{f}''_{x'x'}(0)|^{-1/2}+O(\tau^{-(n+1)/2}),$$

où $\operatorname{sign}\tilde{f}''_{x'x'}(0)$ *est la signature de la matrice des dérivées secondes au point critique de la restriction de la phase au bord, et* $\det\tilde{f}''_{x'x'}(0)$ *le déterminant de cette matrice.*

D é m o n s t r a t i o n. Au voisinage de l'origine, changeons la première variable de telle façon que, dans le demi-espace d'intégra-

tion, elle reste positive comme auparavant et que la phase de l'intégrale soit de la forme $x_1 + h(x_2, \ldots, x_n)$. Le théorème 2′ se réduit maintenant au théorème 2 en faisant l'intégration par parties suivant la première variable.

Supposons que la phase et l'amplitude de l'intégrale oscillante étendue au demi-espace soient fonctions de paramètres auxiliaires. Supposons que la phase, considérée comme une famille de fonctions dépendant de paramètres, soit une famille de fonctions générique (voir Première partie, chapitre II). Dans ce cas l'intégrale est de

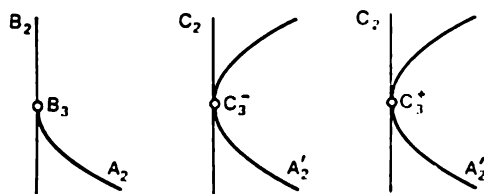


Fig. 60

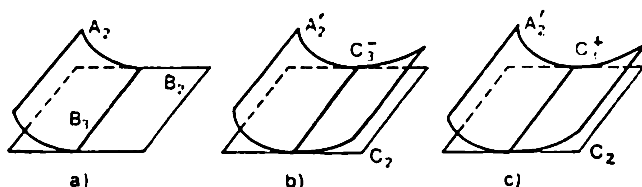


Fig. 61

Fresnel pour presque toutes les valeurs des paramètres. Dans l'espace des paramètres, les valeurs des paramètres pour lesquelles l'intégrale n'est pas de Fresnel forment une hypersurface appelée *caustique*.

Supposons que, pour une certaine valeur des paramètres, la phase n'admet qu'un point critique unique sur la frontière du demi-espace d'intégration. La caustique au voisinage d'une telle valeur des paramètres est appelée *élémentaire*.

On voit sur les figures 60 à 64 quelques exemples de caustiques élémentaires qui apparaissent pour un nombre de paramètres 2 et 3.

Lorsque les paramètres prennent une valeur caustique, alors ou bien la phase admet un point critique dégénéré dans le demi-espace d'intégration, ou bien la phase admet un point critique sur le bord, ou bien la restriction de la phase au bord admet un point critique dégénéré. Les noms de ces points critiques sont marqués sur les figures près de chaque partie de la caustique. Pour les formes normales de ces points critiques, voir la Première partie, § 17, ainsi que [16]. Chaque point critique indiqué apporte à l'intégrale une contribution

de l'ordre de $\tau^{\beta-n/2}$. Les nombres β pour les points critiques des types A'_k, D'_k, B_k, $C_k^{\pm}$, F_4 sont respectivement $-1/(k+1)$, $-1/(2k-2)$, $(k-1)/2k$, 0, 1/6 (voir le théorème 8.9 ci-après).

D'après [16] (voir aussi § 17 de la Première partie), pour les phases d'intégrales oscillantes étendues à un demi-espace qui dépendent génériquement de deux ou de trois paramètres, chaque caustique élémentaire est localement difféomorphe à l'une des caustiques

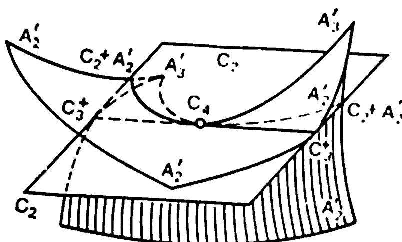


Fig 62

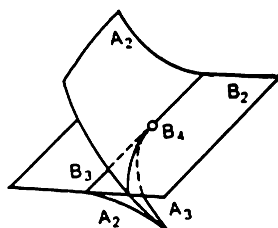


Fig. 63

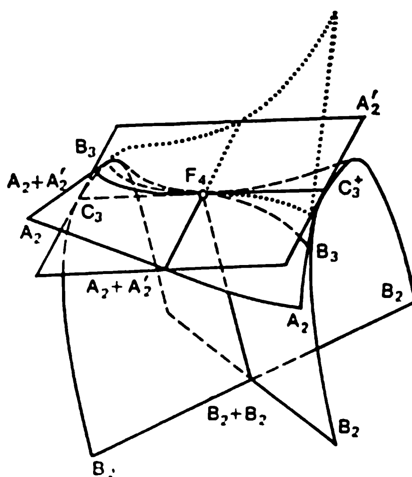


Fig. 64

des figures 60 à 64. Aux valeurs des paramètres qui passent les unes dans les autres par le difféomorphisme local correspondent des intégrales d'ordres égaux.

G. Zones de lumière, d'ombre, de pénombre (d'après K. Mandrykine). Supposons que la phase et l'amplitude d'une intégrale oscillante soient fonctions de paramètres auxiliaires. Considérons dans l'espace des paramètres une caustique et une valeur quelconque de

paramètres en dehors de la caustique. La phase de l'intégrale oscillante correspondant à cette valeur des paramètres ou bien n'a que des points critiques non dégénérés, ou bien n'a aucun point critique. Dans le premier cas l'intégrale oscillante tend vers 0 pour $\tau \to +\infty$ comme $\tau^{-n/2}$, où n est la dimension de l'espace d'intégration, et dans le second, plus vite que n'importe quelle puissance du paramètre τ. Le domaine extérieur à la caustique sera appelé respectivement:

— *zone de lumière* si aux valeurs des paramètres dans ce domaine correspondent des intégrales oscillantes dont les phases ont au moins un point critique;

— *zone d'ombre* si aux valeurs des paramètres dans ce domaine correspondent des intégrales oscillantes dont les phases n'ont aucun point critique.

Exemple. On voit sur les figures 55 à 57 les caustiques qui correspondent aux points critiques des types A_2, A_3, A_4, $D_4^{\pm}$. Sur les dessins des caustiques pour A_2, A_4, $D_4^{\pm}$ les zones d'ombre sont situées au-dessous des caustiques. Les autres domaines en dehors des caustiques sont des zones de lumière.

Supposons que l'intégrale oscillante considérée soit étendue à un demi-espace. Considérons une valeur quelconque des paramètres en dehors de la caustique. Trois cas peuvent se présenter alors:

1) la phase de l'intégrale oscillante correspondant à la valeur considérée des paramètres admet au moins un point critique dans le demi-espace d'intégration. Dans ce cas l'intégrale est d'ordre $\tau^{-n/2}$;

2) la phase de l'intégrale oscillante correspondant à la valeur considérée des paramètres n'a aucun point critique dans le demi-espace d'intégration, mais la restriction de la phase au bord du demi-espace d'intégration admet au moins un point critique. Dans ce cas l'intégrale est d'ordre $\tau^{-(n+1)/2}$ (théorème 2');

3) ni la phase de l'intégrale oscillante pour la valeur considérée des paramètres, ni sa restriction au bord du demi-espace d'intégration n'ont pas de points critiques dans ce demi-espace. Dans ce cas l'intégrale tend vers 0 pour $\tau \to +\infty$ plus vite que n'importe quelle puissance du paramètre τ.

Conformément à ces trois cas possibles, les domaines extérieurs à la caustique seront appelés *zone de lumière*, *zone de pénombre* et *zone d'ombre* respectivement.

Exemple. On voit sur les figures 61 à 64 les caustiques correspondant aux points critiques des types B_3, $C_3^{\pm}$, C_4, B_4, F_4. Indiquons les zones d'ombre et de pénombre sur ces dessins (les autres domaines en dehors des caustiques sont des zones de lumière). Sur la figure 61, *a* la zone de pénombre est au-dessus de la caustique, sur la figure 61, *b*, au-dessous de la caustique. Sur la figure 61, *c* la zone d'ombre est au-

dessus de la caustique et la zone de pénombre, entre les deux feuillets de la caustique. Sur la figure 62 la pénombre se situe d'un côté du plan de la caustique. Sur la figure 63 la pénombre est à droite, au-dessus du plan de la caustique. Sur la figure 64 l'ombre s'étend au-dessus de la caustique tout entière, et la pénombre est derrière la caustique sous le plan de la caustique, ainsi qu'à droite, entre le plan de la caustique et la surface réglée (troisième partie de la caustique).

Il serait curieux de savoir s'il existe des points critiques qui ont deux zones d'ombre en dehors de leurs caustiques. Il est probable que les zones d'ombre possèdent certaines propriétés de convexité.

H. Théorème 3 (du développement asymptotique; voir [29], [43], [44], [350], [229]). *Considérons l'intégrale oscillante*

$$\int_{\mathbf{R}^n} \exp(i\tau f(x))\, \varphi(x)\, dx_1 \dots dx_n. \tag{1}$$

Soit la phase une fonction analytique au voisinage de son point critique x^0. Alors l'intégrale oscillante se développe en série asymptotique

$$\exp(i\tau f(x^0)) \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi)\tau^{\alpha}(\ln\tau)^k \quad \textit{pour} \ \tau \to +\infty, \tag{2}$$

si le support de l'amplitude est contenu dans un voisinage suffisamment restreint de ce point critique de la phase. Ici le paramètre α parcourt un ensemble fini de progressions arithmétiques ne dépendant que de la phase et contenant comme termes des nombres rationnels négatifs. Les coefficients numériques $a_{k,\alpha}$ sont des fonctions généralisées de l'amplitude, ou distributions. Le support de chaque distribution de ce type appartient à l'ensemble critique de la phase.

Exemple (voir [108]). Considérons une intégrale de Fresnel. Supposons que la phase de l'intégrale admette un point critique non dégénéré à l'origine et que le support de l'amplitude soit compact et ne contienne aucun autre point critique de la phase. Alors, quand le paramètre tend vers $+\infty$, l'intégrale se développe en série asymptotique

$$\exp(i\tau f(0))\, \tau^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \tau^{-j}.$$

Le coefficient a_j est une combinaison linéaire des dérivées $2j$-ièmes mixtes à l'origine des coordonnées, a_0 est décrit dans l'énoncé du théorème 2.

Remarque. La condition d'analyticité de la phase dans le théorème 3 est vérifiée presque toujours : la phase est un polynôme en coordonnées convenables au voisinage d'un point critique de multipli-

cité finie. Il y a très peu de points critiques de multiplicité infinie: les coefficients de la série de Taylor d'un point critique de multiplicité infinie vérifient une infinité de relations algébriques indépendantes.

Nous donnerons deux démonstrations du théorème 3. La première, fondée sur le théorème de Hironaka de résolution des singularités, sera décrite au § 7. La seconde, qui fait intervenir le cas analytique complexe, apparaîtra au § 11.

Dans la série asymptotique d'une intégrale oscillante, la phase et l'amplitude n'ont pas la même importance: la phase définit les exposants de puissance du paramètre, alors que l'amplitude définit les coefficients auprès de ces puissances. L'influence de la phase est prépondérante. En étudiant une intégrale oscillante, on laisse généralement inchangée la phase et l'on fait varier l'amplitude. Dans l'exemple du sous-paragraphe A, où il s'agit d'une surface émettrice d'ondes, la phase détermine la géométrie de la surface et l'amplitude, l'intensité du rayonnement.

I. Indice d'oscillation et indice de singularité. Les principales caractéristiques de la série asymptotique d'une intégrale oscillante sont l'exposant de puissance du paramètre dans le terme maximal de la série, l'exposant du logarithme du paramètre dans le terme maximal de la série, le coefficient numérique du terme maximal de la série et, enfin, l'ensemble des exposants de puissance du paramètre qu'on rencontre dans la série.

Définitions. L'*ensemble des indices* d'une phase analytique dans un point critique est l'ensemble des nombres α tels que pour tout voisinage du point critique, il existe une amplitude à support contenu dans ce voisinage pour laquelle il existe dans la série asymptotique (2) un nombre k tel que le coefficient $a_{k,\alpha}$ soit non nul. L'*indice d'oscillation* de la phase analytique au point critique est le plus grand nombre qu'on trouve dans l'ensemble des indices. L'indice d'oscillation se note β. La *multiplicité de l'indice d'oscillation* de la phase analytique au point critique est le plus grand nombre k qui présente la propriété suivante: pour tout voisinage du point critique, il existe une amplitude à support contenu dans ce voisinage pour laquelle le coefficient $a_{k,\beta}$ dans la série asymptotique (2) est non nul. La multiplicité de l'indice d'oscillation se note K.

Exemple. L'ensemble des indices d'une phase de n variables au point critique non dégénéré est l'ensemble de tous les nombres de la forme $-n/2 - l$, où $l = 0, 1, \ldots$ L'indice d'oscillation du point critique en question est $-n/2$, et sa multiplicité est nulle.

L'indice d'oscillation et sa multiplicité possèdent la propriété d'additivité. Soient $f(x_1, \ldots, x_n)$ et $g(y_1, \ldots, y_l)$ deux fonctions analytiques ayant des points critiques à l'origine. Alors pour

la fonction $f(x_1, \ldots, x_n) + g(y_1, \ldots, y_l)$ on a à l'origine

$$\beta(f+g) = \beta(f) + \beta(g), \quad K(f+g) = K(f) + K(g)$$

(c'est une conséquence du théorème de Fubini, § 9). L'additivité de l'indice d'oscillation et de sa multiplicité donne lieu à la définition suivante:

Définition. L'*indice de singularité* d'une phase analytique de n variables dans un point critique est son indice d'oscillation augmenté de $n/2$. La *multiplicité de l'indice de singularité* est la multiplicité de l'indice d'oscillation.

Dans un point critique non dégénéré de la phase, l'indice de singularité est nul, de même que sa multiplicité. En deux points critiques stablement équivalents, les indices de singularité et leurs multiplicités sont égaux.

J. Tableaux des indices de singularité. Dans ce chapitre nous calculons (dans les cas énumérés ci-après) les principales caractéristiques d'un point critique de la phase d'une intégrale oscillante: l'indice d'oscillation, sa multiplicité, l'ensemble des indices, et nous calculons les amplitudes pour lesquelles le terme dominant de la série asymptotique est non nul. Les résultats obtenus permettent de calculer les indices de singularité et leurs multiplicités pour tous les points critiques classifiés dans le chapitre II de la Première partie, à savoir: pour tous les points critiques simples, unimodaux et bimodaux, pour tous les points critiques de multiplicité inférieure à 16, pour tous les points critiques rentrant dans les classes de codimension inférieure à 10 (voir Première partie, § 15).

Les résultats des calculs sont résumés dans les tableaux 1 à 5. Dans la première ligne des tableaux sont indiqués les noms des types des points critiques de la phase, et dans la seconde les indices de singularité. Pour les formes normales des points critiques, voir Première partie, n°s 15.1 et 17.1. Le sens de nos tableaux est le suivant: si, au voisinage d'un point critique, la phase de l'oscillation se laisse réduire à la forme tabulaire par un difféomorphisme de l'espace, alors son indice de singularité est égal à celui de la fonction correspondante qui figure dans le tableau.

Tableau 1. *Singularités simples*

A_k	D_k	E_6	E_7	E_8
$\frac{k-1}{2k+2}$	$\frac{k-2}{2k-2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{15}$

Tableau 2. *Singularités unimodales*

P_8, X_9, J_{10}, J_{10+k}, X_{9+k}, $Y_{r,s}$, $\widetilde{Y}_r$, P_{8+k}, $R_{l,m}$, $\widetilde{R}_m$, $T_{p,q,r}$, $\widetilde{T}_{p,m}$
$\frac{1}{2}$

E_{12}	E_{13}	E_{14}, Q_{10}	Z_{12}	Z_{13}, Q_{11}	W_{12}	W_{13}, S_{11}	Q_{12}	S_{12}	U_{12}
$\frac{11}{21}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{15}{26}$	$\frac{7}{12}$

Tableau 3. *Singularités bimodales*

$J_{3,0}$ $J_{3,p}$	$Z_{1,0}$, E_{19} $Z_{1,p}$	$W_{1,0}$, $W^{\#}_{1,2q-1}$, $Q_{2,0}$, Z_{17} $W_{1,p}$, $W^{\#}_{1,2q}$, $Q_{2,p}$	$S_{1,0}$, $S^{\#}_{1,2q-1}$, W_{17} $S_{1,p}$, $S^{\#}_{1,2q}$, Q_{17}
$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{5}$

S_{17}	$U_{1,0}$, $U_{1,2q-1}$, $U_{1,2q}$	E_{18}	E_{20}	Z_{18}	Z_{19}	W_{18}	Q_{16}	Q_{18}	S_{16}	U_{16}
$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{10}{17}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{17}{28}$	$\frac{25}{42}$	$\frac{29}{48}$	$\frac{21}{34}$	$\frac{19}{30}$

Tableau 4. *Singularités de corang 2 à 4 jet non nul*

$J_{k,0}$, $J_{k,i}$	E_{6k}	E_{6k+1}	E_{k+2}	$X_{k,0}$, $X_{k,p}$, $Y^k_{r,s}$
$\frac{2k-1}{3k}$	$\frac{6k-1}{9k+3}$	$\frac{4k}{6k+3}$	$\frac{6k+1}{9k+6}$	$\frac{3k-1}{4k}$

Suite du tableau 4

$Z^k_{i,0}$, $Z^k_{i,p}$, $Z^k_{12k+6i-1}$, Z^k_{12k+6i}, $Z^k_{12k+6i+1}$ pour $k>2$	$Z^2_{i,0}$, $Z^2_{i,p}$
$\frac{3k-1}{4k}$	$\frac{2i+5}{3i+8}$

Z^2_{23+6i}	Z^2_{24+6i}	Z^2_{25+6i}	$Z_{i,0}$, $Z_{i,p}$	Z_{6i+11}	Z_{6i+12}	Z_{6i+13}
$\frac{6i+17}{9i+27}$	$\frac{4i+12}{6i+19}$	$\frac{6i+19}{9i+30}$	$\frac{2i+2}{3i+4}$	$\frac{6i+8}{9i+15}$	$\frac{4i+6}{6i+11}$	$\frac{6i+10}{9i+18}$

W_{12k}	W_{12k+1}	$W_{k,0}$, $W_{k,i}$, $W^{\#}_{k,2q-1}$, $W^{\#}_{k,2q}$	W_{12k+5}	W_{12k+6}
$\frac{12k-1}{16k+4}$	$\frac{9k}{12k+4}$	$\frac{12k+2}{16k+8}$	$\frac{9k+3}{12k+8}$	$\frac{12k+5}{16k+12}$

Tableau 5. *Singularités de corang 3 à 3-jet réduit et à 3-jet x^2y*

$Q_{k,0}$, $Q_{k,i}$	Q_{6k+4}	Q_{6k+5}	Q_{6k+6}	S_{12k-1}	S_{12k}
$\frac{4k-1}{6k}$	$\frac{12k+1}{18k+6}$	$\frac{8k+2}{12k+6}$	$\frac{12k+5}{18k+12}$	$\frac{12k-3}{16k}$	$\frac{18k-3}{24k+2}$

$S_{k,0}$, $S^{\#}_{k,2q-1}$, $S_{k,i}$, $S^{\#}_{k,2q}$	S_{12k+4}	S_{12k+5}	U_{12k}	$U_{k,2q}$, $U_{k,2q-1}$	U_{12k+4}	$V_{1,0}$, $V^{\#}_{1,2q-1}$, $V_{1,p}$, $V^{\#}_{1,2q}$
$\frac{6k}{8k+2}$	$\frac{18k+3}{24k+10}$	$\frac{12k+3}{16k+8}$	$\frac{15k-1}{18k+6}$	$\frac{10k+1}{12k+6}$	$\frac{15k+4}{18k+12}$	$\frac{5}{8}$

Pour les points critiques des types J_{10+k}, X_{9+k}, $Y_{r,s}$, P_{8+k}^{-}, $R_{l,m}$, $\tilde{R}_m^{+,-}$, $\tilde{R}_m^{-,+}$, $T_{p,q,r}$ $(p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}<1)$. $X_{1,p}$ $(p>0)$, $Y_{r,s}^1$, $Z_{i,0}^3$, Z_{35+6i}^3, Z_{36+6i}^3, Z_{37+6i}^3, $Z_{i,p}^3$ *l'indice de singularité est de multiplicité* 1, *pour les autres points critiques des tableaux* 1 *à* 5 *il est de multiplicité* 0. *Pour tous les points critiques des tableaux (à l'exception de* P_{8+k}^{+}, $\tilde{R}_m^{+,+}$, $\tilde{R}_m^{-,-}$, $\tilde{T}_{p,m}$) *le coefficient* $a_{K,\beta}$ *du terme dominant de la série asymptotique* (2) *est égal à la valeur de l'amplitude au point critique de la phase multipliée par une constante non nulle qui ne dépend que de la phase. Pour les points critiques des types* P_{8+k}^{+}, $\tilde{R}_m^{+,+}$, $\tilde{R}_m^{-,-}$, $\tilde{T}_{p,m}$ *la dernière assertion a lieu pour la partie imaginaire du coefficient* $a_{K,\beta}$.

Toutes ces assertions seront démontrées au § 9.

6.2. Enoncé des résultats. Les résultats fondamentaux de ce chapitre sont formulés en termes de polyèdres de Newton de la série de Taylor du point critique de la phase. Rappelons que le polyèdre de Newton est un polyèdre convexe formé par les exposants de puissance des monômes termes de la série de Taylor. Nous considérons la classe des points critiques ayant un polyèdre de Newton donné et nous montrons que presque tous les points de la classe ont même indice d'oscillation. La formule définissant l'indice en question sera démontrée compte tenu de la géométrie du polyèdre de Newton. Font exception les points critiques pour lesquels les coefficients de la série de Taylor vérifient un ensemble fini de conditions algébriques explicites.

La classe des points critiques ayant un polyèdre de Newton donné s'avère utile pour l'étude des invariants discontinus des points critiques. Un invariant prend généralement la même valeur pour presque tous les points de la classe, et cette valeur s'exprime facilement à l'aide de la géométrie du polyèdre de Newton (voir n°s 6.2, D, 3.5, et aussi [28, 41, 42, 62 à 64, 87, 154 à 160, 177, 190, 191, 196, 334, 350, 359, 368, 372, 375, 377]).

A. Polyèdre de Newton. Dans l'octant positif de l'espace $\mathbf{R}^n$, i.e. dans l'ensemble des points à coordonnées non négatives, considérons une partie arbitraire telle que tous ses points soient à coordonnées entières. Cherchons le polyèdre de Newton de cette partie.

Faisons le transport parallèle de l'octant positif en chaque point de la partie considérée. On appelle *polyèdre de Newton* l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^n$ de la réunion de tous les transportés parallèles de l'octant. C'est un polyèdre convexe ayant ses sommets en des points à coordonnées entières non négatives. A chaque point y est associé un transporté parallèle de l'octant positif. On appelle *diagramme de Newton* de la partie considérée de l'espace la réunion de toutes les faces compactes de son polyèdre de Newton.

Soit une série de puissances $f = \sum a_k x^k$ à coefficients réels ou complexes, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$. On appelle *support de la série* l'ensemble des exposants de puissance de tous les monômes termes de la série à coefficients non nuls. Le support de la série est une partie d'octant positif qui réunit des points à coordonnées entières non négatives. Eliminons du support l'origine des coordonnées (si elle est dans ce support). L'ensemble ainsi obtenu est appelé *support réduit* de la série. Le *polyèdre de Newton d'une série de puissances* est le polyèdre de Newton de son support réduit. Le *diagramme de Newton d'une série de puissances* est le diagramme de Newton de son support réduit.

Le polyèdre de Newton se note Γ, et le diagramme de Newton Δ.

Exemple. Les polyèdres de Newton et les diagrammes de Newton des séries de Taylor des fonctions $f = (x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^5$, $g = (x_1^2 - x_2^3)^2$ et $h = (x_1 + x_2)^2 x_1^2 + x_1^5 + x_2^5$ à l'origine des coordonnées sont représentés sur la figure 65.

Pour toute face γ du polyèdre de Newton d'une série de puissances, on appelle *γ-partie* de la série en question la série de puissances

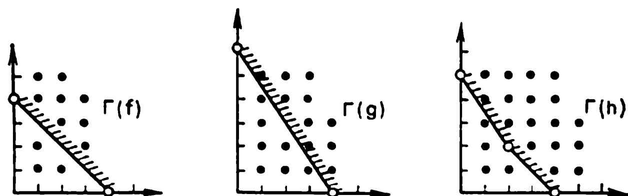


Fig. 65

constituée de monômes dont les exposants de puissance appartiennent à la face γ, chaque monôme intervenant dans la γ-partie avec le même coefficient que dans la série de puissances initiale. Si la face γ est compacte, la γ-partie de la série est un polynôme. On appelle *partie principale* de la série de puissances le polynôme formé des monômes dont les coefficients appartiennent au diagramme de Newton de la série, chaque monôme intervenant dans la partie principale avec le même coefficient que dans la série initiale. La γ-partie d'une série f se note f_γ, et la partie principale de la série f_Δ.

Exemple. Pour les fonctions f, g, h de l'exemple précédent, les parties principales des séries de Taylor sont les polynômes $f_\Delta = (x_1^2 + x_2^2)^2$, $g_\Delta = (x_1^2 - x_2^3)^2$, $h_\Delta = (x_1 + x_2)^2 x_1^2 + x_2^5$.

B. Non-dégénérescence de la partie principale. Précisons ce terme: nous verrons par la suite que les fonctions dont les séries de Taylor ont la partie principale non dégénérée présentent cette

propriété utile que leurs caractéristiques discontinues se laissent exprimer facilement en fonction de la géométrie de leurs polyèdres de Newton, voir n° 6.2, D.

Définition (voir [190, 191]). On dit que la partie principale d'une série de puissances f à coefficients réels (resp. à coefficients complexes) est *non* R-*dégénérée* (resp. *non* C-*dégénérée*) si, pour toute face compacte γ du polyèdre de Newton de la série, les polynômes $\partial f_\gamma/\partial x_1, \ldots, \partial f_\gamma/\partial x_n$ sont sans zéros communs dans $(\mathbf{R}\setminus 0)^n$ (resp. dans $(\mathbf{C}\setminus 0)^n$).

Exemple. Toutes les parties principales de l'exemple précédent sont C-dégénérées, la partie principale f_Δ est non R-dégénérée, les parties principales g_Δ et h_Δ sont R-dégénérées.

Remarque. Pour toute face compacte γ, le polynôme de la γ-partie est quasi homogène. D'après le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, les zéros communs dans $(\mathbf{R}\setminus 0)^n$ de toutes les dérivées partielles premières du polynôme de la γ-partie appartiennent à la variété de niveau nul du polynôme de la γ-partie.

Le lemme suivant montre qu'il existe peu de séries à partie principale dégénérée.

Lemme 1 (voir [190, 191]). *L'ensemble des parties principales* R-*dégénérées* (*resp.* C-*dégénérées*) *est un sous-ensemble propre semi-algébrique* (*resp. constructible*) *de complémentaire partout dense dans l'espace de toutes les parties principales correspondant au polyèdre de Newton donné.*

D é m o n s t r a t i o n. Prenons une face compacte γ du polyèdre de Newton et montrons que, dans l'espace des polynômes dont chacun est une γ-partie, le sous-ensemble semi-algébrique est formé par les polynômes dont la variété de niveau nul admet des points singuliers dans $(\mathbf{R}\setminus 0)^n$ et que le complémentaire de ce sous-ensemble est partout dense.

D'après le théorème de Tarski-Seidenberg (voir [128, 315]), le sous-ensemble en question est bien semi-algébrique. Montrons que son complémentaire est dense. La variété de niveau nul a pour équation $\sum_{k\in\gamma} c_k x^k = 0$. Pour l'un quelconque de ces monômes, la variété de niveau nul dans $(\mathbf{R}\setminus 0)^n$ a pour équation

$$c_{k_0} = -\sum_{k\in\gamma\setminus k_0} c_k x^{k-k_0}.$$

D'après le théorème de Bertini-Sard, seul un ensemble fini de valeurs du coefficient c_{k_0} (les autres coefficients étant fixes) corresponde à la variété singulière de niveau nul. Le lemme est démontré.

C. Distance du polyèdre et éloignement du polyèdre. L'étude des intégrales oscillantes nécessite souvent de recourir aux caractéristiques géométriques du polyèdre de Newton telles que sa distance et son éloignement. Considérons la bissectrice de l'octant positif dans $\mathbf{R}^n$, i.e. la droite constituée de points de coordonnées égales. La bissectrice vient couper le bord du polyèdre de Newton exactement en un point, dit *centre de bord* du polyèdre de Newton. Une coordonnée (de numéro quelconque) du centre est appelée *distance du polyèdre de Newton.* L'inverse de la distance pris avec le signe moins est appelé *éloignement du polyèdre de Newton.*

Exemple. Pour les fonctions f, g, h de l'exemple à la page 156, les distances des polyèdres de Newton sont respectivement 2, 12/5 et 2, et les éloignements des polyèdres de Newton, —1/2, —5/12 et —1/2.

L'éloignement d'un polyèdre de Newton est d'autant plus important que la distance qui le sépare de l'origine des coordonnées est grande. Convenons de dire que le polyèdre de Newton est *éloigné* si son éloignement est plus grand que —1. Autrement dit, le polyèdre de Newton est éloigné si le point (1, . . ., 1) lui est extérieur.

Considérons la face ouverte à laquelle appartient le centre de bord d'un polyèdre de Newton. La codimension de cette face diminuée de l'unité est appelée *multiplicité de l'éloignement.* Dans le cas particulier où la face en question est un sommet du polyèdre, la multiplicité est égale à $n - 1$, et si elle est son arête, la multiplicité est égale à $n - 2$, et ainsi de suite.

Exemple. Pour les fonctions f, g, h de l'exemple à la page 156, les multiplicités de l'éloignement de leurs polyèdres de Newton sont respectivement 0, 0 et 1.

D. Enoncé du résultat fondamental. Le résultat fondamental de ce chapitre est : l'indice d'oscillation d'un point critique de la phase est défini par l'éloignement du polyèdre de Newton de sa série de Taylor (sous les conditions précisées dans les deux théorèmes qui suivent).

Théorème 4 (voir [350]). *Soit la phase une fonction analytique au voisinage de son point critique. Supposons que la partie principale de la série de Taylor de la phase dans ce point critique soit non* $\mathbf{R}$*-dégénérée et que le polyèdre de Newton de cette série soit éloigné. Alors l'indice d'oscillations du point critique de la phase est égal à l'éloignement du polyèdre de Newton.*

Exemple 1. Le point critique dégénéré à l'origine de la phase $x_1^{k_1} + x_2^{k_2}$ vérifie les conditions du théorème. Son indice d'oscillation est $-1/k_1 - 1/k_2$.

Exemple 2. Le point critique à l'origine de la phase f de l'exemple à la page 156 vérifie les conditions du théorème. Son indice d'oscillation est $-1/2$.

Les propositions suivantes complètent le théorème.

a) Supposons les conditions du théorème vérifiées: alors la multiplicité de l'indice d'oscillation du point critique de la phase est égale à la multiplicité de l'éloignement du polyèdre de Newton de la série de Taylor de la phase dans ce point critique.

b) Si la partie principale de la série de Taylor du point critique de la phase est non **R**-dégénérée, l'indice d'oscillation du point critique est non supérieur à l'éloignement du polyèdre de Newton de la série de Taylor.

c) Soit un point critique à l'origine de la phase $x_4^2 + x_1^9 + x_2^9 + x_3^9 + (x_4 - (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2))\, x_5$. Alors la partie principale de la série de Taylor du point critique est non **R**-dégénérée; l'éloignement du polyèdre de Newton de la série de Taylor est inférieur à -1; l'indice d'oscillation du point critique est plus petit que l'éloignement du polyèdre de Newton.

d) Si le polyèdre de Newton de la série de Taylor du point critique de la phase est éloigné, l'indice d'oscillation du point critique de la phase est non inférieur à l'éloignement du polyèdre.

e) Si le polyèdre de Newton de la série de Taylor du point critique de la phase est éloigné et si le point en question est de multiplicité finie, alors le coefficient affectant le terme dominant de la série asymptotique de l'intégrale oscillante (coefficient $a_{K,\beta}$ de la série (2), page 150) est égal à la valeur de l'amplitude au point critique de la phase multipliée par une constante non nulle qui ne dépend que de la phase.

f) Supposons que la partie principale de la série de Taylor du point critique de la phase soit non **R**-dégénérée et que l'éloignement du polyèdre de Newton soit -1. Alors l'indice d'oscillation du point critique de la phase est égal à -1 si l'une quelconque au moins des deux conditions suivantes est vérifiée:

— la face ouverte contenant le centre de bord du polyèdre de Newton est de dimension inférieure à $n - 1$;

— l'adhérence γ de la face ouverte contenant le centre de bord du polyèdre de Newton est compacte et la γ-partie de la série de Taylor a des zéros sur $(\mathbf{R}\setminus 0)^n$.

g) Si les conditions de f) sont vérifiées, la multiplicité de l'indice d'oscillation du point critique de la phase est égale ou de 1 inférieure à la multiplicité de l'éloignement du polyèdre de Newton de la série de Taylor.

Le théorème 4 et les propositions complémentaires a), b), d), e), f), g) seront démontrés au § 8; quant à c), elle sera démontrée au § 9.

Conformément au théorème 4, on peut définir l'indice d'oscillation du point critique de la phase à l'aide du polyèdre de Newton

de sa série de Taylor si la partie principale de la série de Taylor est non **R**-dégénérée et si le polyèdre de Newton de la série de Taylor est éloigné. On ne trouve pas toujours un système de coordonnées dans lequel la série de Taylor possède les propriétés requises. Par exemple, pour le point critique à l'origine de la fonction g de l'exemple à la page 156, un tel système de coordonnées est inexistant. On peut cependant négliger l'hypothèse de l'existence d'un tel système de coordonnées dans le cas des points critiques des fonctions de deux variables.

Supposons que la phase soit une fonction analytique au voisinage de son point critique. On appelle *éloignement du point critique* la borne supérieure des éloignements des polyèdres de Newton des séries de Taylor de la phase dans tous les systèmes de coordonnées analytiques locales ayant leur origine dans le point critique en question.

Un système de coordonnées analytiques locales ayant son origine au point critique de la phase est dit *adapté* à ce point critique si l'éloignement du polyèdre de Newton de la série de Taylor de la phase dans ce système de coordonnées prend la plus grande valeur possible, égale à l'éloignement du point critique.

Théorème 5 (voir [350]). *Supposons que la phase soit une fonction analytique de deux variables au voisinage de son point critique. Alors l'indice d'oscillation du point critique est égal à son éloignement.*

Les trois propositions suivantes viennent compléter le théorème:

a) Dans les conditions du théorème, il existe un système de coordonnées adapté au point critique.

b) Si le point critique de la phase de deux variables est de multiplicité finie, le coefficient affectant le terme dominant de la série asymptotique de l'intégrale oscillante (le coefficient $a_{K,\beta}$ de la série (2), page 150) est égal à la valeur de l'amplitude au point critique de la phase multipliée par une constante non nulle qui ne dépend que de la phase.

c) L'indice d'oscillation est plus grand que l'éloignement pour le point critique à l'origine de la phase $(-x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_1^9 + x_2^9 + x_3^9$ de trois variables.

Le théorème 5 et les propositions complémentaires a), b) seront discutés au n° 8.4; la proposition c) sera démontrée au § 9 (voir aussi [350]).

On donne dans [350] un algorithme de recherche d'un système de coordonnées adapté au point critique d'une phase de deux variables. A ces mêmes fins sert le lemme qui suit.

Lemme 2 (voir [350]). *Un système de coordonnées local ayant son origine à un point critique d'une phase de deux variables est adapté à ce point critique si l'une quelconque au moins des trois conditions suivantes est vérifiée:*

a) *le centre de bord du polyèdre de Newton de la série de Taylor de la phase dans ce système de coordonnées est un sommet du polyèdre*;

b) *le centre de bord du polyèdre de Newton est situé sur une arête non compacte du polyèdre*;

c) *le centre de bord du polyèdre de Newton est situé sur une arête compacte du polyèdre et ni la tangente ni la cotangente de l'angle entre l'arête et le premier axe de coordonnées dans* $\mathbf{R}^2$ *ne sont égales à un nombre entier (remarquons qu'une rénumérotation des axes ne fait que permuter la tangente et la cotangente et n'influe donc pas sur la réalisation de la condition formulée).*

Exemple. Reprenons les fonctions g et h de l'exemple à la page 156. Le système de coordonnées x_1, x_2 est adapté aux points critiques de ces fonctions (respectivement en vertu des conditions c) et a) du lemme 2). D'après le théorème 5, les indices d'oscillation sont —5/12 et —1/2 respectivement.

Remarque 1. La proportionnalité du coefficient du terme dominant de la série asymptotique à la valeur de l'amplitude au point critique (voir les conditions complémentaires des théorèmes 4, 5) s'avère utile dans le problème suivant de géométrie intégrale énoncé par I. Gelfand au congrès des mathématiciens à Amsterdam en 1954.

Problème. Soit φ une fonction différentiable à support contenu dans un voisinage restreint d'un point critique d'une fonction différentiable f. Connaissant les intégrales de φ suivant toutes les hypersurfaces de niveau de f, reconstituer la valeur de φ au point critique indiqué.

Pour résoudre ce problème, il suffit de prendre le coefficient qui affecte le terme dominant de la série asymptotique de l'intégrale oscillante de phase f et d'amplitude φ si le point critique de f est de multiplicité finie et si son éloignement est supérieur à —1. Pour plus de détails, voir n° 7.3.

Remarque 2. L'indice de singularité est non négatif pour les points critiques des phases de une et de deux variables (voir théorèmes 4, 5), pour les points critiques vérifiant la condition du complémentaire d) du théorème 4. A l'aide de cette dernière condition, on montre que l'indice de singularité est non négatif pour les points critiques des phases de trois variables. Il y a lieu de supposer que l'indice de singularité est toujours non négatif. Autrement dit, l'ordre d'une oscillation rapide composée en un point caustique est probablement toujours supérieur à celui d'une oscillation de ce type en un point non caustique (voir nos 6.1, A, 6.1, D). En particulier, il semble qu'une caustique de la lumière est toujours particulièrement éclatante.

Au § 13 est défini l'indice de singularité complexe d'un point critique d'une fonction holomorphe. Il est toujours non négatif (voir n° 13.3). Pour démontrer ce fait, nous utilisons la relation qui existe entre le comportement asymptotique des intégrales et les structures de Hodge mixtes.

6.3. Désingularisation. Les théorèmes 3 à 5 se démontrent en utilisant la désingularisation du point critique de la phase.

Soit f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction analytique au voisinage de son point critique x. Supposons que la valeur de f en x soit 0. On appelle *désingularisation d'un point critique* une variété analytique Y de dimension n et son application analytique π: $Y \to \mathbf{R}^n$ telles que:

1. En tout point de l'image réciproque du point critique x, il existe un système de coordonnées local en lequel la fonction $f \circ \pi$ et le jacobien de l'application π sont égaux à des monômes, à la multiplication près par des fonctions qui ne s'annulent pas.

2. Dans un voisinage restreint du point critique x, il existe un sous-ensemble analytique propre en dehors duquel l'application π est analytiquement inversible dans le voisinage indiqué.

3. L'image réciproque de tout compact dans un petit voisinage de x est compacte.

Remarque 1. De la première condition il ressort en particulier qu'au voisinage de l'image réciproque de x l'hypersurface de niveau nul de $f \circ \pi$ a localement la structure d'une réunion d'hyperplans de coordonnées.

Remarque 2. On renforce quelquefois les exigences vis-à-vis de l'application π en remplaçant la propriété 2 par 2′, voire par 2″, et en ajoutant une propriété 4:

2′. Dans un petit voisinage de x l'application π est inversible en dehors de l'hypersurface de niveau nul de f.

2″. Dans un petit voisinage de x l'application π est inversible en dehors de l'ensemble critique de f.

4. Dans un petit voisinage de l'image réciproque de x l'hypersurface de niveau nul de la fonction $f \circ \pi$ est réunion de sous-variétés non singulières de dimension $(n - 1)$.

Théorème 6 (Hironaka; voir [29, 153]). *Tout point critique d'une fonction analytique admet une désingularisation qui possède les propriétés* 1, 2″, 3, 4.

Ce théorème est formulé dans [29]. C'est un cas particulier du théorème général de Hironaka sur la résolution des singularités (voir [153]).

Remarque 3. La notion de désingularisation a un sens dans le cas complexe. Soit f: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ une fonction analytique au voisinage de son point critique x. On appelle désingularisation en x une variété

analytique complexe Y de dimension n et son application analytique $\pi: Y \to \mathbf{C}^n$ qui possèdent les propriétés énumérées ci-dessus. Le théorème de Hironaka reste vrai dans ce cas aussi.

Le théorème de Hironaka réduit l'étude d'une intégrale oscillante à phase analytique à celle d'une somme d'intégrales oscillantes dont chacune a une phase monomiale. A cet effet, il suffit de faire un changement de variables dans l'intégrale à l'aide de l'application π.

Les intégrales oscillantes à phase monomiale sont appelées *élémentaires*. Nous les étudierons au § 7. Pour une intégrale élémentaire. il est facile de calculer l'indice d'oscillation, sa multiplicité, l'ensemble des indices. L'étude d'une intégrale oscillante à phase analytique implique de connaître la désingularisation de la phase, la composition de la série asymptotique de l'intégrale en question à partir des séries asymptotiques des intégrales élémentaires, de suivre le comportement des termes dominants (s'ils s'annulent réciproquement ou non). A la suite d'une telle analyse, on exprime l'indice d'oscillation et les autres caractéristiques analogues en termes de désingularisation de la phase (théorème 7.5). Les théorèmes 4, 5 ne sont que des reformulations, en termes de polyèdres de Newton, des propriétés des désingularisations qui interviennent dans cette analyse.

6.4. Comportement asymptotique des volumes. Le comportement asymptotique d'une intégrale oscillante est étroitement lié à celui du volume de l'ensemble des points dans lesquels la phase prend des valeurs inférieures à une certaine quantité, quand cette quantité varie et tend vers la valeur critique de la phase.

A. Formel de Gelfand-Leray. Indiquons un procédé utile pour l'étude des intégrales oscillantes. Il consiste en la réduction de l'intégrale oscillante à plusieurs dimensions à une intégrale de dimension un. Il s'agit d'appliquer le théorème de Fubini. Considérons en effet l'intégrale oscillante

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f(x)}\varphi(x)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Par le théorème de Fubini, réduisons d'abord cette intégrale à une intégrale itérée et, dans celle-ci, faisons l'intégration suivant les hypersurfaces de niveau de la phase, puis suivant la variable qui reste: la valeur de la phase. A cet effet, nous passerons dans l'intégrale à de nouvelles variables dont l'une est la phase.

Faisons deux remarques. Premièrement, on ne peut prendre la phase comme variable qu'en dehors de ses points critiques. La réunion des hypersurfaces des niveaux critiques de la phase ne sera donc pas considérée: de mesure nulle, cette réunion n'affecte aucunement la valeur de l'intégrale. Deuxièmement, pour faire l'intégration

suivant les hypersurfaces de niveau, il n'est pas nécessaire de connaître chacune des autres nouvelles variables : il suffit de connaître une forme de densité de dimension $(n - 1)$ sur les hypersurfaces de niveau, qui, multipliée par la différentielle de la phase, devient une forme volume de l'espace. Une telle forme de densité porte le nom de *forme de Gelfand-Leray* et se note $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n/df$.

Ainsi donc, l'intégrale oscillante se transforme en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau t} \left(\int_{f=t} \varphi \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n/df \right) dt.$$

Dans cette représentation l'intégrale oscillante est la transformée de Fourier de la fonction définie par l'intégrale intérieure. La fonction d'une variable définie par l'intégrale intérieure est appelée *fonction de Gelfand-Leray*.

La fonction de Gelfand-Leray est différentiable en dehors des valeurs critiques de la phase, et au voisinage d'une valeur critique de la phase elle se développe en une série asymptotique de la forme

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha} (t - t_0)^{\alpha} (\ln (t - t_0))^k.$$

Connaissant la série asymptotique de la fonction de Guelfand-Leray, on peut définir la série asymptotique de l'intégrale oscillante. Réciproquement, la connaissance du comportement asymptotique de l'intégrale oscillante donne l'information sur celui de la fonction de Gelfand-Leray. Ces propriétés de la fonction de Gelfand-Leray seront discutées au § 7.

B. Volume de l'ensemble des valeurs inférieures. Supposons que la phase admette un minimum isolé et que la valeur minimale de la phase soit 0. Supposons ensuite qu'au voisinage du point minimum l'amplitude soit identiquement égale à 1. Désignons la fonction de Gelfand-Leray par J et considérons une nouvelle fonction

$$V(t) = \int_0^t J(s) \, ds.$$

Il est évident que cette fonction s'annule pour les valeurs négatives de l'argument et que, lorsque l'argument prend de petites valeurs positives, la fonction devient égale au volume de l'ensemble des points en lesquels la phase prend une valeur inférieure à une valeur donnée. Ainsi donc, le comportement asymptotique de la fonction de volume de l'ensemble des valeurs inférieures définit celui de l'intégrale oscillante au cas où la phase admet un minimum isolé, et l'amplitude au voisinage du point minimum de la phase est égale à une constante.

Evaluons la vitesse de convergence vers zéro du volume de l'en-

semble des valeurs inférieures pour les points minimum isolés les plus simples. V. Vasiliev donne dans [377] une classification des points minimum critiques non supprimables par une petite déformation d'une famille de fonctions qui dépendent de 16 paramètres au plus ; on y trouve également les séries asymptotiques des volumes des valeurs inférieures. D'après cette classification, les seuls points minimum non supprimables par une petite déformation d'une famille de fonctions dépendant de 5 paramètres au plus sont les points minimum en lesquels la fonction se laisse amener par un difféomorphisme de l'espace à la forme

$$A_s : x_1^{s+1} + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \quad s = 1,\ 3,\ 5.$$

Pour des t petits positifs, le terme dominant du développement asymptotique du volume de l'ensemble des valeurs inférieures se présente sous la forme $\mathrm{Cte}\cdot t^{-\beta+n/2}$, où β est égal à 0, à 1/4 et à 1/3 respectivement.

Formulons un théorème général sur la vitesse de convergence vers zéro du volume de l'ensemble des valeurs inférieures.

Théorème 7 (voir [377]). *Supposons que la fonction analytique considérée admet un minimum isolé et que sa valeur minimale est égale à 0. Alors la fonction V de volume de l'ensemble des valeurs inférieures se développe pour $t \to +0$ en une série asymptotique*

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k.$$

Ici le paramètre α parcourt un ensemble fini de progressions arithmétiques avec comme termes des nombres rationnels positifs. Si en outre la partie principale de la série de Taylor de la fonction au point minimum est non **R***-dégénérée, l'exposant α du terme dominant de la série asymptotique est égal à l'opposé de l'éloignement du polyèdre de Newton de la série de Taylor.*

Ce théorème sera démontré au n° 8.3, C.

Remarques. 1. En cas de variation de la forme volume de l'espace (i.e. de sa multiplication par une fonction positive) l'ordre du terme dominant de la série asymptotique précédente reste inchangé.

2. La série asymptotique précédente converge pour t petits $\geqslant 0$.

C. Aire de la surface de niveau. Nous formulerons au n° 8.3, C un théorème sur le calcul du comportement asymptotique de l'aire d'une surface de niveau compacte quand le niveau tend vers un niveau critique.

D. Ensemble des points de faible gradient. Une autre caractéristique du point critique, analogue à celles que nous avons étudiées plus haut, est la vitesse avec laquelle tend vers zéro le volume de

l'ensemble des points en lesquels la longueur du gradient est plus petite qu'un nombre donné, quand le nombre en question tend vers zéro.

Supposons que l'espace soit muni d'une métrique riemanienne. Cette dernière définit, moyennant la matrice inverse de la matrice de la métrique, une métrique sur le fibré cotangent à l'espace. Calculons dans cette métrique le carré de la longueur du gradient $\partial f = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ de la fonction f considérée. Au voisinage d'un point critique donné de f, pour chaque t petit positif, considérons le volume $V(t)$ de l'ensemble des points du voisinage en lesquels le carré de la longueur du gradient est inférieur à t. Proposons-nous de calculer le comportement asymptotique du volume pour $t \to +0$. Puisque toutes les métriques au voisinage du point sont bornées réciproquement, l'ordre du terme dominant du développement asymptotique est indépendant du choix de la métrique.

Exemple. Pour les points critiques des types A_μ, D_4, D_μ ($\mu > 4$), E_6, E_7, E_8 le terme dominant de la série asymptotique de V pour $t \to +0$ est de la forme Cte$\cdot t^{-\alpha+n/2}(\ln t)^k$, où (k, α) sont respectivement $((\mu-1)/2\mu, 0)$, $(1/2, 0)$, $(1/2, 1)$, $(7/12, 0)$, $(5/8, 0)$, $(5/8, 0)$.

Pour le calcul du comportement asymptotique du volume de l'ensemble des points de faible gradient, on peut utiliser le théorème 7 appliqué à la fonction (df, df), ainsi que les théorèmes 4, 5.

6.5. **Majorations uniformes.** En plus du comportement asymptotique des intégrales oscillantes individuelles, il est souvent utile de connaître les majorations uniformes des intégrales oscillantes qui dépendent de paramètres auxiliaires.

Définissons les notations de majoration uniforme et d'indice d'oscillation uniforme.

Soit $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable. On appelle *déploiement* de f toute fonction différentiable $F: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ qui est égale à f quand le second argument est nul.

Définition. Dans un point critique x^0 de la phase f, il existe une *majoration uniforme d'indice* α si, pour tout déploiement F de f, il existe dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l$ un voisinage du point $x^0 \times 0$ tel que pour toute fonction différentiable φ à support dans ce voisinage et pour tout ε positif, il existe un nombre $C(\varepsilon, \varphi)$ tel que, pour tout τ positif,

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau F(x, y)} \varphi(x, y)\, dx_1 \ldots dx_n \right| < C(\varepsilon, \varphi)\, \tau^{\alpha+\varepsilon}.$$

La borne inférieure α de ces nombres est appelée *indice d'oscillation uniforme* de la phase au point critique.

Il est évident que l'indice d'oscillation uniforme n'est jamais inférieur à l'indice individuel.

Une conjecture naturelle, formulée par V. Arnold dans [11, 12, 17], consiste à supposer que l'indice d'oscillation uniforme est égal à l'indice individuel, i.e. que l'intégrale oscillante en question admet une majoration uniforme en paramètres auxiliaires proportionnelle à la valeur de l'intégrale pour les valeurs initiales de ces paramètres.

Pour que l'hypothèse avancée soit vraie il faut que l'indice d'oscillation individuel soit semi-continu supérieurement pour des variations continues du point critique. Plus exactement, il faut que l'indice d'oscillation d'un point critique composé soit non inférieur à celui d'un point critique plus simple résultant de la décomposition du point composé. En analysant les tableaux des indices de singularités et les adjacences réciproques connues des points critiques classifiés dans le chapitre II de la Première partie, on s'assure qu'une telle semi-continuité existe effectivement pour de tels points critiques.

Théorème 8. *L'indice d'oscillation uniforme est égal à l'indice individuel pour les points critiques de fonctions d'une variable* (I. Vinogradov [382]), *pour les points critiques simples* (J. Duistermaat [98]), *pour les points critiques paraboliques* (Y. Colin de Verdier [78]), *pour les points critiques hyperboliques de la série* $T_{p,q,r}$ (V. Karpushkin [172]), *pour les points critiques de fonctions de deux variables* (V. Karpushkin [170]).

Corollaire. *Pour les points critiques non supprimables dans les familles de phases génériques dépendant de sept paramètres au plus, l'indice d'oscillation uniforme est égal à l'indice individuel.*

Conformément au théorème 8, pendant le mouvement le long de la caustique correspondant à l'un des points critiques énumérés dans le théorème, l'intensité de l'oscillation H.F. au point limite est non inférieure à son intensité dans un point proche situé en amont du point limite. Aussi étonnant que cela puisse paraître, ce fait n'est pas vrai pour toutes les caustiques. En effet, on connaît des points critiques dégénérés des phases pour lesquels l'indice d'oscillation uniforme est plus grand que l'indice individuel (voir [350]).

On trouve quelques exemples de ces points critiques au § 9. Les points critiques en question sont fortement dégénérés, de codimension 80 et au-dessus (i.e. ils sont supprimables par une petite déformation de familles de fonctions ayant un nombre de paramètres moins grand).

En accord avec les exemples cités, il existe un point critique et son déploiement qui présentent la propriété suivante : l'indice d'oscillation du point critique pour une valeur particulière du paramètre de déploiement est plus petit que pour la valeur générale du paramètre, i.e. le module de l'intégrale oscillante pour une valeur parti-

culière du paramètre de déploiement est notablement plus petit que pour la valeur générale du paramètre.

Question intéressante: *est-il possible d'observer une manifestation physique de ce phénomène sous la forme d'une partie de la caustique moins lumineuse que les parties voisines*? Nous avons déjà noté l'absence d'un tel phénomène pour les caustiques génériques dans un espace de faible dimension (théorème 8 et son corollaire).

Remarque. V. Karpushkin a démontré l'égalité des indices d'oscillation uniforme et individuel pour les points critiques de fonctions de deux variables en faisant intervenir le théorème 5. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, cette égalité n'est possible que si l'indice d'oscillation individuel est semi-continu supérieurement lors des déformations du point critique. D'après le théorème 5, on peut reformuler cette propriété de semi-continuité pour les fonctions de deux variables comme suit. Soit une famille quelconque de fonctions de deux variables dépendant d'un paramètre et ayant un point critique à l'origine. Alors l'éloignement de ce point critique est une fonction semi-continue supérieurement du paramètre. Cette assertion vaut probablement pour les fonctions d'un nombre arbitraire de variables.

Il serait intéressant à ce propos d'essayer d'exprimer l'indice d'oscillation uniforme au départ d'autres caractéristiques du point critique: les polyèdres de Newton, la désingularisation, etc. Il est possible que l'indice d'oscillation uniforme s'exprime en fonction des éloignements des points critiques stablement équivalents au point donné. Un autre candidat probable pour la définition de l'indice d'oscillation uniforme est l'indice d'oscillation complexe dont on trouve la définition formelle au § 13. Défini pour un point critique d'une fonction holomorphe, cet indice est l'analogue complexe de l'indice d'oscillation. B. Malgrange a avancé dans [229] une conjecture selon laquelle l'indice d'oscillation complexe est semi-continu lors des déformations du point critique. L'indice d'oscillation complexe est une des valeurs spectrales du point critique de la fonction holomorphe (voir la définition du spectre au § 13). Le lecteur trouvera dans le n° 14.3 l'hypothèse de V. Arnold sur la semi-continuité du spectre lors des déformations du point critique, prouvée dernièrement dans [361 à 365, 336].

Le présent chapitre est consacré à l'étude des intégrales oscillantes individuelles. Dans ce n° il a été déjà question de majorations uniformes. Une autre approche d'estimation des intégrales est la majoration en moyenne. Formulons le résultat correspondant.

Soit une intégrale oscillante dépendant de paramètres auxiliaires

$$I(\tau, y) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau F(x, y)} \varphi(x, y)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Désignons par Σ l'ensemble des points critiques de la phase,

$$\Sigma = \{(x, y) | \partial F/\partial x_j (x, y) = 0, \quad j = 1, \quad \ldots, n\}.$$

Théorème 9 (voir [98]). *Supposons que Σ soit une sous-variété, i.e. que les différentielles $d(\partial F/\partial x_j)$, $j = 1, \ldots, n$, forment une famille libre en tout point de l'ensemble Σ. Supposons que le support de l'amplitude soit contenu dans un voisinage restreint de l'un des points de Σ. Alors pour $\tau \to +\infty$ on a un développement asymptotique*

$$\int |I(\tau, y)|^2 dy \approx \sum_{l=n}^{\infty} a_l(\varphi) \tau^{-l},$$

dans lequel les coefficients numériques a_l sont des distributions de l'amplitude à supports sur Σ. En particulier, le coefficient a_n du terme dominant est proportionnel à l'intégrale du carré du module d'amplitude étendue à l'ensemble critique Σ.

Ce résultat est analogue à la proposition de l'unitarité de l'opérateur canonique de Maslov (voir [234 à 236, 140]) et signifie que, bien que le comportement asymptotique de l'intégrale soit assez complexe pour des valeurs individuelles des paramètres auxiliaires, l'intégrale du carré du module de l'intégrale oscillante se comporte exactement comme si la phase n'avait que des points critiques non dégénérés suivant les variables d'intégration.

La démonstration du théorème 9 utilise le fait que l'intégrale du carré du module est oscillante. Sa phase $F(x, y) - F(z, y)$ admet des points critiques sur l'ensemble $\{(x, y, z) \mid x = z, (x, y) \in \Sigma\}$ (si x et z sont suffisamment voisins), et les points critiques sont non dégénérés transversalement à l'ensemble.

6.6. Nombre de points entiers dans une famille de domaines homothétiques. Considérons dans l'espace $\mathbf{R}^n$ un domaine borné D à frontière différentiable. Proposons-nous d'évaluer la différence entre le volume du domaine ayant subi une homothétie de rapport λ et le nombre $N(\lambda)$ de points à coordonnées entières compris dans le domaine dilaté, i.e. la différence

$$R(\lambda) = \lambda^n V(D) - N(\lambda).$$

L'étude de cette question est justifiée par les problèmes suivants (voir [78]):

1) Le cas où D est un ellipsoïde. Ce cas a été traité en théorie des nombres dans le cadre de l'étude des propriétés arithmétiques des formes quadratiques (voir [169, 383, 34, 163, 214, 230]).

2) Si le domaine D est soumis à la condition $\{f \leqslant 1\}$, où $f: \mathbf{R}^n \setminus 0 \to \mathbf{R}_+$ est une fonction homogène différentiable (par exemple, un polynôme homogène), la fonction $N(\lambda)$ est interprétée comme fonction spectrale d'un opérateur pseudo-différentiel P sur le tore

$\mathbf{R}^n/(2\pi\mathbf{Z})^n$ défini par sa décomposition spectrale

$$P(\exp(i\langle k, x\rangle)) = f(k)\exp(i\langle k, x\rangle).$$

3) On aborde d'une façon analogue le problème qui se pose lors de l'intégration numérique: soient f une fonction différentiable et $N_f(\lambda) = \sum\limits_{x \in \lambda D \cap \mathbf{Z}^n} f(x/\lambda)$. On demande d'évaluer la différence $R_f(\lambda) = \lambda^n \int\limits_D f\,dx - N_f(\lambda)$.

Pour la différence $R(\lambda)$ on obtient l'estimation

$$R(\lambda) = O(\lambda^\beta).$$

Pour $\beta = n - 1$ on obtient une estimation triviale pour n'importe quel domaine. En effet, la différence $R(\lambda)$ est plus petite que le volume d'un voisinage de largeur $2\sqrt{n}$ du bord du domaine dilaté.

Pour la boule de rayon 1 centrée à l'origine on a $\beta \geqslant n - 2$. Plus exactement, il existe un λ aussi grand que l'on veut tel qu'on ait $\sim\lambda^{n-2}$ points à coordonnées entières sur la sphère $\lambda\partial D$. En effet, considérons les points entiers compris entre les sphères $(\lambda + 1)\,\partial D$ et $\lambda\partial D$. Leur nombre est proportionnel au volume, i.e. à $(\lambda + 1)^n - \lambda^n \sim \lambda^{n-1}$. On compte entre ces deux sphères à peu près λ sphères centrées à l'origine dont le carré du rayon est un nombre entier. On a donc λ^{n-1} points entiers sur λ sphères, si bien qu'il existe une sphère sur laquelle on compte au moins $\sim\lambda^{n-2}$ points.

Le meilleur (i.e. le plus petit) nombre β dépend de la nature du domaine. Le mieux étudié est le cas d'un domaine sur un plan.

Théorème 10 (voir [286, 288, 78]). *Supposons que $n = 2$. Soit l l'ordre maximal d'annulation de la courbure du bord du domaine. Alors, si $l = 0$ ou $l = 1$ (cas générique), on peut prendre $\beta = 2/3$. Si $l \geqslant 1$, on peut prendre $\beta = 1 - 1/(l + 2)$. Mieux, si $l \geqslant 2$, on ne peut pas en général prendre β plus petit (par exemple, pour $D = \{x^{2k} + y^{2k} \leqslant 1\}$).*

En dimension >2, on n'a étudié jusqu'à présent que le cas d'un domaine strictement convexe et, pour $n \leqslant 7$, le cas d'un bord générique.

Théorème 11 (voir [286, 287]). *Si le domaine $D \subset \mathbf{R}^n$ est convexe et si la deuxième forme quadratique de son bord est non dégénérée, on peut prendre $\beta = n - 2 + 2/(n + 1)$.*

Théorème 12 (voir [78]). *Soit $n \leqslant 7$. Soit X une variété différentiable compacte orientée de dimension $n - 1$. Il existe alors, dans l'espace de tous les plongements de X dans $\mathbf{R}^n$, un sous-ensemble partout dense ouvert présentant la propriété suivante: si le plongement lui appartient*

et si l'image du plongement délimite un domaine dans $\mathbf{R}^n$, *on peut prendre pour ce domaine* $\beta = n - 2 + 2/(n+1)$.

Comme on l'a vu sur l'exemple de la boule centrée à l'origine, l'estimation à $\beta = n - 2 + 2/(n+1)$ ne peut pas être notablement améliorée en général.

A. Formule de sommation de Poisson. Explicitons la relation entre l'estimation du nombre de points entiers et les intégrales oscillantes.

Le nombre de points du réseau d'entiers dans le domaine dilaté λD est égal au nombre de points du réseau dense $\frac{1}{\lambda}\mathbf{Z}^n$ dans le domaine initial. Supposons pour simplifier que λ soit un entier naturel et que le domaine D est situé dans un cube standard de dimension n à arêtes de longueur 1. Nous pouvons alors assimiler le domaine à une partie du tore $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ et compter sur ce tore les points de projection du réseau $\frac{1}{\lambda}\mathbf{Z}^n$ tombés dans D. Soit χ la fonction caractéristique de D, i.e. une fonction égale à 1 sur D et égale à 0 sur $\overline{D}$. Alors

$$R(\lambda) = \lambda^n \int_{\mathbf{T}^n} \chi\, dx - \sum_{0 \leqslant x_1, \ldots, x_n \leqslant \lambda - 1}{}' \chi(x/\lambda).$$

Développons la fonction caractéristique en série de Fourier

$$\chi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \hat{\chi}(k) \exp(2\pi i \langle k, x \rangle),$$

et considérons une différence analogue pour chaque terme de la série:

$$\lambda^n \int \exp(2\pi i \langle k, x \rangle)\, dx - \sum_x{}' \exp(2\pi i \langle k, x \rangle/\lambda).$$

Pour $k = 0$ la différence est nulle. Si $k \neq 0$, le premier terme de la différence s'annule, et il ne reste qu'à calculer le deuxième terme. Celui-ci est produit des sommes de n progressions géométriques. En faisant la sommation, nous remarquons que le deuxième terme de la différence est nul si l'une quelconque au moins des coordonnées du vecteur k est non divisible par λ. Si par contre toutes les coordonnées de k sont divisibles par λ, la somme est égale à $-\lambda^n$. Le même raisonnement montre que

$$R(\lambda) = -\lambda^n \sum_{k \in \lambda \mathbf{Z}^n \setminus 0} \hat{\chi}(k) = -\lambda^n \sum_{k \in \mathbf{Z}^n \setminus 0} \hat{\chi}(\lambda k). \quad (3)$$

Cette formule est appelée *formule de sommation de Poisson*. Malheureusement elle n'est pas vraie pour la fonction caractéristique: en déduisant cette formule, nous avons permuté les ordres de sommation

suivant k et de sommation suivant les points du réseau serré. Pour que la formule de Poisson soit vraie, il suffit que la série de Fourier soit majorée par une série absolument convergente à coefficients constants. En particulier, la formule de Poisson est vraie pour toute fonction différentiable χ à support borné sur $\mathbf{R}^n$.

Pour étudier la différence $R(\lambda)$, on commence par lisser la fonction caractéristique, puis on applique la formule de Poisson et l'on considère son second membre (voir par exemple [78]). Pour lisser la fonction caractéristique, on fait sa convolution avec une fonction étalon. La transformée de Fourier du produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier des fonctions caractéristique et étalon. Donc, pour pouvoir analyser le second membre de la formule de Poisson appliquée à la fonction caractéristique lissée, il importe de connaître le comportement des coefficients de Fourier $\hat{\chi}(\lambda k)$ de la fonction caractéristique pour $\lambda \to \infty$. Les coefficients de Fourier sont des intégrales oscillantes.

B. Transformée de Fourier de la fonction caractéristique. Le coefficient de Fourier

$$\hat{\chi}(k) = \int_D \exp(-2\pi i \langle k, x \rangle)\, dx$$

est une intégrale oscillante où le rôle de grand paramètre est joué par la longueur du vecteur k et la fonction phase est $-\langle \alpha(k), x\rangle$, où $\alpha(k) = k/\| k \|$ est un vecteur correspondant de longueur unité. A l'aide de la formule de Stokes, on transforme cette intégrale en intégrale oscillante suivant le bord du domaine. La nouvelle intégrale a pour phase comme précédemment la fonction $-\langle \alpha(k), x\rangle$. Donc, pour les grandes longueurs du vecteur k, la valeur du coefficient de Fourier $\hat{\chi}(k)$ se définit par les points critiques de la restriction au bord du domaine de la fonction linéaire $\langle \alpha(k), x\rangle$. Par exemple, si le domaine est convexe et la seconde forme quadratique du bord est non dégénérée, alors tous les points critiques de la restriction sont non dégénérés et $\hat{\chi}(k) \sim \| k \|^{-(n+1)/2}$ (théorème 2).

Examinons plus en détails le cas d'un domaine sur un plan. Les points critiques de la restriction de la fonction $\langle \alpha(k), x\rangle$ à la courbe ∂D sont les points en lesquels le vecteur de la normale à la courbe est égal à $\pm\alpha(k)$. Si dans un tel point la courbure de la courbe est non nulle, le point critique est non dégénéré et sa contribution au coefficient de Fourier est d'ordre $\| k \|^{-3/2}$. Si, au point du bord de normale $\pm\alpha(k)$, la multiplicité du zéro de la courbure est égale à l, le point critique est de type A_{l+1}, auquel cas sa contribution au coefficient de Fourier est d'ordre $\| k \|^{-1-1/(l+2)}$. L'inclinaison de la normale au point du bord où la courbure s'annule peut avoir une tangente irrationnelle. Un tel point du bord n'est critique pour au-

cune fonction $\langle \alpha (k), x \rangle$. La contribution d'un tel point à la somme (3) sera plus ou moins grande suivant que la tangente de l'inclinaison de la normale en ce point se laisse approcher plus ou moins bien par des nombres rationnels. Si la tangente de l'inclinaison se laisse bien approcher par des nombres rationnels à numérateur et dénominateur relativement petits, les points critiques de la restriction de la fonction linéaire $\langle \alpha (k), x \rangle$ à vecteur k de longueur relativement faible seront presque dégénérés et donneront une contribution importante à la somme (3). Une courbe en position générale sur le plan n'a d'autres points dégénérés que ses points d'inflexion; autrement dit, les multiplicités des zéros de la fonction de courbure d'une courbe générique ne sont pas supérieures à 1. C'est pourquoi, pour une courbe générique, les points critiques de la restriction d'une fonction linéaire au bord ∂D sont ou bien non dégénérés, ou bien de type A_2. On peut donc supposer qu'en position générale $R(\lambda) \sim \sim \lambda^{2/3}$. Ce raisonnement justifie le théorème 10.

C. Estimation moyennisée suivant les rotations. La contribution principale aux coefficients de Fourier de la fonction caractéristique d'un domaine est fournie par les voisinages des points du bord en lesquels la normale a une direction rationnelle et la courbure s'annule. B. Randol a avancé l'idée que les points de ce type doivent disparaître en général après une rotation du domaine et qu'une estimation moyenne suivant les rotations peut s'avérer meilleure qu'une estimation individuelle.

Théorème 13 (voir [288, 289, 356, 357]). *Désignons par ds la mesure de Haar sur un groupe orthogonal spécial SO_n. Soit $R(\lambda, s)$ la différence qui correspond au domaine qui a subi d'abord une homothétie de rapport λ, puis une rotation imposée par $s \in SO_n$. Alors*

$$\int_{SO_n} |R(\lambda, s)| \, ds = O(\lambda^{n-2+2/(n+1)}).$$

Théorème 14 (voir [288, 289, 356, 357]). *Soit G le groupe de tous les déplacements de la forme st, où $s \in SO_n$ et t un transport parallèle de l'espace $\mathbf{R}^n$. Soit $I \subset G$ le sous-groupe de tous les transports parallèles de vecteurs de coordonnées entières. Désignons par H l'espace quotient G/I. La structure topologique de H est $SO_n \times \mathbf{T}^n$, où $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ est un tore de dimension n. Soit dh la mesure de Haar sur H. Alors*

$$\left(\int_H |R(\lambda, h)|^2 \, dh \right)^{1/2} = O(\lambda^{(n-1)/2}).$$

M[me] Tarnopolska-Weiss a démontré un théorème analogue au théorème 13 pour des polyèdres dans $\mathbf{R}^n$:

Théorème 15 (voir [339]). *Soit D un polyèdre dans $\mathbf{R}^n$ qui contient l'origine des coordonnées et tel que les prolongements des faces de D*

ne passent pas par l'origine des coordonnées. Alors

$$\int_{SO_n} |R(\lambda, s)|\, ds = O((\ln \lambda)^{2+\delta}).$$

Les démonstrations des théorèmes 13, 14 font intervenir une estimation du carré du module du coefficient de Fourier de la fonction caractéristique du domaine.

Théorème 16 (voir [356, 357]). *Pour* $\|k\| \to \infty$ *on a l'estimation*

$$\int_{SO_n} |\hat{\chi}(k, s)|^2\, ds = O(\|k\|^{-(n+1)}). \tag{4}$$

Si le bord du domaine est une fonction indéfiniment différentiable de paramètres auxiliaires, l'estimation citée est uniforme suivant les paramètres auxiliaires, à condition que ces derniers ne s'écartent pas trop de leurs valeurs initiales.

Ce théorème se démontre par analogie au théorème 9.

Proposons-nous de déduire le théorème 14 du théorème 16. Tout élément $h \in H$ se laisse représenter d'une façon unique sous la forme st, où $s \in SO_n$, $t \in \mathbf{T}^n$. Fixons un s, alors $R(\lambda, h)$ est une fonction sur $\mathbf{T}^n$. Son développement de Fourier est

$$R(\lambda, st) = \sum_k a(\lambda, s, k)\, e^{2\pi i \langle k, t \rangle}.$$

Un simple calcul direct montre que $a(\lambda, s, 0) = 0$, $a(\lambda, s, k) = (-1)^{n+1}\hat{\chi}(-\lambda k, s)\,\lambda^n$. Appliquant l'égalité de Parseval, on obtient

$$\int_{SO_n} \left(\int_{\mathbf{T}^n} |R(\lambda, st)|^2\, dt \right) ds = \int_{SO_n} \sum_{k \in \mathbf{Z}^n \setminus 0} \lambda^{2n} |\hat{\chi}(-\lambda k, s)|^2\, ds.$$

Maintenant le théorème 14 résulte de (4).

Remarque. Pour un domaine dont le bord a la deuxième forme quadratique non dégénérée, on a l'estimation

$$\hat{\chi}(k) \sim \|k\|^{-(n+1)/2}$$

(voir B). On a donc pour un tel domaine

$$\left(\int_{\mathbf{T}^n} |R(\lambda, t)|^2\, dt \right)^{1/2} = O(\lambda^{(n-1)/2}).$$

D. Démonstration du théorème 12. Elle utilise deux résultats intéressants sur les majorations uniformes des intégrales oscillantes qui dépendent de paramètres auxiliaires. Dans ces résultats, on suppose que tous les points critiques de la phase sont simples ou paraboliques.

Théorème 17 (voir [78]). *Considérons l'intégrale oscillante*

$$I(\tau, y) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau F(x, y)} \varphi(x, y)\, dx.$$

Supposons que, quelles que soient les valeurs des paramètres auxiliaires, tous les points critiques de la phase sont ou bien simples, ou bien paraboliques. On a alors l'inégalité

$$|I(\tau, y)| \leqslant \mathrm{Cte} \cdot \tau^{-n/2} \sum_{(x, y) \in \Sigma \cap \operatorname{supp} \varphi} |\det F''_{xx}(x, y)|^{-1/2},$$

où Σ est l'ensemble de tous les points critiques de la phase suivant les variables d'intégration, et F''_{xx} la matrice des dérivées secondes de la phase par rapport aux variables d'intégration.

Pour formuler le théorème suivant, faisons quelques remarques. Soit $F: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^\mu \to \mathbf{R}$ le déploiement versel minimal d'un point critique simple ou parabolique (μ est la multiplicité du point critique). Désignons par W_r le sous-ensemble de la base du déploiement qui réunit tous les points y pour lesquels une fonction $F(\cdot, y)$ a un point critique de multiplicité r. L'ensemble W_r est de codimension $r - 1$, à l'exception du cas où le point critique initial est parabolique, auquel cas l'ensemble W_μ est de dimension 2. Désignons par $\beta(\sigma)$ l'indice d'oscillation d'un point critique de type σ.

Théorème 18 (voir [78]). *Supposons que la phase de l'intégrale oscillante $I(\tau, y)$ soit le déploiement versel minimal d'un point critique simple ou parabolique. Alors, si le support de l'amplitude est contenu dans un voisinage suffisamment restreint du point critique initial, l'intégrale oscillante admet la majoration*

$$|I(\tau, y)| \leqslant \varphi_p(y)\, \tau^{\beta_p},$$

dans laquelle $\beta_p = \max\{\beta(\sigma) \mid \sigma$ est un point critique de multiplicité p adjacent au point critique initial$\}$ et

$$\varphi_p(y) \leqslant \mathrm{Cte} \cdot d(y, W_{p+1})^{-\alpha^p_{p+1}} \ldots d(y, W_\mu)^{-\alpha^p_\mu}.$$

Dans cette formule d est la distance dans une métrique riemanienne quelconque sur la base du déploiement versel, et les quantités $\alpha^p_{p+1}, \ldots$ $\ldots, \alpha^p_\mu$ sont des nombres rationnels positifs définis en fonction de p (voir leur définition dans [78]).

Remarques. 1. Dans ce théorème $p = 1, \ldots, \mu$. Pour $p = \mu$ le théorème fournit une estimation de l'intégrale oscillante avec un indice uniforme égal à l'indice individuel du point critique initial.

2. Tous les points critiques simples et paraboliques sont quasi homogènes. La base d'un déploiement versel d'un point critique quasi homogène a une structure quasi homogène naturelle. Dans la

classe des points critiques quasi homogènes, la sous-classe des points critiques simples et paraboliques vérifie la condition selon laquelle les poids de quasi-homogénéité de la base du déploiement versel sont non négatifs. Ce fait est essentiellement utilisé pour la démonstration des théorèmes 17, 18. On démontre les théorèmes par récurrence sur la multiplicité du point critique initial. On considère une quasi-sphère dans la base du déploiement versel. En faisant la restriction des paramètres de déploiement à la quasi-sphère, l'estimation demandée se trouve déjà démontrée par hypothèses de récurrence. Elle est étendue à la base tout entière en faisant intervenir une structure quasi homogène. Les nombres α_j^p intervenant dans le théorème sont construits à partir des poids de quasi-homogénéité de la base et des indices d'oscillation des points critiques adjacents.

6.7. Indice de singularité maximal. Considérons les points critiques non supprimables par une petite déformation des familles de fonctions de n variables dépendant de l paramètres. Le maximum de leurs indices de singularité en fonction de l et de n s'écrit $\beta_l(n) = 1/2 - 1/N$, où le nombre N est donné pour $n \geqslant 3$ par le tableau suivant:

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10, $n=3$	11, $n=3$	10, $n>3$
N	+2	+3	+4	+6	+8	+12	∞	∞	−24	−16	−12	−8	−6

Tous les nombres $\beta_l = \beta_l(n)$ sont rationnels (voir n° 7.4). Pour des n suffisamment grands, le nombre β_l ne dépend plus de n (c'est une conséquence du théorème de Kushnirenko au n° 12.7 de la Première partie et du théorème des carrés au n° 11.1 de la Première partie).

Le calcul de tous les nombres rationnels semble un problème ardu. On a probablement $\beta_l \sim \sqrt{2l}/6$. Une forme cubique de n variables présumée non dégénérée est dans sa codimension un point critique qui a le plus grand indice de singularité (i.e. pour $l = n(n+1)/2$). Autrement dit, $\beta_{n(n+1)/2} = n/6$ (voir [11]). Du théorème 5 il ressort que $\beta_l(2) \sim 1 - \sqrt{2/l}$. Du théorème 5 il ressort également que pour $n = 2$ le maximum des indices de singularité pour la multiplicité donnée μ présente le comportement asymptotique $1 - 2/\sqrt{\mu}$.

6.8. Sur l'organisation de ce chapitre. Dans le § 7 nous définissons la forme de Gelfand-Leray et nous discutons ses propriétés. Nous considérons le point critique d'un monôme et nous exprimon son indice d'oscillation et son ensemble des indices en fonction des

indices du monôme. Nous introduisons des caractéristiques discontinues de la désingularisation des points critiques d'une phase analytique et nous exprimons l'indice d'oscillation et l'ensemble des indices du point critique en fonction de ces caractéristiques.

Dans le § 8 nous démontrons le théorème 4. A cet effet, nous construisons, d'après le polyèdre de Newton, une variété analytique et son application sur $\mathbf{R}^n$. La variété et l'application construites désingularisent tout point critique ayant le polyèdre de Newton donné, à condition que la partie principale de sa série de Taylor soit non R-dégénérée.

Dans le § 9 nous démontrons l'additivité de l'indice d'oscillation et de sa multiplicité, nous expliquons les calculs des indices des fonctions tabulaires et citons des exemples qui illustrent l'absence de la semi-continuité de l'indice d'oscillation lors des déformations du point critique.

§ 7. Intégrales élémentaires et désingularisation de la phase

Dans ce paragraphe nous étudierons le comportement asymptotique d'une intégrale oscillante dont la phase est un monôme. Nous indiquerons un lien qui existe entre le comportement asymptotique d'une intégrale oscillante et les pôles d'une fonction méromorphe

$$F(\lambda) = \int f^{\lambda}(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

où f est la phase et φ l'amplitude de l'intégrale oscillante. Nous introduirons des caractéristiques discontinues de la désingularisation du point critique de la phase: le poids de la désingularisation, l'ensemble des multiplicités, et nous établirons une relation entre ces caractéristiques et les caractéristiques fondamentales du comportement asymptotique d'une intégrale oscillante: l'indice d'oscillation, sa multiplicité, l'ensemble des indices.

7.1. Forme de Gelfand-Leray. En étudiant des intégrales de la forme

$$\int e^{i\tau f(x)}\,\varphi(x)\,dx, \qquad \int f^{\lambda}(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

où τ, λ sont des paramètres, il est commode de prendre la fonction f comme une des variables. Les intégrales deviennent alors de simples transformées de Fourier et de Mellin de l'intégrale par rapport aux variables qui restent. Dans cette dernière intégrale, l'expression sous le signe somme s'appelle forme de Gelfand-Leray.

Soient $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable et ω une n-forme différentielle différentiable sur $\mathbf{R}^n$. Cherchons une $(n-1)$-forme

différentielle différentiable ψ telle que

$$df \wedge \psi = \omega. \tag{1}$$

Lemme 1. *Si, dans un point donné, la différentielle de la fonction f est non nulle, il existe au voisinage de ce point une forme ψ qui a la propriété* (1). *La restriction de cette forme à une variété de niveau quelconque de la fonction est définie d'une façon unique.*

La forme ayant la propriété (1) est appelée *forme de Gelfand-Leray* de ω et se note ω/df.

Pour la démonstration du lemme, il suffit de passer aux coordonnées en lesquelles la fonction est une des coordonnées.

Exemple. Soient $f(x, y) = y^2 - x^3 - sx$ (où s est un nombre) une fonction, et $\omega = dx \wedge dy$ la forme d'aire. Alors la forme de Gelfand-Leray sur une courbe de niveau t est égale à

$$-dx/2y = -dx/2\sqrt{x^3 + sx + t}.$$

L'intégrale d'une telle forme est dite *elliptique*.

Nous allons démontrer deux propriétés remarquables de la forme de Gelfand-Leray.

Les variétés de niveau de la fonction sont supposées orientées de la façon standard.

Lemme 2. 1. *Soit ω une n-forme différentielle différentiable à support compact. Supposons que le support de la forme ne rencontre pas l'ensemble critique de la fonction f. Alors*

$$\int_{\mathbf{R}^n} \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{f=t} \omega/df \right) dt. \tag{2}$$

2. *Soit ψ une $(n-1)$-forme différentielle différentiable à support compact. Supposons que le support de la forme ne rencontre pas l'ensemble critique de la fonction f. Alors*

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{f=t} \psi \right) = \int_{f=t} d\psi/df. \tag{3}$$

D é m o n s t r a t i o n. La propriété (2) est une conséquence évidente du théorème de Fubini. La propriété (3) découle du théorème de Stokes (voir [52, 209]).

Corollaire. *Soient f une fonction analytique non constante, et ω une n-forme différentielle différentiable à support compact. Alors*

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f(x)} \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau t} \left(\int_{f=t} \omega/df \right) dt. \tag{4}$$

En effet, la réunion des variétés de niveau singulières est de mesure nulle.

7.2. Comportement asymptotique des intégrales de la forme de Gelfand-Leray.

Définition. On appelle *intégrale oscillante élémentaire* une intégrale

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{\pm i\tau x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}} |x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}| \, \varphi(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n, \quad (5)$$

dans laquelle $k_1, \dots, k_m, m_1, \dots, m_n$ sont des entiers non négatifs, φ une fonction différentiable à support compact et τ un paramètre réel.

Dans le texte qui suit, la fonction $\pm x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ sera notée par f, et la forme $|x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}| \, \varphi(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ par ω. Il sera supposé que $k_1 + \dots + k_n \geqslant 2$.

Supposons que $J(t) = \int\limits_{f=t} \omega/df$ pour des t non nuls, où J est une fonction différentiable sur $\mathbf{R} \setminus 0$ qui s'annule en dehors d'un intervalle suffisamment grand. Appelons la fonction J, *fonction de Gelfand-Leray de la forme* ω.

Nous commencerons l'étude du comportement asymptotique d'une intégrale élémentaire pour $\tau \to +\infty$ par le calcul du comportement asymptotique de la fonction de Gelfand-Leray, puis, à l'aide de la formule (4) et des formules canoniques des séries asymptotiques d'intégrales oscillantes simples [108], nous obtiendrons le développement asymptotique de l'intégrale élémentaire.

Nous utiliserons le théorème suivant:

Théorème 1 (voir [168]). *La fonction de Gelfand-Leray se développe en série asymptotique*

$$J(t) \approx \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}^{+} t^{\alpha} (\ln t)^k \quad \textit{pour } t \to +0, \quad (6)$$

$$J(t) \approx \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}^{-} t^{\alpha} (\ln t)^k \quad \textit{pour } t \to -0, \quad (7)$$

où α parcourt un sous-ensemble de nombres réels discontinu et borné inférieurement. Ces développements asymptotiques sont dérivables terme à terme.

Le théorème 1 se démontre sans peine par récurrence sur n.

Pour décrire le développement asymptotique de la fonction de Gelfand-Leray, nous considérerons les intégrales $F_{\pm} = \int\limits_{\pm f > 0} (\pm f)^{\lambda} \omega$,

où λ est un paramètre complexe. Nous montrerons que les intégrales sont des fonctions méromorphes du paramètre. Nous exprimerons les coefficients des séries (6), (7) et les indices α dans ces séries à l'aido des pôles et des coefficients de Laurent des fonctions méromorphes obtenues. Ensuite nous citerons ces pôles et ces coefficients de Laurent sous forme explicite.

A. Développement asymptotique de la fonction de Gelfand-Leray et pôles de sa transformée de Mellin. Soit $J: (0, \infty) \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable qui s'annule pour des valeurs suffisamment grandes de son argument. Supposons qu'elle se laisse développer en série asymptotique

$$J(t) \approx \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{l} a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k \quad \text{pour } t \to +0 \tag{8}$$

dans laquelle α parcourt un sous-ensemble de nombres réels discontinu et borné inférieurement. Considérons l'intégrale $F(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda} J(t)\, dt$, où λ est un paramètre complexe. L'intégrale est bien définie pour des valeurs suffisamment grandes de la partie réelle du paramètre et, sous ces conditions, est une fonction holomorphe du paramètre.

Théorème 2 (voir [121]). *La fonction F admet comme fonction méromorphe un prolongement analytique sur la totalité de la droite complexe. Son prolongement analytique a des pôles dans les points $\lambda = -(\alpha + 1)$, où α parcourt le même ensemble discontinu que dans* (8). *Le coefficient de $(\alpha + 1 + \lambda)^{-(k+1)}$ du développement de Laurent dans le point $\lambda = -(\alpha + 1)$ est égal à $(-1)^k k!\, a_{k,\alpha}$.*

La démonstration découle de façon évidente de la formule

$$\int_0^1 t^{\alpha+\lambda} (\ln t)^k\, dt = (-1)^k k!/(\alpha + \lambda + 1)^{k+1}.$$

B. Pôles et coefficients de Laurent de la transformée de Mellin de la fonction de Gelfand-Leray. Soit $f = \pm x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ un monôme. Considérons deux intégrales

$$F_{\pm}(\lambda) = \int_{\pm f > 0} (\pm f)^{\lambda} |x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}| \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

où λ est un paramètre complexe. D'après la formule (2) de la page 178

$$F_{+}(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda} J(t)\, dt, \quad F_{-}(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} (-t)^{\lambda} J(t)\, dt,$$

où J est la fonction de Gelfand-Leray. D'après les théorèmes 1, 2, les intégrales $F_\pm$ sont des fonctions méromorphes du paramètre. Explicitons les pôles et les coefficients de Laurent de ces fonctions.

Lemme 3. 1. *Les fonctions $F_\pm$ sont holomorphes en dehors des points de la droite complexe qui appartiennent aux n progressions arithmétiques suivantes:*

$$-(m_1+1)/k_1,\ -(m_1+2)/k_1,\ \ldots;\ -(m_2+1)/k_2,$$
$$-(m_2+2)/k_2,\ \ldots;\ \ldots -(m_n+1)/k_n,\ -(m_n+2)/k_n,\ \ldots$$

Dans un point qui appartient exactement à r progressions ci-dessus, les fonctions $F_\pm$ ont un pôle d'ordre non supérieur à r.

2. *Tous les coefficients des développements de Laurent des fonctions $F_\pm$ dans un point quelconque de la droite complexe sont des distributions de l'amplitude φ.*

Démonstration. Il suffit de démontrer les assertions du lemme pour l'intégrale

$$F(\lambda)=\int_0^a\cdots\int_0^a x_1^{k_1\lambda+m_1}\ldots x_n^{k_n\lambda+m_n}\varphi(x)\,dx_1\ldots dx_n$$

avec a positif. Il est commode de considérer une intégrale plus générale

$$\tilde F(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\int_0^a\cdots\int_0^a x_1^{k_1\lambda_1+m_1}\ldots x_n^{k_n\lambda_n+m_n}\varphi(x)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Soit N un grand entier naturel. Faisons la transformation

$$\tilde F=\int_0^a\cdots\int_0^a x^{k\lambda+m}R\varphi\,dx+\sum_{l_1=0}^{N}\frac{a^{k_1\lambda_1+m_1+l_1+1}}{k_1\lambda_1+m_1+l_1+1}\times$$
$$\times\frac{1}{l_1!}\int_0^a\cdots\int_0^a x_2^{k_2\lambda_2+m_2}\ldots x_n^{k_n\lambda_n+m_n}\times$$
$$\times\frac{\partial^{l_1}\varphi}{\partial x_1^{l_1}}(0,x_2,\ldots,x_n)\,dx_2\ldots dx_n,\qquad (9)$$

où $R\varphi$ est la différence de φ et du polynôme de Taylor de φ de degré N en x_1.

La première de ces intégrales est non singulière en λ_1 pour $k_1\lambda_1+m_1+N+1>0$, et les pôles en λ_1 des autres termes du second membre appartiennent à la première des progressions du lemme. En répétant la même procédure avec chaque intégrale successive du second membre suivant les autres variables et en posant ensuite $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=\lambda$, on obtient la première assertion du

lemme. Ce raisonnement permet de prolonger l'intégrale par analyticité au voisinage de n'importe quel point de la droite complexe donné *a priori* (voir [121]). Chaque coefficient de la série de Laurent en tout point de la droite est égal à la somme des intégrales de φ et de ses dérivées par rapport à des sous-espaces de coordonnées déterminés. D'où la seconde assertion du lemme.

Lemme 4. *Supposons que le nombre λ_0 appartienne exactement à r progressions arithmétiques du lemme 3, par exemple aux r premières progressions, et que*

$$\lambda_0 = -(m_1 + l_1 + 1)/k_1 = \ldots = -(m_r + l_r + 1)/k_r,$$

où $l_1, \ldots, l_r$ sont des entiers non négatifs. Alors le coefficient du terme $(\lambda - \lambda_0)^{-r}$ du développement de Laurent en λ_0 de F est égal à

$$\prod_{j=1}^{r} \frac{1}{k_j} \frac{1}{l_j!} \Bigg(\int\limits_{\substack{x_j=0 \\ j=1,\ldots,r}} x_{r+1}^{k_{r+1}\lambda+m_{r+1}} \ldots x_n^{k_n\lambda+m_n} \times$$
$$\times \frac{\partial^{l_1+\ldots+l_r}\varphi}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_r^{l_r}}(0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots, x_n)\, dx_{r+1} \ldots dx_n \Bigg)_{\lambda=\lambda_0},$$

où $\left(\int\right)_{\lambda=\lambda_0}$ symbolise le prolongement analytique de l'intégrale entre parenthèses dans le point λ_0.

Le lemme 4 est une conséquence de (9).

Lemme 5. 1. *Soit $\beta = \max\{-(m_1 + 1)/k_1, \ldots, -(m_n + 1)/k_n\}$ le maximum de la réunion des progressions arithmétiques du lemme 3. Supposons que β appartienne exactement à r progressions arithmétiques du lemme 3. Supposons que l'amplitude φ des intégrales F_+, F_- soit non négative et qu'elle soit positive à l'origine des coordonnées. Alors la somme des coefficients des termes $(\lambda - \beta)^{-r}$ des séries de Laurent de F_+ et de F_- est positive et chacun de ces coefficients est non négatif.*

2. *Supposons qu'il y a parmi les $k_1, \ldots, k_n$ un nombre égal à 1 et un seul, par exemple $k_1 = 1$. Soit λ_0 un nombre qui appartient à la première progression du lemme 3 et n'appartient à aucune autre progression. Cela signifie, en particulier, que $\lambda_0 = -(m_1 + l + 1)$, où l est un entier non négatif. Soient a^+, a^- les coefficients des termes $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ des séries de Laurent en λ_0 de F_+ et de F_- respectivement. Alors $a^+ = (-1)^l a^-$.*

3. *Supposons que f ait un minimum à l'origine, i.e. que $f = + x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$, où tous les exposants sont pairs. Alors $F_-(\lambda) \equiv 0$. Si de plus β, r, φ sont les mêmes que dans le p. 1, le coefficient de $(\lambda - \beta)^{-r}$ dans la série de Laurent de F_+ est supérieur à 0.*

Ce lemme est une conséquence évidente du lemme 4 et de la décomposition des intégrales F_+, F_- en une somme des intégrales suivant les octants de coordonnées.

C. Comportement asymptotique d'une intégrale oscillante élémentaire.

Théorème 3 (cf. [350]). 1. *Une intégrale oscillante élémentaire* (voir (5), page 179) *se développe pour* $\tau \to +\infty$ *en série asymptotique*

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi)\, \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k, \tag{10}$$

où les coefficients numériques $a_{k,\alpha}$ *sont des distributions de l'amplitude* φ *et le paramètre* α *parcourt les progressions arithmétiques du lemme* 3. *Si le nombre* α *appartient exactement à* r *progressions arithmétiques du lemme* 3, *alors* $a_{k,\alpha} \equiv 0$ *pour* $k \geqslant r$.

2. *Soit* $\beta = \max\{-(m_1+1)/k_1, \ldots, -(m_n+1)/k_n\}$ *le maximum de la réunion des progressions arithmétiques du lemme* 3. *Supposons que* β *appartienne à* r *progressions arithmétiques du lemme* 3. *Supposons que* β *n'est pas un entier impair. Supposons que l'amplitude* φ *soit non négative et prenne une valeur positive à l'origine. Alors la partie réelle du coefficient numérique du terme dominant de la série asymptotique* (*i.e. la partie réelle de* $a_{r-1,\beta}$) *est non nulle et de même signe que* $\cos(\pi\beta/2)$; *autrement dit, le signe de la partie réelle est défini par* β.

3. *Supposons que* $k_1 = 1$ *et que* m_1 *soit pair, i.e. que l'hypersurface* $x_1 = 0$ *n'appartienne pas à l'ensemble critique de la phase de l'intégrale élémentaire ni à un sous-ensemble sur lequel l'expression sous le signe somme de l'intégrale élémentaire est non différentiable. Alors* α *ne parcourt dans* (10) *que les progressions arithmétiques d'indices* 2, ... , n *du lemme* 3.

4. *Supposons que la phase de l'intégrale élémentaire ait un minimum à l'origine des coordonnées, i.e. que* $f = +x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$, *où tous les exposants sont pairs. Supposons que l'amplitude* φ *soit non négative et prenne une valeur positive à l'origine. Alors le coefficient numérique du terme dominant de la série asymptotique* (*i.e. le nombre* $a_{r-1,\beta}$) *est non nul et de même argument que* $\exp(-\pi i\beta/2)$, *où les* β, r *sont les mêmes que dans le p.* 1 *du lemme*; *autrement dit, l'argument du coefficient est défini par* β.

On déduit facilement le théorème 3 des théorèmes 1 et 2 et des lemmes 3, 5 au moyen des formules canoniques suivantes. Soit θ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable à support compact identiquement égale à 1 à l'origine. Alors, pour $\tau \to +\infty$ on a, à un infiniment petit près d'ordre aussi élevé que l'on veut,

$$\begin{gathered} \int_0^{\infty} e^{i\tau t} t^{\alpha} (\ln t)^k \theta(t)\, dt \approx \frac{d^k}{d\alpha^k} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(-i\tau)^{\alpha+1}}, \\ \int_{-\infty}^{0} e^{i\tau t} (-t)^{\alpha} (\ln(-t))^k \theta(t)\, dt \approx \frac{d^k}{d\alpha^k} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(i\tau)^{\alpha+1}}. \end{gathered} \tag{11}$$

Dans ces formules $\arg(\pm i\tau) = \pm \pi/2$, et Γ est la fonction gamma (voir [108]).

D. Comportement asymptotique d'une intégrale élémentaire de Laplace.

Définition. On appelle *intégrale élémentaire de Laplace* une intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\tau x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}} |x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}| \, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n,$$

dans laquelle les $k_1, \ldots, k_n, m_1, \ldots, m_n$ sont des entiers non négatifs, les $k_1, \ldots, k_n$ sont pairs, $k_1 + \ldots + k_n \geqslant 2$, φ est une fonction différentiable à support compact et τ un paramètre réel.

Théorème 4. 1. *L'intégrale élémentaire de Laplace se développe pour* $\tau \to +\infty$ *en série asymptotique* (10) *qui possède les propriétés citées à la fin du p.* 1 *du théorème* 3.

2. *Supposons que l'amplitude* φ *soit non négative et prenne une valeur positive à l'origine. Alors le coefficient numérique du terme dominant* (*i.e. le coefficient* $a_{r-1,\beta}$, *où les* r, β *sont les mêmes que dans le p.* 2 *du théorème* 3) *de la série asymptotique de l'intégrale élémentaire de Laplace est positif.*

La démonstration du théorème 4 se réduit à celle du théorème 3. quitte à remplacer les renvois aux formules (11) par les renvois à la formule

$$\int_0^\infty e^{-\tau t} t^\alpha (\ln t)^k \, \theta(t) \, dt \approx \frac{d^k}{d\alpha^k} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\tau^{\alpha+1}}$$

(voir [108]).

7.3. Développement asymptotique et désingularisation.

A. Poids de la désingularisation et collection des multiplicités. Considérons une fonction $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ analytique au voisinage de son point critique x. Supposons que la valeur de f en x soit 0. Considérons une désingularisation de x (voir n° 6.4). Introduisons des caractéristiques de la désingularisation qui nous serviront à exprimer l'indice d'oscillation du point critique, sa multiplicité et l'ensemble des indices.

On entend par désingularisation une variété Y et son application $\pi : Y \to \mathbf{R}^n$ qui possèdent les propriétés indiquées au n° 6.4. Dans un petit voisinage de l'image réciproque du point critique x, considérons la décomposition de l'hypersurface de niveau nul de la fonction $f \circ \pi$ en composantes irréductibles. A chaque composante irréductible qui rencontre l'image réciproque de x sont liés d'une

façon bien définie deux entiers non négatifs, à savoir les multiplicités des zéros de la fonction $f \circ \pi$ et du jacobien de π sur cette composante. Ces multiplicités seront notées respectivement par k et m. Le couple ordonné (k, m) est appelé *multiplicité de la composante*, et le nombre $-(m + 1)/k$, *poids de la composante.*

Définition. On appelle *collection des multiplicités* d'une désingularisation l'ensemble de toutes les multiplicités distinctes deux à deux et telles que $(k, m) \neq (1, 0)$, $k > 0$.

La collection des multiplicités sera notée par *Mult.*

Définition. On appelle *poids d'une désingularisation* le maximum des poids des composantes dont les multiplicités possèdent la propriété suivante: $(k, m) \neq (1, 0)$, $k > 0$. Ainsi donc, le poids de la désingularisation est égal au nombre $\max\{-(m + 1)/k \mid (k, m) \in Mult\}$.

Remarque. La collection des multiplicités est finie, car π est une application propre.

Exemple. Soit f un polynôme homogène de degré N admettant un point critique de multiplicité finie à l'origine. Soit $\pi: Y \to \mathbf{R}^n$ un éclatement à l'origine (voir nº 4.3; voir aussi [318], chapitre II, § 4). Cette application désingularise le polynôme à l'origine. La collection des multiplicités de la désingularisation se réduit à un couple unique $(N, n - 1)$. Le poids de la désingularisation est $-n/N$.

Définissons la notion de multiplicité d'un nombre par rapport à une désingularisation. A cet effet, définissons d'abord la notion de multiplicité d'un nombre dans un point de l'image réciproque du point critique.

Soient α un nombre et y un point de l'image réciproque du point critique x par l'application de désingularisation. Considérons un petit voisinage de y et, dans ce voisinage, la décomposition de l'hypersurface de niveau nul de la fonction $f \circ \pi$ en composantes irréductibles. La *multiplicité de α en y* est le nombre des composantes irréductibles de poids α qui se rencontrent en y. La *multiplicité du nombre α par rapport à la désingularisation* est le maximum des multiplicités de α dans les points de l'image réciproque du point critique x. Il est évident que la multiplicité d'un nombre est un entier compris entre 0 et n.

Exemple. Considérons le point critique et la désingularisation de l'exemple précédent. Soit $n \neq N$. Alors la multiplicité du nombre $-n/N$ par rapport à la désingularisation indiquée est égale à 1. La multiplicité du nombre -1 est égale à 0 si f est de signe constant et à 1 sinon. Les multiplicités des autres nombres sont égales à 0.

B. Série asymptotique de l'intégrale oscillante.

Théorème 5 (voir [350]). *Considérons l'intégrale oscillante*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f(x)} \varphi(x)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Supposons que sa phase est une fonction analytique au voisinage de son point critique qui prend la valeur 0 *dans ce point. Considérons une désingularisation du point critique. Nous disons que si le support de l'amplitude est contenu dans un voisinage suffisamment restreint du point critique de la phase, alors:*

1) *l'intégrale oscillante se développe en série asymptotique*

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi)\, \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k \quad \textit{pour}\ \tau \to +\infty.$$

Les coefficients numériques $a_{k,\alpha}$ sont des distributions de l'amplitude. Le support de chaque distribution appartient à l'ensemble critique de la phase. Le paramètre α parcourt une suite de progressions arithmétiques dont l'une est constituée de nombres entiers négatifs et les autres sont paramétrées par les éléments de la collection des multiplicités de la désingularisation du point critique de la phase. Au couple (k, m) correspond la progression arithmétique $-(m+1)/k$, $-(m+2)/k$, . . .;

2) *la distribution $a_{k,\alpha}$ est identiquement nulle si k est non inférieur à la multiplicité de α par rapport à la désingularisation;*

3) *si le poids de la désingularisation du point critique de la phase est supérieur à* -1, *alors:*

a) *l'indice d'oscillation du point critique de la phase est égal au poids de la désingularisation;*

b) *la multiplicité de l'indice d'oscillation du point critique de la phase est inférieure d'une unité à la multiplicité (par rapport à la désingularisation) du nombre égal au poids de la désingularisation;*

c) *si l'amplitude est non négative et prend une valeur positive au point critique de la phase, alors le coefficient numérique du terme dominant de la série asymptotique de l'intégrale oscillante (i.e. le coefficient $a_{K,\beta}$, où β est l'indice d'oscillation et K la multiplicité de l'indice d'oscillation) est non nul;*

d) *si le point critique de la phase est de multiplicité finie, le coefficient numérique du terme dominant de la série asymptotique de l'intégrale oscillante est égal à la valeur de l'amplitude au point critique de la phase multipliée par une constante non nulle qui ne dépend que de la phase;*

4) *si le point critique de la phase est un point maximum ou minimum, les assertions* a) *à* d) *du p.* 3 *du théorème ont lieu;*

5) *soit π l'application de désingularisation. Supposons que, sur l'image réciproque du point critique de la phase, il n'existe aucun point où se rencontrent au moins deux composantes irréductibles de l'hypersur-*

face de niveau nul de la fonction $f \circ \pi$ de multiplicités (1, 0). [*Remarquons que cette supposition est vérifiée si la phase admet un point critique de multiplicité finie* (*si* $n = 2$, *il convient d'éliminer aussi le cas où le point critique est non dégénéré*).] *Alors le paramètre* α *de la série asymptotique de l'intégrale oscillante ne parcourt que des progressions arithmétiques du p.* 1 *paramétrées par les éléments de la collection des multiplicités de la désingularisation. En particulier, l'indice d'oscillation du point critique de la phase est non supérieur au poids de la désingularisation*;

6) *soient* β *le poids de la désingularisation et* k *la multiplicité de* β *par rapport à la désingularisation. Considérons l'ensemble de tous les points de l'image réciproque* (*par l'application de désingularisation*) *en lesquels la multiplicité de* β *est égale à* k. *Supposons que cet ensemble ne rencontre aucune composante irréductible de l'hypersurface de niveau nul de la fonction* $f \circ \pi$ *de multiplicité* (1, 0). *Supposons que les conditions du p.* 5 *ont lieu. Supposons que* β *n'est pas un nombre entier impair. Alors les assertions* a) *à* d) *du p.* 3 *du théorème ont lieu*;

7) *supposons que le poids de la désingularisation est égal à* —1 *et que la multiplicité du nombre* —1 *par rapport à la désingularisation est non inférieure à* 2. *Alors l'indice d'oscillation du point critique de la phase est égal à* —1. *Mieux, la multiplicité de l'indice d'oscillation est égale ou de* 1 *inférieure à la multiplicité du nombre* —1 *par rapport à la désingularisation*

Remarques. 1. Une conséquence de ce théorème est le théorème 3, § 6 du développement asymptotique.

2. La désingularisation d'un point critique n'est pas unique. Cependant, si le poids d'une désingularisation est supérieur à —1, celui de toute autre désingularisation est aussi supérieur à —1 et ne dépend pas de la désingularisation (p. 3 du théorème 5). Il serait intéressant de donner une démonstration purement algébrique à ce fait.

3. La désingularisation d'un point critique a pratiquement toujours un poids supérieur à —1. Les conditions suffisantes correspondantes sont formulées dans le théorème 5, § 8, ainsi que dans d) du théorème 4, § 6.

4. Nous citons dans le nº 9.2 (voir aussi [350]) un exemple de point critique dont le poids de la désingularisation est inférieur à —1 et l'indice d'oscillation est plus petit que le poids de la désingularisation.

5. Revenons au problème de reconstitution de la valeur de la fonction φ au point critique de la fonction f d'après les intégrales de φ étendues aux hypersurfaces de niveau de f (voir nº 6.3). Pour un point critique de multiplicité finie vérifiant les conditions de l'un des points 3, 4 ou 6 du théorème 5, ce problème peut être résolu comme suit. Comme densité sur les hypersurfaces de niveau de f, pre-

nons la $(n-1)$-forme différentielle de Gelfand-Leray $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n/df$. On veut donc, connaissant la fonction de Gelfand-Leray $J(t) = \int_{f=t} \varphi \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n/df$, reconstituer la valeur de φ au point critique. D'après la formule (4) de la page 178, l'intégrale oscillante est la transformée de Fourier de la fonction de Gelfand-Leray. L'assertion 3, d) du théorème 5 fournit donc la solution du problème.

Exemple. Soit f un polynôme homogène de degré N admettant un point critique de multiplicité finie à l'origine. La désingularisation de ce point critique est indiquée dans l'exemple de la page 185. Toutes les multiplicités de cette désingularisation se réduisent au couple $(N, n-1)$. Conformément au théorème 5, le paramètre α du développement asymptotique de l'intégrale oscillante de phase f parcourt la progression arithmétique $-n/N, -(n+1)/N, \ldots$ Si $N > n$ (ou si f est non alternée), l'indice d'oscillation du point critique est égal à $-n/N$, et la multiplicité de l'indice d'oscillation est 0.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e. Faisons un changement de variables dans l'intégrale oscillante à l'aide de l'application de désingularisation $\pi : Y \to \mathbf{R}^n$. L'intégrale se transforme alors en une intégrale étendue à Y. Par une partition suffisamment fine de l'unité, transformons cette dernière intégrale en somme d'intégrales élémentaires (ce qui est possible, car π est la désingularisation).

Les pp. 1 et 2 du théorème 5 résultent alors immédiatement du p. 1 du théorème 3. De même, les pp. 3, 4, 5, 6 du théorème 5 résultent des pp. 2, 4, 3, 2 du théorème 3 respectivement.

Démontrons le p. 7. On a

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f} \varphi \, dx = \int_0^\infty e^{i\tau t} J(t)\, dt + \int_0^\infty e^{-i\tau t} J(-t)\, dt,$$

où J est la fonction de Gelfand-Leray. Utilisant la désingularisation et le théorème 2, on obtient

$$J(\pm t) \approx a^{\pm}_{r,0} (\ln t)^r + \ldots + a^{\pm}_{0,0} + \sum_{\alpha > 0} t^\alpha (\ln t)^k a^{\pm}_{k,\alpha},$$

où $(r+1)$ est la multiplicité du nombre -1 par rapport à la désingularisation, et $a^{\pm}_{k,\alpha}$ sont des nombres réels. Si l'amplitude est de signe constant et distincte de zéro au point critique de la phase, alors, d'après le lemme 7, les nombres $a^{\pm}_{r,0}$ sont de même signe et leur somme est non nulle. Appliquant les formules (11) de la page 183, on s'assure que, dans le développement asymptotique de l'intégrale

oscillante, la partie réelle du coefficient de $(\ln \tau)^{r-1}/\tau$ est proportionnelle à $a^+_{r,0} + a^-_{r,0}$ et le coefficient de $(\ln \tau)^r/\tau$ est proportionnel à $a^+_{r,0} - a^-_{r,0}$, avec des facteurs de proportionnalité non nuls. Le p. 7 du théorème est démontré.

Remarque. On fait intervenir les hypothèses formulées dans les pp. 3, 4 et 6 du théorème 5 afin d'exclure l'influence des points de la partie non singulière de l'hypersurface de niveau nul de f sur le terme dominant de la série asymptotique.

C. Comportement asymptotique de l'intégrale de Laplace. On appelle *intégrale de Laplace* une intégrale de la forme

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\tau f(x)} \varphi(x)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

où τ est un paramètre réel positif. Les fonctions f et φ sont respectivement la *phase* et l'*amplitude* de l'intégrale.

Supposons que la phase admet un point minimum et est une fonction analytique au voisinage de ce point. Supposons que la valeur de la phase dans son point minimum soit nulle.

Théorème 6. *Si le support de l'amplitude est contenu dans un voisinage suffisamment restreint du point minimum, l'intégrale de Laplace se développe pour $\tau \to +\infty$ en série asymptotique*

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi) \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k,$$

qui vérifie les conditions des pp. 1, 2 *et* 4 *du théorème* 5.

La démonstration du théorème 6 est analogue à celle du théorème 5, quitte à remplacer les renvois au théorème 3 par des renvois au théorème 4.

Corollaire. *Soit, pour tout t petit positif, $V(t)$ le volume de l'ensemble des points en lesquels la phase prend une valeur inférieure à t. Alors la fonction V se développe pour $t \to +0$ en série asymptotique*

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha} t^{-\alpha} (\ln t)^k.$$

Ici le paramètre α parcourt un ensemble fini de progressions arithmétiques constituées de nombres rationnels négatifs, à savoir : les progressions arithmétiques du p. 1 *du théorème* 5. *Les coefficients de la série et l'ordre du terme dominant de la série vérifient les assertions des pp.* 2 *et* 4 *du théorème* 5.

D é m o n s t r a t i o n d u c o r o l l a i r e. La dérivée de la fonction V est égale à la fonction de Gelfand-Leray de phase f et d'amplitude 1.

7.4. Rationalité des indices de singularité maximaux $\beta_l(n)$ (voir n° 6.8). Considérons un polynôme de degré N à coefficients indéterminés et à termes constants et linéaires nuls

$$f(x, a) = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \geqslant 0 \\ 1 < |k_1 + \ldots + k_n| \leqslant N}} a_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}.$$

Pour des coefficients réels a donnés, le polynôme définit une fonction $f(\cdot, a): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ qui a un point critique à l'origine. D'après le théorème 5, il existe une progression arithmétique qui contient l'ensemble des indices de ce point critique.

Théorème 7. *Il existe une progression arithmétique unique qui contient l'ensemble des indices des points critiques à l'origine des phases $f(\cdot, a)$ pour a quelconque.*

Le théorème 7 découle du lemme 8.

Lemme 8. *Considérons dans l'espace des coefficients du polynôme f un ensemble semi-algébrique A. Il existe alors un sous-ensemble algébrique propre $B \subset A$ et une progression arithmétique Q qui ont la propriété suivante: pour tout $a \in A \setminus B$ l'ensemble des indices du point critique à l'origine de la phase $f(\cdot, a)$ appartient à Q.*

D é m o n s t r a t i o n. On peut admettre que A soit non singulier et connexe. Soit f' la restriction de f à la variété $\mathbf{R}^n \times A$. Considérons une désingularisation $\pi: Y \to \mathbf{R}^n \times A$ de l'hypersurface de niveau nul de f' (voir [153]). D'après le théorème de Bertini-Sard, il existe un sous-ensemble algébrique propre $B \subset A$ qui a la propriété suivante: pour tout $a \in A \setminus B$ la restriction de l'application de désingularisation à l'image réciproque de l'ensemble $\mathbf{R}^n \times a$ est une désingularisation de l'hypersurface de niveau nul de la fonction $f(\cdot, a): \mathbf{R}^n \times a \to \mathbf{R}$; mieux, la topologie de cette désingularisation et toutes les multiplicités sont des fonctions localement constantes de a. Le lemme résulte maintenant du théorème 5.

§ 8. Séries asymptotiques et polyèdres de Newton

Nous considérons la classe des points critiques des phases dont la série de Taylor a un polyèdre de Newton donné. Si le polyèdre de Newton est éloigné, presque tous les points critiques de la classe ont même indice d'oscillation. Celui-ci est égal à l'éloignement du polyèdre de Newton. Un point critique de la classe a un indice d'oscillation type si la partie principale de sa série de Taylor est non $\mathbf{R}$-dégénérée (i.e. si un ensemble fini de coefficients de la série de Taylor vérifie des conditions algébriques explicites, voir n° 6.2). Cette assertion fait l'objet du théorème 4 du § 6 dont la démonstration est le but du présent paragraphe.

La démonstration du théorème est basée sur la désingularisation des points critiques des phases. Nous avons défini dans le paragraphe précédent une caractéristique numérique de la désingularisation, à savoir son poids, et montré que si le poids est supérieur à —1, l'indice d'oscillation du point critique est égal au poids (théorème 5, § 7). Dans ce paragraphe nous construirons une variété et une application de celle-ci sur $\mathbf{R}^n$ qui ont la propriété de résoudre les singularités de presque tous les points de la classe considérée. Nous montrerons que le poids de la désingularisation proposée est égal à l'éloignement du polyèdre de Newton et le théorème 4 du § 6 sera démontré.

L'opération de désingularisation utilise le polyèdre de Newton et se déroule en trois étapes. La première consiste à partitionner, d'après le polyèdre de Newton, l'octant positif de l'espace en cônes convexes dont chacun est défini par un ensemble fini de conditions linéaires à coefficients rationnels. A la deuxième étape on amincit les cônes afin d'obtenir une nouvelle partition de l'octant positif, plus fine que la précédente. Tous ses cônes sont simpliciaux et de multiplicité 1 (voir les définitions dans le nº 8.1, A). A la troisième étape on construit, d'après la nouvelle partition, une variété désingularisante et une application de cette variété sur $\mathbf{R}^n$. Ces variété et application peuvent désingulariser presque tous les points critiques de la classe considérée.

A chaque étape suivante on se sert uniquement du résultat de l'étape précédente : c'est ainsi que la deuxième étape ignore le polyèdre de Newton et la troisième n'utilise pas la partition initiale. A la première et à la troisième étape, le résultat est défini sans ambiguïté par les données initiales. Par contre, le résultat de la deuxième étape — la nouvelle partition — n'est pas défini d'une façon unique par la partition initiale. Ainsi donc, bien que construite d'après le polyèdre de Newton, la désingularisation n'est pas définie une fois pour toutes par ce polyèdre.

Nous commencerons par la troisième étape : à partir de l'ensemble de cônes qui possède les propriétés indiquées plus haut, nous construirons la variété cherchée et définirons sa projection canonique sur $\mathbf{R}^n$ (voir nº 8.1, F). Ensuite nous développerons la première et la deuxième étape et nous montrerons que la variété et l'application obtenues ont effectivement la propriété de résoudre les singularités des points critiques constituant la classe aux parties principales de leurs séries de Taylor non $\mathbf{R}$-dégénérées. En conclusion nous déduirons le théorème 4 du § 6 du théorème 5 du § 7.

Un groupe agit canoniquement sur la variété que nous allons construire : c'est un tore de dimension n (pour plus de détails, voir nº 8.1, D). Les variétés sur lesquelles opère un tore sont appelées variétés toriques. On trouve une théorie bien développée des variétés toriques dans [178, 86]. Les orbites d'action du tore sur la variété torique sont en bijection avec un certain ensemble de cônes convexes

construits d'après la variété. Cet ensemble de cônes définit à son tour une variété torique unique. La troisième étape de nos raisonnements est précisément le passage canonique (en théorie des variétés toriques) de l'ensemble de cônes à la variété. Une particularité remarquable des variétés toriques est que la plupart des constructions analytiques et topologiques sur ces variétés se réduisent à des constructions algébriques linéaires sur l'ensemble de cônes correspondant. On en voit un exemple dans ce paragraphe : c'est le calcul du poids de la désingularisation.

A. Kushnirenko fut le premier à appliquer les polyèdres de Newton à l'étude des singularités ([190, 191]). A. Khovanski attira l'attention sur le lien existant entre variétés toriques et polyèdres de Newton (voir [42, 154, 155] et aussi [350, 359]).

8.1. Construction de la variété.

A. Cône, squelette, multiplicité, éventail. On appelle *cône engendré par des vecteurs* $a_1, \ldots, a_s \in \mathbf{R}^n$ un cône constitué de combinaisons linéaires de ces vecteurs à coefficients non négatifs. Un cône ayant son sommet à l'origine des coordonnées est dit *rationnel* s'il peut être engendré par un ensemble fini de vecteurs à coordonnées entières. Le *squelette* d'un cône rationnel est l'ensemble de tous les vecteurs entiers primitifs (non multiples) dans les faces de dimension 1. Il est évident que le squelette d'un cône engendre le cône lui-même.

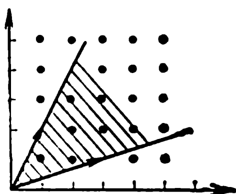


Fig. 66

Exemple. Le cône de la figure 66 est rationnel. Son squelette est formé des vecteurs (3, 1), (1, 2).

On dit que le cône rationnel est *simplicial* si les vecteurs de son squelette forment une famille libre.

On appelle *multiplicité* d'un cône simplicial de dimension maximale n l'indice du sous-réseau engendré par les vecteurs du squelette dans le réseau d'entiers de l'espace. Il est évident que la multiplicité d'un cône est égale à 1 si et seulement si son squelette forme une base du réseau d'entiers de l'espace. Mieux : si la multiplicité d'un cône est supérieure à 1, il lui appartient un vecteur entier qui est une combinaison linéaire de vecteurs du squelette dans laquelle tous les coefficients sont non négatifs, inférieurs à 1 et non tous nuls.

Exemple. Le cône de la figure 66 est simplicial (tous les cônes rationnels de dimension deux le sont). La multiplicité de ce cône est égale à 5.

Problème. Montrer que la multiplicité d'un cône est égale au module du déterminant formé des coordonnées des vecteurs de son squelette.

On appelle **éventail** un ensemble fini de cônes rationnels tels que :

a) chaque face du cône de l'ensemble appartient elle-même à l'ensemble ;

b) l'intersection de deux cônes quelconques de l'ensemble est une face de chacun de ces cônes.

Un éventail est dit *simple* si tous ses cônes sont simpliciaux et le squelette de tout cône se laisse compléter en une base du réseau d'entiers de l'espace tout entier.

B. Applications monomiales. Une application rationnelle h : $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de la forme

$$x_i \circ h = x_1^{a_i^1} \ldots x_n^{a_i^n}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

où a_i^j est une matrice entière de déterminant ± 1, est dite *monomiale*. L'ensemble de définition d'une application monomiale contient toujours le complémentaire de la réunion des hyperplans de coordonnées.

Il est évident que l'inverse d'une application monomiale est aussi une application monomiale et qu'elle se définit par la matrice inverse. L'ensemble de définition d'une application monomiale se confond avec l'espace tout entier si et seulement si sa matrice a des éléments non négatifs.

Soit un couple ordonné de bases du réseau d'entiers de $\mathbf{R}^n$. On dit qu'une application monomiale est *associée* au couple si elle se définit par la matrice de l'adjoint de l'opérateur de passage de la seconde base à la première écrit dans la seconde base. On trouve donc dans les colonnes les coordonnées des vecteurs de la première base écrits dans la seconde.

Exemple. Soient dans le réseau d'entiers de $\mathbf{R}^2$ deux bases : la première (1, 0), (1, 1) et la seconde (1, 0), (0, 1). L'application monomiale h associée à ce couple se définit alors par

$$x_1 \circ h = x_1^1 x_2^1, \quad x_2 \circ h = x_1^0 x_2^1.$$

Lemme 1. *La permutation des éléments d'un couple entraîne l'inversion de l'application monomiale associée à ce couple. Dans un triplet de bases, l'application associée à la première et à la troisième est la composée des applications associées l'une à la première et à la deuxième et l'autre à la deuxième et à la troisième base, exactement*

$$h_{1,3} = h_{2,3} \circ h_{1,2}.$$

La démonstration est évidente.

C. Variété associée à un éventail simple. Soit un éventail simple. Construisons une variété analytique réelle non singulière de dimension n associée à cet éventail. La construction de la variété indiquée

généralise la construction des compactifiés standards de l'espace $(\mathbf{R}\setminus 0)^n$. Plus exactement, pour les éventails de la figure 67, *a*, *b* la construction décrite conduit aux variétés $(\mathbf{R}P^1)^n$ et $\mathbf{R}P^n$ respectivement.

Les cartes de la variété sont en bijection avec les cônes de dimension n de l'éventail. Chaque carte est un $\mathbf{R}^n$. Nous introduirons une relation d'équivalence pour les points des cartes différentes, après quoi nous introduirons une topologie et la structure d'une variété sur l'ensemble des classes d'équivalence.

Il est commode d'ordonner les vecteurs du squelette de chaque cône de l'éventail. Fixons donc des ordres correspondants. Nous verrons dans la suite que la variété cherchée est indépendante de ces ordres.

A tout couple ordonné de cartes est associée une application monomiale de la première carte dans la seconde: c'est une application

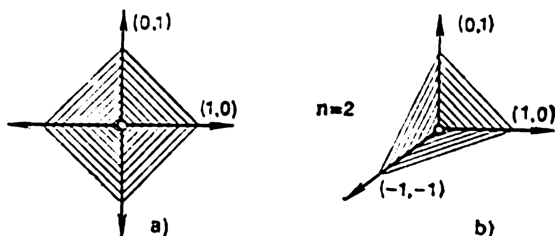


Fig. 67

monomiale associée au couple ordonné de bases du réseau d'entiers de l'espace où la première (resp. la seconde) base est engendrée par le squelette du cône de dimension n qui correspond à la première (resp. à la seconde) carte. Pour la variété à construire, cette application monomiale joue le rôle de fonction de passage de la première carte à la seconde.

Nous dirons qu'un point de la première carte est *équivalent* à un point de la seconde si l'application monomiale associée à ces cartes est définie dans le point en question de la première carte et lui associe le point mentionné de la seconde.

Exemple. Soient deux cônes dans $\mathbf{R}^2$; le squelette du premier est formé des vecteurs (1, 1), (1, 2), et celui du second, des vecteurs (1, 1), (3, 2). Alors l'application monomiale h de la première carte dans la seconde est définie par $x_1 \circ h = x_1^1 x_2^1$, $x_2 \circ h = x_1^0 x_2^{-1}$. Dans ces conditions, le point (0, 2) de la première carte, par exemple, est équivalent au point (0, 1/2) de la seconde.

La relation introduite sur les couples de points devient une relation d'équivalence si elle est symétrique. Nous verrons qu'il en est ainsi en démontrant le

Lemme 2. *L'application monomiale associée à un couple ordonné de cartes possède la propriété suivante: étant donnée, sur la première carte, une suite de points*

a) *admettant une limite finie dans la première carte;*

b) *ayant défini en tous ses points l'application monomiale;*

c) *et telle que la suite des images de ses points admet une limite finie sur la seconde carte,*

l'application monomiale est définie et non dégénérée dans le point limite de la suite.

D é m o n s t r a t i o n. Elle utilise le fait que l'intersection des cônes correspondant aux deux cartes est une face de chacun d'eux. Il suffit de considérer le cas où la suite des points appartient à une courbe différentiable et le point limite de la suite répond à la valeur nulle du paramètre de la courbe. L'existence d'une telle courbe découle du lemme du choix des courbes (voir [245]). Soit donc une courbe d'équation $x_j(t) = t^{k_j}(c_j + O(t))$, $j = 1, \ldots, n$, où les $c_1, \ldots, c_n$ sont non nuls. Son image est alors d'équation $x_j(t) = t^{m_j}(d_j + O(t))$, $j = 1, \ldots, n$, où $m_j = \sum a^i_j k_i$ et a^i_j est la matrice de l'application monomiale. Les exposants k_j, m_j sont non négatifs par définition. En accord avec ces formules, un vecteur $(m_1, \ldots, m_n)$ est une combinaison linéaire de colonnes de la matrice a^i_j à coefficients $k_1, \ldots, k_n$. Par définition, on trouve dans leé colonnes les coordonnées des vecteurs du squelette du cône associs à la première carte exprimés en fonction des vecteurs du squelette du cône associé à la seconde. Puisque les m_j sont non négatifs, la combinaison linéaire indiquée des vecteurs du premier squelette appartient au second cône. Or, l'intersection de cônes est une face de chacun d'eux. Si donc un coefficient k_j de la combinaison linéaire est non nul, tous les éléments de la j-ième colonne de la matrice de l'application monomiale sont nuls sauf un qui est égal à 1. Puisque k_j est positif, le point limite de la courbe pour $t \to 0$ appartient à l'hyperplan $x_j = 0$. Or, on a montré que l'application monomiale est définie et non dégénérée dans un point générique de cet hyperplan. Le lemme est démontré.

Nous avons donc défini une relation d'équivalence sur les couples de points des cartes. Munissons l'ensemble des classes d'équivalence d'une topologie et d'une structure de variété analytique. Chaque carte se plonge canoniquement dans un ensemble de classes d'équivalence comme une partie de celui-ci. Nous dirons qu'un ensemble est ouvert si ses intersections avec toutes les cartes sont ouvertes. On déduit sans peine du lemme 2 qu'une telle définition munit l'ensemble des classes d'équivalence d'une structure d'espace topologique de Hausdorff. Les plongements des cartes définissent un recouvrement de l'espace topologique par des ensembles ouverts et définissent des homéomorphismes de ces ensembles à $\mathbf{R}^n$. Par construction, les

fonctions de passage liées à ces homéomorphismes sont des applications monomiales dans l'ensemble de définition. Nous avons donc construit, à partir d'un éventail simple, une variété analytique que nous appellerons *variété associée à l'éventail simple.*

Problème. Montrer que les variétés $(\mathbf{R}P^1)^n$, $\mathbf{R}P^n$ sont associées aux éventails de la figure 67, *a* et *b* respectivement.

D. Tore opérant sur une variété associée à un éventail simple. L'espace $(\mathbf{R}\diagdown 0)^n$ forme, par rapport à la multiplication coordonnée par coordonnée, un groupe appelé tore de dimension n. Le tore agit sur lui-même. Son action se prolonge canoniquement sur $\mathbf{R}^n$.

Considérons une variété associée à un éventail simple. Sur les cartes de la variété agit un tore. On voit sans peine que cette action se prolonge en action du tore sur la variété tout entière. Décrivons les orbites de cette action.

En dimension n il n'existe qu'une orbite: elle est isomorphe au tore. Pour une carte arbitraire c'est $(\mathbf{R}\diagdown 0)^n$.

Les orbites de dimension $(n - 1)$ sont en bijection avec les cônes de dimension un de l'éventail simple. En effet, chaque carte rencontre n orbites de dimension $(n - 1)$. Leurs adhérences en coordonnées locales se confondent avec des hyperplans de coordonnées. A une orbite de dimension $(n - 1)$ située dans l'hyperplan $x_j = 0$, faisons correspondre un vecteur d'indice j dans le squelette du cône répondant à la carte. (Rappelons que les vecteurs des squelettes des cônes de l'éventail sont ordonnés.)

Lemme 3. 1. *Cette correspondance définit une correspondance bijective entre l'ensemble des orbites de dimension* $(n - 1)$ *et l'ensemble des cônes de dimension un de l'éventail simple.*

2. *L'adhérence de toute orbite de dimension* $(n - 1)$ *est une sous-variété de dimension* $(n - 1)$.

D é m o n s t r a t i o n. Considérons deux cartes de la variété et la fonction de passage de la première à la seconde. Supposons qu'une orbite de dimension $(n - 1)$ de la première carte passe en une orbite de dimension $(n - 1)$ de la seconde. Pour simplifier les notations, admettons que ces orbites sont situées dans les hyperplans $x_1 = 0$ des deux cartes. Montrons qu'aux deux cartes correspond un seul et même cône de dimension un. En effet, la fonction de passage est une application monomiale. Par hypothèse, les éléments de la première colonne de la matrice de l'application monomiale sont tous nuls sauf le premier qui est égal à 1. Par définition de la fonction de passage, cela signifie que les premiers vecteurs des squelettes des cônes des deux cartes sont les mêmes, ce qu'il fallait démontrer. On montre d'une façon analogue que deux orbites de dimension $(n - 1)$ qui correspondent dans des cartes différentes à un même cône de dimension 1 se confondent.

L'assertion de la deuxième partie du lemme est triviale. Le lemme est démontré.

Par analogie à ce qui précède, on établit une correspondance bijective entre l'ensemble des orbites de dimension k et l'ensemble des cônes de dimension $(n - k)$ d'un éventail simple. Les adhérences des orbites sont des plans de coordonnées. Si une orbite appartient à l'adhérence d'une autre, le cône répondant à la seconde est une face du cône répondant à la première (pour plus de détails, voir [178]).

E. Applications des variétés associées à des éventails simples. Soient deux éventails. On dit que le premier est *plus fin* que le second si, pour tout cône du premier éventail, il existe dans le second un cône qui le contient.

Considérons deux éventails simples. Supposons que le premier soit plus fin que le second. Considérons des variétés associées à ces éventails. Définissons une application analytique de la première variété dans la seconde. A cet effet, définissons la restriction de l'application à chaque carte de la première variété. Prenons une carte quelconque de la première variété; elle répond à un cône de dimension n du premier éventail. Il existe par hypothèse dans le second éventail un cône qui contient ce cône du premier. Il va de soi que le cône du second éventail est lui aussi de dimension n. Donc, il lui correspond une carte de la seconde variété. Nous avons ainsi un couple ordonné de cartes. Considérons une application monomiale de la première carte dans la seconde associée à ce couple de cartes (voir nº 8.1, C). La matrice de cette application monomiale a les éléments non négatifs, car le premier cône se plonge dans le second. Ainsi donc, nous avons défini une application analytique d'une carte arbitraire de la variété associée au premier éventail dans une des cartes de la variété associée au second éventail.

Lemme 4. *Les applications locales décrites sont compatibles et induisent une application analytique bien définie de la première variété dans la seconde.*

Le lemme 4 est une conséquence directe du lemme 1.

Remarque. Il existe sur chaque variété une orbite unique de dimension n d'action d'un tore. L'application ci-dessus établit l'isomorphisme de ces orbites.

Théorème 1 (voir [178]). *Soient deux éventails simples, le premier plus fin que le second. Considérons des variétés associées aux éventails et l'application de la première variété dans la seconde construite de la façon indiquée plus haut. Nous disons que si la réunion des cônes du premier éventail contient la réunion des cônes du second, l'application en question est propre. La réciproque est aussi vraie.*

Corollaire. *Dans les conditions du théorème la première variété est appliquée sur la seconde.*

En effet, l'application est propre et inversible sur un ensemble partout dense.

Le théorème direct résulte du lemme 5. La réciproque se démontre d'une façon analogue.

Lemme 5. *Soit donnée, dans une carte de la seconde variété, une courbe de la forme* $x_j(t) = t^{m_j}(d_j + O(t))$, $m_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$, *où les* $d_1, \ldots, d_n$ *sont non nuls. Il existe alors une carte de la première variété dans laquelle l'image réciproque de la courbe a une limite finie pour* $t \to 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Analogue à celle du lemme 2. Il s'agit de choisir une carte de la première variété et, dans cette carte, une courbe de la forme $x_j(t) = t^{k_j}(c_j + O(t))$, $j = 1, \ldots, n$, avec les $c_1, \ldots, c_n$ non nuls, telle que son image se confonde avec notre courbe. Bornons-nous à décrire une carte convenable. Considérons la base formée par le squelette du cône répondant à la carte de la seconde variété. Considérons une combinaison linéaire de cette base à coefficients non négatifs $m_1, \ldots, m_n$. Nous obtiendrons un vecteur appartenant au cône. Par définition, il existe un cône de dimension n du premier éventail qui contient ce vecteur. A un cône de dimension n du premier éventail correspond une carte de la première variété. Dans cette carte l'image réciproque de notre courbe a une limite finie. Nous en laissons la vérification au lecteur.

F. Un exemple important. Considérons deux éventails simples. Supposons que le second éventail se compose d'un cône de dimension n et de ses faces. Supposons que la réunion des cônes du premier éventail se confond avec le cône de dimension n qui engendre le second éventail. Conformément à la construction décrite sous C, à chaque éventail est associée une variété. Celle associée au second éventail se compose d'une carte unique et est isomorphe à $\mathbf{R}^n$. Conformément à la construction décrite sous E, il existe une application analytique propre de la variété associée au premier éventail sur la variété associée au second, i.e. sur $\mathbf{R}^n$. Cette application est inversible en dehors de la réunion des hyperplans de coordonnées.

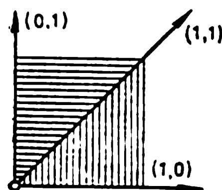


Fig. 68

Nous utiliserons cet exemple dans le n° 8.2 pour construire la désingularisation.

Problème. Soit $n = 2$; prenons comme premier éventail, celui de la figure 68. On demande de montrer que l'application sur $\mathbf{R}^2$ de la variété associée au premier éventail se confond avec un éclatement à l'origine.

G. Cas complexe. Les constructions de la variété et de l'application décrites ci-dessus se laissent généraliser naturellement au cas analytique complexe. Au lieu des cartes isomorphes à $\mathbf{R}^n$ on prendra des cartes isomorphes à $\mathbf{C}^n$, et l'on définira les applications par les mêmes formules que précédemment. On obtiendra des variétés analytiques complexes et des applications analytiques complexes de ces dernières. Les variétés complexes ainsi construites ont des parties réelles naturelles. Ce sont des variétés réelles qui se confondent avec les variétés construites dans ce n°. Les parties réelles se conservent par les applications analytiques complexes. Les restrictions des applications analytiques complexes aux parties réelles se confondent avec les applications construites dans ce n°.

8.2. Désingularisation.

A. Eventail associé au polyèdre de Newton. Considérons un polyèdre de Newton, i.e. un polyèdre convexe dans $\mathbf{R}^n$ ayant ses sommets dans des points à coordonnées entières non négatives et contenant, pour chacun de ses points, le transporté parallèle de l'octant positif dans ce point (voir n° 6.2. A). Le polyèdre sera noté Γ.

On appelle *fonction d'appui* du polyèdre de Newton Γ une fonction sur l'octant positif de l'espace dual de $\mathbf{R}^n$. Sa valeur sur un covecteur a de l'octant positif est posée égale à $\min\limits_{k\in\Gamma} \langle a, k\rangle$. La fonction d'appui se note l_Γ.

On appelle *trace* sur Γ d'un covecteur a de l'octant positif la face du polyèdre soumise à la condition $\{k \in \Gamma \mid \langle a, k\rangle = l_\Gamma(a)\}$. La *trace commune* de deux covecteurs de l'octant positif est l'intersection de leurs traces.

On dit que deux covecteurs de l'octant positif sont *équivalents* par rapport au polyèdre de Newton si leurs traces se confondent.

Lemme 6. *L'adhérence de toute classe d'équivalence est un cône rationnel dans l'espace dual de* $\mathbf{R}^n$. *Mieux, l'ensemble de tous les cônes de ce type forme un éventail.*

La démonstration résulte facilement de la définition de la fonction d'appui; pour plus de détails, voir [154].

L'éventail formé par les adhérences des classes d'équivalence s'appelle *éventail associé au polyèdre de Newton*. La réunion des cônes constitutifs de l'éventail se confond avec l'octant positif de l'espace dual de $\mathbf{R}^n$.

Exemple. On voit sur la figure 69, *a* un polyèdre de Newton dans $\mathbf{R}^2$. L'éventail associé est montré sur la figure 69, *b*.

B. Eventail simple subordonné. On dit qu'un éventail simple dans l'espace dual de $\mathbf{R}^n$ est *subordonné au polyèdre de Newton* s'il est plus fin que l'éventail associé à ce polyèdre et si la réunion des cônes constituant cet éventail simple se confond avec l'octant positif.

Lemme 7 (voir [178]). *Il existe un éventail simple subordonné au polyèdre de Newton.*

On trouve dans [178], pages 32 à 35, un algorithme de construction d'un éventail simple plus fin que l'éventail donné et ayant la même réunion des cônes constitutifs. Nous décrirons cet algorithme en grandes lignes sans entrer dans le détail.

L'algorithme se déroule en deux étapes. A la première, on fait une partition arbitraire des cônes de l'éventail donné en cônes simpliciaux. A la seconde, on s'arrange pour que tous les cônes de dimension n de la partition soient de multiplicité 1. A cet effet, on agit par récurrence descendante sur le nombre des cônes de multiplicité maximale, puis sur le nombre égal au maximum des multiplicités des cônes de la partition. A chaque pas successif de la seconde étape, on partitionne un cône simplicial de multiplicité supérieure à 1 en cônes simpliciaux de multiplicité plus petite. On le fait par l'addition d'un cône de dimension 1 engendré par un vecteur entier judicieusement choisi. Ce doit être un vecteur entier qui représente une combinaison linéaire de vecteurs du squelette dont les coefficients soient non négatifs, inférieurs à 1 et non tous nuls.

Exemple. Sur la figure 69, *b* est montré l'éventail associé au polyèdre de la figure 69, *a*. Tous les cônes constitutifs de cet éventail

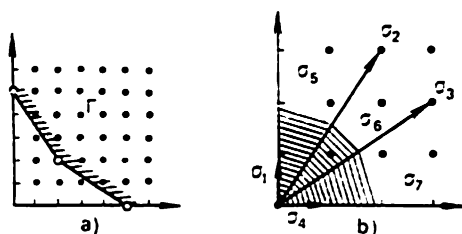


Fig. 69

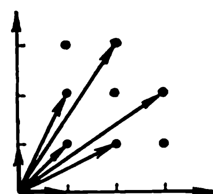


Fig. 70

sont simpliciaux. Les multiplicités des cônes σ_5, σ_6, σ_7 sont respectivement 3, 5 et 3. Un exemple d'éventail simple subordonné à ce polyèdre est donné sur la figure 70.

C. Théorème de résolution de singularités. Considérons un éventail simple subordonné à un polyèdre de Newton. A cet éventail simple est associée une variété; on l'appelle *variété subordonnée au polyèdre de Newton.* La réunion des cônes constitutifs de l'éventail simple se confond avec l'octant positif, qui est en particulier un cône simplicial de multiplicité 1. Conformément à la construction décrite en 8.1, E, il existe une projection sur $\mathbf{R}^n$ de la variété subordonnée au polyèdre (voir 8.1, F). Cette projection est dite *associée* à la variété subordonnée au polyèdre de Newton. La projection est une application analytique propre.

Théorème 2 (de résolution de singularités: voir [42, 350, 154, 355]). *Soit une série entière convergente de n variables sans terme constant, à coefficients réels et à partie principale non* **R**-*dégénérée. La série définit une fonction analytique au voisinage de l'origine de* $\mathbf{R}^n$. *Considérons une variété subordonnée au polyèdre de Newton de la série et sa projection sur* $\mathbf{R}^n$ *associée à la variété. On affirme que la variété et sa projection ont la propriété de résoudre les singularités de la fonction définie par la série à l'origine des coordonnées.*

La démonstration du théorème fait intervenir deux lemmes auxiliaires qui vont être formulés.

D. Lemmes auxiliaires. Considérons deux cônes simpliciaux de dimension n de multiplicité 1 dans l'espace dual de $\mathbf{R}^n$. Supposons que le premier cône soit confondu avec l'octant positif. Supposons que les squelettes des cônes soient ordonnés et que de plus celui du second cône le soit de la façon canonique: $(1, 0, \ldots, 0), \ldots$ $\ldots, (0, \ldots, 0, 1)$. Désignons par $a^j = (a_1^j, \ldots, a_n^j)$ le j-ième covecteur du squelette du premier cône. Les squelettes des cônes définissent un couple ordonné de bases sur le réseau d'entiers de dimension n. A ce couple de bases est associée une application monomiale (voir n° 8.1, B). Notons-la h. Les éléments de la matrice (a_i^j) de cette application monomiale sont non négatifs, puisque le premier cône se plonge dans le second. Considérons une série f de puissances des variables $x_1, \ldots, x_n$. L'application monomiale de matrice non négative induit une transformation de cette série en la série de puissances $f \circ h$.

Lemme 8. 1. *La plus grande puissance de la variable* x_j *divisant la série après transformation monomiale est égale à la valeur que prend la fonction d'appui du polyèdre de Newton de la série initiale sur le j-ième covecteur du squelette du premier cône.*

2. *Le jacobien de l'application monomiale est égal, au signe près, à un monôme où l'exposant de* x_j *est égal à la somme, diminuée de* 1, *des coordonnées du j-ième covecteur du squelette du premier cône.*

3. *Le diagramme de Newton de la série soumise à la transformation monomiale se réduit à un point si et seulement si tous les covecteurs strictement intérieurs au premier cône sont équivalents par rapport au polyèdre de Newton de la série avant transformation.*

4. *L'image de l'hyperplan de coordonnée* $x_j = 0$ *est contenue dans l'hyperplan de coordonnées défini par les égalités* $x_i = 0$, $i \in I$, *où* I *est l'ensemble d'indices de toutes les coordonnées non nulles du j-ième covecteur du squelette du premier cône.*

La démonstration est évidente.

Soit f une série entière convergente à coefficients réels. Elle définit une fonction que nous noterons f comme la série. Considérons la transformée monomiale $f \circ h$ de f. A chaque hyperplan de coordonnées sont liés deux nombres: la multiplicité du zéro k sur l'hyper-

plan de $f \circ h$ et la multiplicité du zéro m sur l'hyperplan du jacobien de l'application monomiale. Le nombre égal à $-(m+1)/k$ est le poids de l'hyperplan (voir § 7).

Les poids interviennent de façon essentielle dans le théorème 5 du § 7. Explicitons la notion de signification géométrique du poids d'un hyperplan de coordonnées. Soit, pour fixer les idées, un hyperplan d'équation $x_1 = 0$. Désignons le polyèdre de Newton de la série avant transformation par Γ. Considérons l'hyperplan défini dans $\mathbf{R}^n$ par l'équation $\langle a^1, x\rangle = l_\Gamma(a^1)$, où a^1 est le 1-ième covecteur du squelette du premier cône et l_Γ la fonction d'appui de Γ. L'intersection de cet hyperplan avec le polyèdre est la trace du covecteur a^1. L'hyperplan rencontre la bissectrice de l'octant positif exactement en un point $(t, \ldots, t)$. D'après le lemme 8 le poids de l'hyperplan de coordonnées $x_1 = 0$ est égal à $-(a_1^1 + \ldots + a_n^1)/l_\Gamma(a^1) = -1/t$ (cf. fig. 71). Cette remarque explique l'apparition d'un nombre égal à l'éloignement du polyèdre de Newton dans le théorème 4 du § 6.

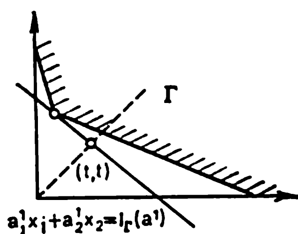


Fig. 71

Formulons le second lemme auxiliaire.

Lemme 9. *Dans les conditions du lemme* 8, *supposons que l'application h envoie l'hyperplan $x_1 = 0$ à l'origine des coordonnées. Supposons que la série de puissances f (sans terme constant) soit convergente et que sa partie principale soit non* **R**-*dégénérée. Supposons enfin que tous les covecteurs strictement intérieurs au premier cône soient équivalents par rapport au polyèdre de Newton de f. Il existe alors en tout point de l'hyperplan $x_1 = 0$ des coordonnées locales en lesquelles la fonction $f \circ h$ et le jacobien de l'application h sont égaux à des monômes, à la multiplication par des fonctions non nulles près.*

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de montrer l'existence des coordonnées locales cherchées pour un point où les s premières coordonnées euclidiennes sont nulles et les autres non nulles. Par définition, la série $f \circ h$ se laisse mettre sous la forme

$$x_1^{l_\Gamma(a^1)} \ldots x_n^{l_\Gamma(a^n)} (\mathrm{Cte} + O(x_1, \ldots, x_n)),$$

où Cte $\neq 0$ (voir les pp. 1 et 3 du lemme 8). Récrivons la série $f \circ h$ sous la forme

$$x_1^{l_\Gamma(a^1)} \ldots x_s^{l_\Gamma(a^s)} (f_0(x_{s+1}, \ldots, x_n) + O(x_1, \ldots, x_s)).$$

Il suffit de montrer que l'hyperplan $f_0 = 0$ est non singulier dans $(\mathbf{R}\setminus 0)^n$. Puisque toutes les coordonnées du covecteur a^1 sont positives (p. 4 du lemme 8), f_0 est un polynôme. Désignons par γ la trace com-

mune des covecteurs $a^1, \ldots, a^s$: c'est une face compacte non vide du polyèdre de Newton. Désignons par f_γ la γ-partie de la série f. Il est évident que

$$f_\gamma \circ h = x_1^{l_\Gamma(a^1)} \ldots x_s^{l_\Gamma(a^s)} f_0.$$

Puisque la partie principale de f est non **R**-dégénérée, les dérivées partielles premières de sa γ-partie sont sans zéros communs dans $(\mathbf{R} \setminus 0)^n$. L'application h induit un difféomorphisme $(\mathbf{R} \setminus 0)^n \to (\mathbf{R} \setminus 0)^n$, aussi les polynômes $f_0, \partial f_0/\partial x_{s+1}, \ldots, \partial f_0/\partial x_n$ sont-ils sans zéros communs dans $(\mathbf{R} \setminus 0)^n$, ce qu'il fallait démontrer.

E. Démonstration du théorème 2. Voyons si toutes les trois conditions de la définition d'une désingularisation citée à la page 162 sont vérifiées. Considérons une variété subordonnée au polyèdre de Newton de la série f et sa projection sur $\mathbf{R}^n$ qui lui est associée. D'après le théorème 1, la projection est une application analytique propre, d'où la condition 3 de la définition. La projection est inversible en dehors de la réunion des hyperplans de coordonnées dans $\mathbf{R}^n$: on a la condition 2. Enfin, la condition 1 est une conséquence immédiate du lemme 9. Le théorème est démontré.

Remarque 1. L'application de désingularisation du théorème 2 est définie par un éventail simple subordonné au polyèdre de Newton. Par un choix approprié de l'éventail, on arrive à obtenir une désingularisation présentant telle ou telle propriété supplémentaire. Plus exactement, on peut choisir un éventail simple subordonné au polyèdre de Newton de telle façon que l'application de désingularisation du théorème 2 soit inversible en dehors de l'hypersurface de niveau nul de la fonction définie par la série de puissances (voir [359]). Or, l'inversibilité de l'application en dehors de l'hypersurface de niveau nul vérifie la condition 2 de la définition de la page 162.

Lemme 10. *L'application de désingularisation du théorème 2 vérifie la condition 2' de la page* 162 *si l'éventail simple définissant la désingularisation possède la propriété supplémentaire suivante: cet éventail a pour cône tout cône de l'éventail associé au polyèdre de Newton si ce cône est simplicial et si son squelette peut être complété de façon à former une base sur le réseau d'entiers.*

Exemple. On voit sur les figures 69 et 70 un polyèdre de Newton, l'éventail associé au polyèdre et un éventail simple subordonné au polyèdre. L'éventail simple a la propriété demandée dans le lemme 10.

Le lemme se démontre sans peine à l'aide des pp. 1 et 4 du lemme 8; voir aussi [359].

Lemme 11. *Il existe un éventail simple subordonné au polyèdre de Newton et ayant la propriété du lemme* 10.

On arrive à construire un tel éventail simple en appliquant l'algorithme décrit sous 8.2, B.

Remarque 2. Formulons un théorème analogue au théorème 2 pour le cas complexe.

Théorème 2′ (voir [42, 154, 359]). *Considérons une série convergente de puissances de n variables sans terme constant, à coefficients complexes et à partie principale non* **C**-*dégénérée. Cette série définit une fonction analytique au voisinage de l'origine dans* $\mathbf{C}^n$. *Considérons une variété analytique complexe subordonnée au polyèdre de Newton de la série, et sa projection sur* $\mathbf{C}^n$ *qui lui est associée* (voir nº 8.1, G). *Nous disons que la variété et sa projection ont la propriété de résoudre, à l'origine, les singularités de la fonction définie par la série* (*i.e. la fonction, la variété et son application vérifient les conditions* 1 *à* 3 *de la définition à la page* 162).

La démonstration est la même que pour le théorème 2.

Tout comme pour le théorème 2, on peut renforcer l'assertion du théorème 2′, à savoir : il existe une variété subordonnée au polyèdre de Newton de la série, telle que la désingularisation du théorème 2′ vérifie la condition 2 de la page 162 (voir [359]).

8.3. Applications aux intégrales oscillantes.

A. Théorème 3 (voir [350]). *Considérons l'intégrale oscillante*

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f(x)}\varphi(x)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Supposons que la phase soit une fonction analytique au voisinage de l'origine. Supposons que sa série de Taylor à l'origine ait la partie principale non **R**-*dégénérée. Considérons le polyèdre de Newton de la série de Taylor. Considérons un éventail simple subordonné au polyèdre de Newton. Tous ces objets vérifient les assertions* 1 *à* 5 *ci-après :*

1. *L'ensemble des exposants de la phase à l'origine appartient à la réunion des progressions arithmétiques suivantes qui dépendent uniquement de l'éventail et ne dépendent pas des coefficients de Taylor. Une progression est celle des nombres entiers négatifs. Les autres sont paramétrées par des cônes de dimension un de l'éventail sur lesquels la fonction d'appui du polyèdre de Newton est non nulle. A un cône de ce type correspond une progression arithmétique*

$$-(a^1+\ldots+a^n)/l_\Gamma(a),\quad -(1+a^1+\ldots+a^n)/l_\Gamma(a),\ \ldots$$

dans laquelle $a=(a^1,\ldots,a^n)$ *est le covecteur primitif engendrant le cône et* l_Γ *la fonction d'appui du polyèdre de Newton.*

2. *L'indice d'oscillation de la phase à l'origine est non supérieur à l'éloignement du polyèdre de Newton.*

3. *L'indice d'oscillation de la phase à l'origine est égal à l'éloignement du polyèdre de Newton si l'une quelconque au moins des trois conditions suivantes est vérifiée:*

a) *le polyèdre de Newton est éloigné;*

b) *la phase admet à l'origine un maximum ou un minimum;*

c) *si γ est l'adhérence de la face ouverte du polyèdre de Newton à laquelle appartient le centre de bord du polyèdre de Newton* (voir nº 6.2, C), *il faut que la γ-partie de la série de Taylor de la phase à l'origine soit sans zéros dans* $(\mathbf{R}\setminus 0)^n$ *et que l'éloignement du polyèdre de Newton ne soit pas un entier impair (en particulier, la γ-partie est sans zéros si γ est un sommet du polyèdre).*

4. *Si l'une quelconque au moins des conditions* a) *à* c) *du p.* 3 *du théorème est vérifiée, la multiplicité de l'indice d'oscillation de la phase est égale à celle de l'éloignement du polyèdre de Newton (en particulier, elle est égale à $n - 1$ si la bissectrice de l'octant positif rencontre un sommet du polyèdre de Newton, à $n - 2$ si elle rencontre une arête, et ainsi de suite). Si l'amplitude a son support contenu dans un voisinage suffisamment restreint de l'origine, est de signe constant et distincte de zéro à l'origine, alors le coefficient numérique du terme dominant de la série asymptotique de l'intégrale oscillante (i.e. le coefficient $a_{K,\beta}$ de la série* (2) *de la page* 150) *est non nul.*

5. *Supposons que l'une quelconque au moins des conditions* a) *à* c) *du p.* 3 *du théorème soit vérifiée. Supposons que la phase admette un point critique de multiplicité finie à l'origine et que le support de l'amplitude soit contenu dans un voisinage restreint de l'origine. Alors le coefficient numérique du terme dominant de la série asymptotique de l'intégrale oscillante (i.e. le coefficient $a_{K,\beta}$ de la série* (2) *de la page* 150) *est égal à la valeur de l'amplitude à l'origine, multipliée par une constante non nulle qui ne dépend que de la phase.*

6. *Supposons que l'éloignement du polyèdre de Newton soit égal à* -1. *Alors l'indice d'oscillation de la phase à l'origine est égal à* -1 *si l'une quelconque au moins des deux conditions ci-après est vérifiée:*

a) *la face ouverte contenant le centre de bord du polyèdre de Newton est de dimension plus petite que $n - 1$;*

b) *l'adhérence γ de la face ouverte contenant le centre de bord du polyèdre de Newton est compacte et la γ-partie de la série de Taylor a des zéros sur* $(\mathbf{R}\setminus 0)^n$.

Mieux, la multiplicité de l'indice d'oscillation de la phase à l'origine est alors égale ou de 1 *inférieure à celle de l'éloignement. Si les conditions* a) *et* b) *ont lieu simultanément, la multiplicité de l'indice d'oscillation est égale à celle de l'éloignement.*

Remarques. 1. Le théorème 4 du § 6 et ses compléments a), b), f), g) sont consécutifs au théorème 3 que nous venons d'énoncer.

2. Dans le p. 1 du théorème est proposée une méthode de construction des progressions arithmétiques. Signalons une autre méthode, qui fait intervenir uniquement le polyèdre de Newton et n'utilise pas l'éventail simple subordonné au polyèdre. Elle est applicable si la phase admet un point critique de multiplicité finie à l'origine et la série de Taylor de la phase a la partie principale non C-dégénérée. La méthode est basée sur un théorème dû à Malgrange. A tout point critique de multiplicité finie de la fonction est associé un opérateur linéaire de monodromie en homologie évanescente dans le point (voir chapitre I). A chaque racine λ du polynôme caractéristique de l'opérateur de monodromie, associons la progression arithmétique de tous les α tels que $\exp(2\pi i\alpha) = \lambda$. Le théorème de Malgrange (voir § 11) stipule que l'ensemble des indices du point critique est contenu dans la réunion des progressions ainsi construites. Le théorème 13 du § 3 fournit une formule qui exprime le polynôme caractéristique de l'opérateur de monodromie à l'aide du polyèdre de Newton de la série de Taylor du point critique.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e. Posons $f(0) = 0$. A l'éventail simple du théorème est associée une variété subordonnée au polyèdre de Newton de la série de Taylor. Cette variété et la projection associée désingularisent la phase à l'origine (théorème 2). Appliquons le théorème 5 du § 7. Pour démontrer le p. 1, on doit indiquer la collection des multiplicités de la désingularisation, i.e. indiquer les multiplicités des composantes irréductibles de l'hypersurface de niveau nul de la phase relevée sur la variété désingularisante. Dans une carte locale de la variété, la phase relevée est égale au produit d'un monôme et d'une fonction à hypersurface non singulière de niveau nul (lemme 9); en outre, le jacobien de l'application désingularisante est égal à ce monôme (lemme 8). Aussi, dans une carte locale, les composantes irréductibles à multiplicités non égales à (1, 0) (voir n° 7.9) sont-elles représentées par des hyperplans de coordonnées sur lesquels la multiplicité du zéro de la phase relevée est supérieure à 1. Le lemme 8 exprime sur l'hyperplan les multiplicités des zéros de la phase relevée et du jacobien de l'application désingularisante à l'aide du covecteur primitif correspondant au cône de dimension un de l'éventail simple. Le p. 1 du théorème découle à présent du théorème 5 du § 7 et du lemme 8.

Explicitons la signification géométrique du premier terme de la progression arithmétique répondant au covecteur primitif du cône de dimension un (voir la remarque au lemme 8) : ce terme est l'opposé de l'inverse du paramètre de l'intersection de la bissectrice de l'octant positif avec l'hyperplan défini par le covecteur et s'appuyant sur le polyèdre. On peut donc être sûr de trouver, parmi les premiers termes des progressions arithmétiques du p. 1 du théorème, un nombre égal à l'éloignement du polyèdre. Plus exactement, l'éloignement est le premier terme de la progression arithmétique pour tout

covecteur dont la trace contient le centre de bord du polyèdre.

Démontrons le p. 2. Si l'éloignement du polyèdre de Newton est égal à —1, le p. 2 résulte du p. 1 du théorème 5 du § 7. Si l'éloignement est plus petit que —1, aucune des variables ne divise la série de Taylor de la phase; conformément aux lemmes 8 et 9. cela signifie que les conditions du p. 5 du théorème 5 du § 7 ont lieu. Le p. 2 du théorème en découle. Le cas où l'éloignement du polyèdre de Newton est supérieur à —1 se traite dans le cadre de la démonstration du p. 3.

La condition a) du p. 3 du théorème résulte du p. 3 du théorème 5 du § 7, car le poids de la désingularisation est alors supérieur à —1 et égal à l'éloignement du polyèdre de Newton. La condition b) résulte du p. 4 du théorème 5 du § 7.

Les conditions a) et b) du p. 4 pourront être déduites des pp. 3 et 4 du théorème 5 du § 7 si l'on montre que le poids de la désingularisation est de même multiplicité que l'éloignement du polyèdre de Newton. Pour la démonstration, notons un fait évident. Considérons tous les cônes d'un éventail simple subordonné au polyèdre de Newton qui ont la propriété suivante: les traces de tous les covecteurs constitutifs du cône contiennent le centre de bord du polyèdre de Newton. Alors le maximum des dimensions des cônes indiqués est de 1 supérieur à la multiplicité de l'éloignement du polyèdre de Newton. La proposition demandée résulte maintenant du lemme 8.

Les conditions a) et b) du p. 5 résultent respectivement des conditions d) du p. 3 et d) du p. 4 du théorème 5 du § 7, les conditions c) des pp. 3, 4 et 5, de son p. 6, et le p. 6. de son p. 7. Le théorème est démontré.

Conformément au théorème 3, l'ordre d'une intégrale oscillante est égal à l'éloignement du polyèdre de Newton de la phase si l'amplitude est de signe constant et si elle ne s'annule pas au point critique de la phase. Voyons quel est l'ordre de l'intégrale au cas où l'amplitude s'annule.

Soient deux polyèdres de Newton. On appelle *coefficient de plongement* du premier polyèdre dans le second la borne inférieure d'un ensemble de nombres positifs qui sont tous des rapports d'homothéties, centrées à l'origine, sous l'action desquelles le premier polyèdre passe à l'intérieur du second.

Associons à l'amplitude de l'intégrale oscillante le polyèdre de Newton de sa série de Taylor multipliée par le produit de toutes les variables. Nous nous trouvons donc en présence de deux polyèdres: celui que nous venons de décrire et le polyèdre de Newton de la série de Taylor de la phase. On appelle *éloignement des polyèdres de la phase et de l'amplitude* l'opposé de l'inverse du coefficient de plongement du premier polyèdre dans le second.

Problème. Montrer que l'éloignement des polyèdres de Newton de la phase et de l'amplitude est égal à l'éloignement du polyèdre

de Newton de la phase si la série de Taylor de l'amplitude a un terme constant non nul.

Exemple. Soient les séries de Taylor de la phase et de l'amplitude $x_1^6 + x_1^3x_2^2 - x_2^6$ et x_1x_2 respectivement. Alors l'éloignement de leurs polyèdres est $-7/9$.

Théorème 4. *Supposons que la phase de l'intégrale oscillante soit une fonction analytique au voisinage de l'origine. Supposons que la série de Taylor de la phase à l'origine ait la partie principale non* **R**-*dégénérée. Alors:*

1. *L'exposant de puissance du paramètre du terme dominant de la série asymptotique de l'intégrale oscillante est non supérieur à l'éloignement des polyèdres de Newton de la phase et de l'amplitude.*
2. *L'exposant de puissance du paramètre du terme dominant de la série asymptotique de l'intégrale oscillante est égal à l'éloignement des polyèdres de Newton de la phase et de l'amplitude si cet éloignement est supérieur à -1 et si le polyèdre associé à l'amplitude est congru à l'octant positif.*

Ce théorème se démontre comme le théorème 3, quitte à invoquer directement le théorème 3 du § 7 au lieu du théorème 5. Notons que le p. 2 du théorème est analogue à la condition a) du p. 3 du théorème 3. Des propositions analogues ont lieu pour les conditions b) et c) du p. 3, ainsi que pour les pp. 4 et 5.

En conclusion, considérons le cas où la partie principale de la série de Taylor est dégénérée.

Théorème 5 (voir [350]). *Supposons que la phase soit une fonction analytique au voisinage de l'origine. Supposons que le polyèdre de Newton de la série de Taylor à l'origine de la phase soit éloigné. Alors l'indice d'oscillation de la phase à l'origine est non inférieur à l'éloignement de ce polyèdre.*

Corollaire 1. *Le poids de la désingularisation de la phase est supérieur à* -1.

Voir théorème 7.5.

Corollaire 2. *La phase vérifie le p.* 3 *du théorème* 5 *du* § 7.

Corollaire 3. *Supposons que la phase soit une fonction de deux variables ayant un point critique dégénéré à l'origine. Alors l'indice d'oscillation de ce point critique est égal au poids de sa désingularisation.*

En effet, on trouve alors sans peine un système de coordonnées tel que l'éloignement du polyèdre de Newton de la série de Taylor de la phase soit plus grand que -1.

Corollaire 4. *L'éloignement d'un point critique est non supérieur à son indice d'oscillation si l'éloignement est plus grand que* -1 (voir la définition en 6.2, D).

Remarquons qu'en accord avec le théorème 5 du § 6, l'éloignement est égal à l'indice d'oscillation pour tout point critique d'une phase de deux arguments.

Démonstration du théorème. Considérons une variété X subordonnée au polyèdre de Newton, et la projection associée $\pi: X \to \mathbf{R}^n$. A l'aide de cette projection, relevons la phase sur la variété et résolvons sur l'image réciproque de l'origine toutes les singularités de la phase relevée. En effet, d'après le théorème de Hironaka [153], il existe une nouvelle variété Y et une application associée $\varphi: Y \to X$ telles que l'application $\pi \circ \varphi$ a la propriété de résoudre les singularités de la phase à l'origine. La phase relevée sur X a une composante de l'hypersurface de niveau nul de poids égal à l'éloignement du polyèdre de Newton (voir la démonstration du théorème 3 du § 8). L'image réciproque de cette composante sur Y est de même poids. Le théorème résulte maintenant du p. 3 du théorème 5 du § 7.

B. Généralisation du théorème 3 aux intégrales de Laplace.

Théorème 6. *Considérons une intégrale de Laplace*

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\tau f(x)} \varphi(x)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Supposons que la phase soit une fonction analytique au voisinage de l'origine et admette un minimum local à l'origine. D'après le théorème 6 *du* § 7, *l'intégrale de Laplace se développe pour $\tau \to +\infty$ en une série asymptotique*

$$e^{-\tau f(0)} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\alpha} a_{k,\alpha} \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k.$$

Supposons que la série de Taylor de la phase à l'origine ait la partie principale non R*-dégénérée. Considérons le polyèdre de Newton de la série de Taylor de la phase. Considérons l'éventail simple subordonné à ce polyèdre de Newton. Alors le développement asymptotique de l'intégrale de Laplace possède les mêmes propriétés que celui de l'intégrale oscillante de même phase, indiquées dans les pp.* 1, 3, 4, 5 *du théorème* 3.

La démonstration du théorème 6 découle de celle du théorème 3 en remplaçant partout les renvois au théorème 5 du § 7 par les renvois au théorème 6 du § 7.

Corollaire (cf. le corollaire du théorème 6 du § 7). *Soit pour tout t positif $V(t)$ le volume de l'ensemble des points en lesquels la phase prend une valeur inférieure à t. D'après le théorème* 6 *du* § 7, *la fonction V se développe pour $t \to +0$ en une série asymptotique*

$$\sum_{\alpha} \sum_{k} a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k.$$

Nous disons que l'ordre α du terme maximal de cette série est égal à l'opposé de l'éloignement du polyèdre de Newton de la série de Taylor de la phase au point minimum, à condition que la partie principale de la série de Taylor soit non **R**-*dégénérée.*

Remarque. V. Vassiliev a montré dans [377] que l'exposant du terme dominant de la série asymptotique de l'intégrale de Laplace est égal à l'éloignement du polyèdre de Newton des phases lorsque la partie principale de la série de Taylor de la phase est non **R**-dégénérée et que le polyèdre de Newton rencontre chaque axe de coordonnée. La démonstration de V. Vassiliev ne fait pas appel à la désingularisation.

C. Aire d'une surface de niveau d'une fonction. Supposons que l'espace soit muni d'une métrique riemannienne. Celle-ci définit une métrique riemannienne sur les hypersurfaces de niveau de la fonction. La métrique riemannienne sur les hypersurfaces définit une forme de volume de dimension $(n - 1)$. Calculons le volume des variétés de niveau compactes de la fonction et considérons le comportement asymptotique du volume quand le niveau tend vers un niveau critique.

Théorème 7. *Supposons que la fonction analytique f admette un point minimum isolé et que la valeur minimale de f soit 0. Supposons que l'espace soit muni d'une métrique riemannienne analytique. Désignons par $V(t)$ pour des t petits positifs le volume de dimension $(n - 1)$ de la variété de niveau t. Alors la fonction V se développe pour $t \to +0$ en une série asymptotique*

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^{k}$$

dans laquelle le paramètre α parcourt un ensemble fini de progressions arithmétiques de nombres rationnels positifs. Si en outre la série de Taylor de f a la partie principale non **R**-*dégénérée au point minimum et la partie principale de la série de Taylor de la fonction (df, df) est non* **R**-*dégénérée au point minimum de f, alors l'ordre α du terme maximal de la série asymptotique ne dépend que des polyèdres de Newton des séries de Taylor précédentes et se calcule d'après la règle ci-après.*

Règle. Considérons le polyèdre de Newton de la série de Taylor de la fonction (df, df) au point minimum de f. Considérons l'image de ce polyèdre par une homothétie de rapport 1/2 centrée à l'origine. Déplaçons le nouveau polyèdre d'une longueur égale au vecteur $(1, \ldots, 1)$. Considérons un deuxième polyèdre, qui est le polyèdre de Newton de la série de Taylor de f en son point minimum. Soit k le coefficient de plongement du premier polyèdre dans le second. Alors l'ordre α du terme maximal de la série asymptotique est égal à $1/k - 1$.

La d é m o n s t r a t i o n du théorème utilise le fait que $-1/k$ est l'exposant du terme maximal de la série asymptotique de l'intégrale de Laplace

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\tau f(x)} \sqrt{(df,\, df)}\, \varphi(x)\, dx_1 \ldots dx_n$$

pour $\tau \to +\infty$ si l'amplitude φ est identiquement égale à 1 dans un voisinage restreint du point minimum et le support de l'amplitude est contenu dans ce voisinage.

D. Intégrales oscillantes étendues à un demi-espace. Considérons une intégrale oscillante suivant un demi-espace

$$\int_{x_1 \geqslant 0} e^{i\tau f(x)} \varphi(x)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

où la phase et l'amplitude sont des fonctions différentiables dans l'espace tout entier. Supposons que la phase soit une fonction analytique au voisinage de l'origine. Si le support de l'amplitude est contenu dans un voisinage suffisamment restreint de l'origine et la restriction de la phase au bord du demi-espace est sans point critique à l'origine, l'intégrale décroît pour $\tau \to +\infty$ plus vite que n'importe quelle puissance du paramètre (théorème 1 du § 6). Supposons au contraire que la restriction de la phase au bord admet un point critique à l'origine.

Théorème 8. *L'intégrale oscillante suivant le demi-espace se développe pour $\tau \to +\infty$ en une série asymptotique*

$$e^{i\tau f(0)} \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi)\, \tau^{\alpha} (\ln t)^k$$

si le support de l'amplitude est contenu dans un voisinage suffisamment restreint de l'origine. Ici le paramètre α parcourt un ensemble fini de progressions arithmétiques qui ne dépendent que de la phase et sont constituées de nombres rationnels négatifs. Les coefficients numériques $a_{k,\alpha}$ sont des distributions de l'amplitude. Le support de chaque distribution appartient à la réunion des ensembles critiques de la phase et de sa restriction au bord.

D é m o n s t r a t i o n. Analogue à celle du théorème 5 du § 7. Elle consiste à considérer une désingularisation, à l'origine, de la fonction $x_1 f$ (qui est celle en même temps de la fonction f) et à reprendre le raisonnement développé dans la démonstration du théorème 5 du § 7. Nous démontrerons ainsi, pour une intégrale oscillante suivant un demi-espace, les propositions des pp. 1 à 5 du théorème 5 du § 7 (à ceci près que le p. 5 est vrai si la phase ne se divise pas par x_1).

Si l'origine est un point critique de la restriction de la phase au bord mais n'est pas un point critique de la phase elle-même, l'étude du comportement asymptotique de l'intégrale étendue à un demi-espace se réduit à l'étude de l'intégrale oscillante suivant le bord. En effet, par un difféomorphisme qui laisse le bord inchangé, on peut mettre la phase sous la forme $x_1 + h(x_2, \ldots, x_n)$, après quoi on peut faire l'intégration par parties suivant la variable x_1.

Supposons que la phase admette un point critique à l'origine. Supposons que la partie principale de la série de Taylor de la phase à l'origine soit non **R**-dégénérée.

Théorème 9. *Sous les hypothèses consenties, le développement asymptotique d'une intégrale oscillante étendue à un demi-espace vérifie les propositions des pp.* 1 *à* 5 *du théorème* 3.

La démonstration est la même que pour le théorème 3.

Considérons un autre type d'intégrales oscillantes étendues à un demi-espace, à savoir des intégrales de la forme

$$\int_{x_1 > 0} e^{i\tau f(x)} \varphi(x)\, x_1^{-1/2}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Ici comme précédemment la phase et l'amplitude φ sont des fonctions différentiables dans l'espace tout entier. Le changement $x_1 = z^2$ permet de réduire l'étude de telles intégrales à celle des intégrales suivant un demi-espace considérées plus haut. Formulons une des propositions obtenues de cette façon.

Théorème 10. *Supposons que la phase soit une fonction analytique au voisinage de l'origine. Supposons que sa série de Taylor à l'origine ait la partie principale non* **R**-*dégénérée. Alors l'indice d'oscillation de la phase à l'origine, pour les intégrales décrites, se définit par le polyèdre de Newton de la série de Taylor de la phase et est égal à l'opposé de l'inverse du paramètre du point d'intersection de la droite* $2x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = t$, $t \in \mathbf{R}$, *et du bord du polyèdre de Newton si le paramètre est supérieur à* 1.

Toutes les propositions de ce n° concernant le comportement asymptotique des intégrales oscillantes étendues à un demi-espace sont vraies pour les intégrales de Laplace étendues à un demi-espace.

8.4. Cas des deux variables. D'après le théorème 3, l'indice d'oscillation d'un point critique de la phase est égal à l'éloignement du polyèdre de Newton de sa série de Taylor dans un système de coordonnées où la partie principale de la série de Taylor est non **R**-dégénérée et le polyèdre de Newton est éloigné. Ce théorème est applicable à tout point critique de la phase dépendant d'un argument unique. Si par contre la phase dépend de deux ou plusieurs argu-

ments, on n'arrive pas toujours à trouver des coordonnées convenables (voir n° 6.2, D). On peut cependant discuter à fond le cas des deux arguments de la phase et démontrer l'égalité de l'indice d'oscillation à l'éloignement du polyèdre de Newton de la série de Taylor de la phase dans un système de coordonnées judicieusement choisi. De telles coordonnées sont dites *adaptées à la phase*; leur choix est décrit en 6.2, D.

Théorème 11 (voir [350]). *Considérons l'intégrale oscillante double*

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{i\tau f(x)}\varphi(x)\,dx_1\,dx_2.$$

Supposons que la phase soit une fonction analytique au voisinage de son point critique dégénéré. Alors:

1) *l'indice d'oscillation du point critique est égal à son éloignement;*

2) *il existe des coordonnées locales adaptées au point critique;*

3) *l'indice d'oscillation du point critique est de multiplicité* 1 *s'il existe des coordonnées adaptées dans lesquelles le centre de bord du polyèdre de Newton de la série de Taylor du point critique est situé à l'intersection de deux arêtes du polyèdre. Sinon, l'indice d'oscillation est de multiplicité* 0.

Remarques. 1. Les pp. 1 et 2 restent vrais pour un point critique non dégénéré; il n'en est pas de même pour le p. 3 (un exemple: $f = x_1x_2$).

2. Les assertions concernant le comportement asymptotique énoncées dans le théorème restent vraies pour les intégrales de Laplace dont la phase dépend de deux arguments.

3. Le théorème 11 entraîne le théorème 5 du § 6 et son complément a). Le complément b) découle du corollaire 3 du théorème 5 et du p. 3 du théorème 5 du § 7.

4. On trouve dans [350] un algorithme de recherche des coordonnées adaptées, ainsi que les critères de l'adaptation. Selon un critère, les coordonnées sont considérées comme adaptées au point critique si le centre de bord du polyèdre de Newton de la série de Taylor du point critique est situé à l'intersection de deux arêtes du polyèdre (cf. le p. 3 du théorème 11).

5. L'indice d'oscillation d'un point critique dégénéré d'une phase dépendant de deux arguments est non inférieur à l'éloignement de ce point critique, conformément au corollaire 4 du théorème 5.

La démonstration du théorème 11, de même que celle du théorème 3, se fonde sur l'analyse de la désingularisation du point critique de la phase. Dans le cas de deux arguments, deux circonstances viennent faciliter l'analyse. Premièrement, on dispose dans ce cas d'un algorithme de désingularisation bien simple qui se réduit à une

suite d'éclatements ponctuels. Deuxièmement, dans le cas bidimensionnel le poids de la désingularisation pour tout point critique dégénéré est supérieur à —1 (corollaire 3 du théorème 5). Conformément à cette deuxième remarque, l'indice d'oscillation est égal au poids de la désingularisation (p. 3 du théorème 5 du § 7). Il ne reste donc qu'à montrer que le poids de la désingularisation est égal à l'éloignement du polyèdre de Newton de la série de Taylor de la phase en coordonnées adaptées.

Le théorème 11 est une conséquence immédiate du théorème 12 ci-après.

Théorème 12 (voir [350]). *Considérons la désingularisation d'un point critique dégénéré d'une fonction analytique de deux arguments. Dans ces conditions:*

1) *le poids de la désingularisation est égal à l'éloignement du point critique;*

2) *il existe des coordonnées analytiques locales dans lesquelles l'éloignement du polyèdre de Newton de la série de Taylor du point critique est égal au poids de la désingularisation;*

3) *la multiplicité, par rapport à la désingularisation, du nombre égal au poids (voir la définition dans le n°* 7.3, A) *est* 2 *s'il existe des coordonnées adaptées dans lesquelles le centre de bord du polyèdre de Newton est situé à l'intersection de deux arêtes du polyèdre. Sinon, la multiplicité est* 1.

§ 9. Indices de singularité. Exemples

Dans ce paragraphe nous démontrerons l'additivité de l'indice d'oscillation et expliciterons les calculs des indices de singularité dans les tableaux du n° 6.1, I. Dans la seconde partie du paragraphe nous donnerons un exemple de déploiement du point critique qui illustre plusieurs résultats. Premièrement, l'indice d'oscillation n'est pas semi-continu supérieurement. Deuxièmement, il y a des points critiques qui sont équivalents complexes mais ont leurs indices de singularité différents. Troisièmement, il existe un point critique dont l'indice de singularité n'est pas égal à l'éloignement. Enfin, il existe un point critique pour lequel la partie principale de la série de Taylor est non **R**-dégénérée, mais l'éloignement du polyèdre de Newton est plus grand que l'indice d'oscillation.

9.1. Indice de singularité.

A. Additivité de l'indice d'oscillation et de sa multiplicité. Soient $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ et $g\colon \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ deux fonctions différentiables, et x, y leurs points critiques respectifs. Le point critique $x \times y$ de la fonction $f + g\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ est appelé *somme directe* des points critiques x, y.

Lemme 1. *L'indice d'oscillation et la multiplicité de l'indice d'oscillation sont additifs.*

Démonstration. Soient β l'indice d'oscillation et K sa multiplicité. Il est évident que $\beta(x \times y) \geqslant \beta(x) + \beta(y)$ et que si $\beta(x \times y) = \beta(x) + \beta(y)$, on a $K(x \times y) \geqslant K(x) + K(y)$. En effet, si l'amplitude d'une intégrale oscillante de phase $f + g$ se décompose en produit de deux fonctions dont l'une est une fonction sur $\mathbf{R}^n$ et l'autre une fonction sur $\mathbf{R}^l$, l'intégrale elle-même se décompose en produit de deux intégrales oscillantes avec comme phases f, g respectivement.

Démontrons les inégalités inverses. Considérons une intégrale oscillante de phase $f + g$. Supposons que le support de l'amplitude soit contenu dans un petit voisinage du point $x \times y$. L'intégrale se développe alors en une série asymptotique

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n+l-1} a_{k,\alpha} \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k,$$

où les coefficients numériques $a_{k,\alpha}$ sont des distributions de l'amplitude. Une distribution $a_{k,\alpha}$ est identiquement nulle pour $\alpha > \beta(x) + \beta(y)$, car dans l'espace des amplitudes, l'ensemble partout dense est formé par les combinaisons linéaires des amplitudes produits d'une fonction sur $\mathbf{R}^n$ et d'une fonction sur $\mathbf{R}^l$. On a donc bien $\beta(x \times y) = \beta(x) + \beta(y)$. L'égalité $K(x \times y) = K(x) + K(y)$ se démontre d'une façon analogue.

Corollaire. *Deux points critiques stablement équivalents ont même indice de singularité de même multiplicité.*

B. Calcul des indices de singularité dans les tableaux du nº 6.1, I. Les indices de singularité et leurs multiplicités pour les points critiques figurant dans les tableaux se calculent à l'aide des théorèmes 3 et 11 du § 8. Ceux-ci sont applicables aux points critiques classifiés dans le chapitre II de la Première partie, puisque chacun de ces points critiques ou bien a la partie principale non **R**-dégénérée de la série de Taylor, ou bien, si c'est une fonction de deux variables, s'écrit en coordonnées adaptées. Il est facile de vérifier cette proposition dans chaque cas particulier. Ceci fait, il ne reste qu'à calculer l'éloignement du polyèdre de Newton de la série de Taylor.

9.2. Exemples.

Exemple 1. Posons

$$F(x_1, x_2, x_3, y) = (yx_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_1^p + x_2^p + x_3^p,$$

où y est un paramètre réel et $p \geqslant 9$. Désignons par β_y l'indice d'oscillation du point critique à l'origine de $\mathbf{R}^3$ d'une fonction $F(\cdot, y)$.

Théorème 1 (voir [350]). *La famille F des fonctions sur $\mathbf{R}^3$ dépendant du paramètre y possède les propriétés suivantes:*

1) *pour tout y une fonction $F(\cdot, y)$ a un point critique de multiplicité finie à l'origine;*

2) $\beta_0 = -5/8$;

3) $\beta_y = -3/4$ *pour* $y > 0$;

4) $\beta_y > -(1/2 + \gamma(p))$ *pour* $y < 0$ *(ici la fonction $\gamma(p) \to 0$ pour $p \to +\infty$);*

5) *l'éloignement du point critique à l'origine de $F(\cdot, y)$ est égal à $-3/4$ pour $y \neq 0$;*

6) *il existe dans $\mathbf{R}^3$ un voisinage U de l'origine et dans $\mathbf{R}$ un voisinage V de l'origine tels que l'indice d'oscillation d'une fonction $F(\cdot, y)$, $y \in V$, en son point critique quelconque $x \in U \setminus 0$ soit non inférieur à -1.*

Corollaire 1. *Pour le point critique à l'origine d'une fonction $F(\cdot, 0)$, l'indice d'oscillation uniforme est plus grand que l'indice d'oscillation individuel si p est suffisamment grand.*

De la démonstration du théorème 1 il ressort que ce corollaire est vrai déjà à partir de $p = 9$.

Corollaire 2. *Les points critiques à l'origine d'une fonction $F(\cdot, y)$ et d'une fonction $F(\cdot, -y)$ pour $p = 4l$ sont équivalents complexes (i.e. passent l'un à l'autre par un difféomorphisme holomorphe de l'espace $\mathbf{C}^3$) mais ont les indices d'oscillation différents.*

Corollaire 3. *L'éloignement du point critique à l'origine d'une fonction $F(\cdot, y)$ pour $y < 0$ est plus petit que l'indice d'oscillation.*

D é m o n s t r a t i o n. L'assertion 1 se vérifie par calcul direct. Les pp. 2, 3 découlent du théorème 3 du § 8, puisque la partie principale d'un polynôme $F(\cdot, y)$ pour les y indiqués est non $\mathbf{R}$-dégénérée. L'assertion 5 résulte du fait que l'éloignement du point critique à l'origine de la fonction $\pm x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ est égal à $-3/2$.

Pour démontrer le p. 6, il suffit de remarquer que, pour y petit, les points critiques x voisins de 0 ont leurs coordonnées x_2 et x_3 nulles. On en déduit sans peine que $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3}(x, y) = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x, y) \neq 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}(x, y) \neq 0$, i.e. que le rang de la différentielle seconde est non inférieur à 2. Conformément au lemme de Morse généralisé, au voisinage d'un tel point critique la fonction se réduit à la forme $\varphi(u_1) \pm \pm u_2^2 \pm u_3^2$. Pour une telle fonction le p. 6 découle du théorème 3 du § 8.

La démonstration du p. 4 fait appel au théorème 5 du § 7. On construit une désingularisation du point critique à l'origine et l'on montre que le poids de cette désingularisation est plus grand que $-(1/2 + \gamma(p))$, où $\gamma(p) \to 0$ pour $p \to +\infty$. En construisant la

désingularisation, on fait d'abord un éclatement centré sur l'origine, puis on fait $p/2$ éclatements centrés sur la courbe intersection de l'image réciproque de l'origine et de l'image réciproque propre de la surface de niveau nul de la fonction F. La composante qui apparaît la dernière a un poids assez élevé, ce qui démontre le p. 4. Pour plus de détails, voir [350].

Exemple 2. Soient

$$f_+ = x_4^2 + x_1^p + x_2^p + x_3^p + (x_4 - (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2))\, x_5,$$

$$f_- = x_4^2 + x_1^p + x_2^p + x_3^p + (x_4 - (-x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2))\, x_5.$$

Théorème 2. *Pour un p suffisamment élevé les polynômes f_+, f_- ont les propriétés suivantes:*

1) *leurs parties principales sont non* **R**-*dégénérées;*
2) *leurs polyèdres de Newton se confondent;*
3) *l'indice d'oscillation à l'origine de f_+ est $-7/4$;*
4) *l'indice d'oscillation à l'origine de f_- est non inférieur à $-(1/2 + 1 + \gamma(p))$, où $\gamma(p) \to 0$ pour $p \to +\infty$;*
5) *l'éloignement du polyèdre de Newton de f_+, f_- est inférieur à -1.*

Corollaire 1. *Il existe une désingularisation du point critique à l'origine de f_+ dont le poids est plus grand que l'indice d'oscillation.*

En effet, c'est la désingularisation décrite dans le théorème 2 du § 8 (voir aussi le théorème 3 du § 8).

Corollaire 2. *L'éloignement du polyèdre de Newton du point critique à l'origine de f_+ est plus grand que l'indice d'oscillation.*

D é m o n s t r a t i o n. Le p. 2 est évident. Les pp. 1 et 5 se démontrent par calcul direct. Démontrons le p. 3 (le p. 4 se démontre par analogie). Faisons le changement

$$v = x_5 + x_4 + x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2;$$

il vient

$$f_+ = (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_1^p + x_2^p + x_3^p + (x_4 - (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2))\, v.$$

Faisons le changement

$$u = x_4 - (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2),$$

ensuite

$$v = s + t, \quad u = s - t.$$

Il vient

$$f_+ = F(x_1, x_2, x_3, 1) + s^2 - t^2,$$

où F est la fonction de l'exemple 1. Maintenant le p. 3 résulte du théorème 1 et du lemme 1.

CHAPITRE III

INTÉGRALES DES FORMES HOLOMORPHES SUIVANT LES CYCLES ÉVANESCENTS

Le premier chapitre du livre est consacré à la topologie du point critique d'une fonction holomorphe, le troisième chapitre, à son analyse. L'objet principal d'étude est l'intégrale d'une forme holomorphe, définie au voisinage du point critique, suivant un cycle contenu dans la variété de niveau de la fonction et évanescent au point critique. Nous étudions la variation de l'intégrale lors d'une déformation continue faisant passer le cycle d'une variété de niveau dans une autre. Nous montrons qu'en faisant tendre le cycle vers le point critique, le comportement présenté par une telle intégrale fournit une information sur divers objets liés au point critique.

Au § 10 sont décrites quelques propriétés élémentaires des intégrales (leur dépendance holomorphe des paramètres, leurs développements en série, leur lien avec le groupe de monodromie). Au § 11 sont comparés le développement asymptotique des intégrales suivant les cycles et celui des intégrales de la méthode du point selle (ou de la méthode du col) où la fonction holomorphe intervient comme phase (dont en particulier les intégrales oscillantes). Au § 12 nous discutons les équations différentielles vérifiées par les fonctions définies par les intégrales d'une forme holomorphe suivant des cycles qui dépendent continûment des paramètres. Le § 13 traite des propriétés des coefficients des développements asymptotiques des intégrales des formes holomorphes suivant des cycles qui dépendent continûment des paramètres. Nous y définissons également la structure de Hodge mixte d'un point critique de multiplicité finie d'une fonction holomorphe. Au § 14 nous définissons la structure de Hodge mixte du point critique et d'autres caractéristiques qui lui sont liées. Enfin, au § 15 nous utilisons les intégrales pour construire les applications de la base du déploiement versel du point critique en cohomologie évanescente dans le point. Ces applications transportent dans la base du déploiement versel les structures présentes en cohomologie.

§ 10. Propriétés élémentaires des intégrales

Dans ce paragraphe nous montrons que l'intégrale dépend des paramètres d'une façon holomorphe, nous expliquons le lien qui existe entre la ramification de l'intégrale et le groupe de monodromie en homologie et nous démontrons que l'intégrale est bien développable en série au voisinage d'une valeur privilégiée du paramètre.

Nous tenons à souligner l'importance des notions introduites aux nos 10.3, A et 10.3, D, à savoir: la spécialisation du développement du déploiement d'un germe de fonction holomorphe et la fibration de Milnor du déploiement d'un germe de fonction holomorphe.

10.1. Exemple. Considérons dans $\mathbf{C}^2$ les variétés de niveau d'un polynôme. Si la valeur du niveau est non critique, la variété correspondante est une surface riemannienne non singulière. On peut considérer les courbes de niveau du polynôme $f(x, y) = y^2 + x^3$; elles sont toutes (à l'exception de la courbe de niveau nul) des surfaces de genre 1 privées d'un point à l'infini. Soit sur $\mathbf{C}^2$ une 1-forme différentielle polynomiale, par exemple $\omega = y\,dx$. Choisissons une courbe fermée sur une des variétés de niveau non singulières et considérons l'intégrale de ω suivant cette courbe. Proposons-nous de suivre la variation de l'intégrale quand la courbe passe par déformation continue d'une variété de niveau non singulière dans une autre. L'intégrale de notre exemple étant elliptique, nous allons étudier la variation de la période d'une intégrale elliptique en fonction du paramètre.

Nous montrerons que l'intégrale est une fonction holomorphe multiforme du paramètre en dehors d'un ensemble fini de valeurs exceptionnelles de celui-ci. Nous expliciterons le lien entre la ramification des valeurs de l'intégrale et la topologie de la fibration définie par le polynôme restreint au complémentaire de la réunion des surfaces de niveau exceptionnel. Nous montrerons qu'au voisinage d'une valeur arbitraire du paramètre l'intégrale se développe en série suivant les puissances fractionnaires du paramètre et suivant les puissances entières du logarithme du paramètre, les puissances en question étant définies par la structure jordanienne de l'opérateur de monodromie en homologie de dimension un de la variété de niveau correspondant au contournement de la valeur exceptionnelle du paramètre.

A. L'intégrale est une fonction holomorphe du paramètre. Commençons par une remarque importante: la restriction de toute forme à une variété de niveau est fermée. En effet, il n'existe sur une courbe complexe aucune 2-forme holomorphe non nulle. De cette remarque on tire deux conséquences. Premièrement, l'intégrale reste inchangée quand on remplace la courbe d'intégration par une courbe homologue (théorème de Stokes). Deuxièmement, l'intégrale de la forme suivant

une courbe réduite par déformation à une variété de niveau non singulière voisine est bien définie. En effet, deux déformations continues distinctes vers une variété de niveau voisine aboutissent à deux courbes homologues. Ainsi donc, l'intégrale d'une forme suivant une courbe transformée par déformation en des variétés de niveau voisines de la variété considérée définit une fonction reliant l'intégrale à la valeur du polynôme sur la surface.

Théorème 1. *L'intégrale est une fonction analytique de la valeur du polynôme.*

Considérons la fonction au voisinage d'un point donné de la droite complexe et montrons qu'elle est holomorphe. Pour commencer, montrons qu'il s'agit d'une fonction différentiable.

Le polynôme étant sans point critique au voisinage de la courbe d'intégration initiale, l'application $f\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^1$ y est une fibration différentiable localement triviale. Choisissons sa trivialisation différentiable et portons par trivialisation la courbe initiale sur des variétés de niveau voisines du polynôme. Considérons l'intégrale d'une forme suivant une des courbes de la famille ainsi construite. Elle est égale à l'intégrale, prise suivant la courbe d'intégration initiale, de la forme transposée par difféomorphisme de trivialisation sur la variété de niveau initiale. On a donc, sur la variété de niveau initiale, une courbe et une 1-forme différentielle qui dépend différentiablement d'un paramètre complexe. D'après un théorème canonique de l'Analyse, l'intégrale d'une forme suivant une courbe est une fonction différentiable du paramètre.

Notons $\sigma(s)$ la courbe construite par trivialisation sur la variété de niveau s.

Pour achever la démonstration, assimilons l'intégrale en question à celle d'une 2-forme méromorphe suivant une surface réelle; comme 2-forme, prenons la forme $df \wedge \omega/(f - t)$, où t est la valeur du polynôme sur la variété de niveau initiale. Décrivons la surface réelle. Soit, sur la droite complexe, un petit chemin fermé γ qui contourne t dans le sens antihoraire. Soit Γ la surface dans $\mathbf{C}^2$ formée par la réunion des courbes dont les paramètres appartiennent au chemin: $\Gamma = \bigcup_{s\in\gamma} \sigma(s)$.

Lemme 1. *L'intégrale* $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{df\wedge\omega}{f-t}$ *est indépendante du chemin* γ *et est égale à* $\int_{\sigma(t)} \omega$.

Le théorème résulte du lemme, puisque la représentation intégrale du lemme est une fonction holomorphe de t.

Démonstration du lemme. L'indépendance de l'intégrale du chemin γ découle du théorème de Stokes, car la 2-forme

est fermée. Démontrons l'égalité des intégrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{df\wedge\omega}{f-t}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\Big(\int_{\gamma(s)}\omega\Big)\frac{ds}{s-t}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\Big(\int_{\sigma(t)}\omega\Big)\frac{ds}{s-t}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\Big(\int_{\sigma(s)}\omega-\int_{\sigma(t)}\omega\Big)\frac{ds}{s-t}.$$

La première intégrale du second membre est égale à l'intégrale que nous étudions. L'intégrande de la deuxième intégrale est une fonction différentiable de s. Aussi la deuxième intégrale tende-t-elle vers 0 si l'on prend pour γ un cercle de rayon tendant vers 0. Ainsi donc, la deuxième intégrale est égale à 0. Le lemme est démontré.

B. Ramification de l'intégrale. Voyons quelles sont les propriétés globales de la fonction définie par l'intégrale d'une 1-forme différentielle polynomiale suivant une courbe fermée située sur une variété de niveau du polynôme.

Conformément aux théorèmes canoniques (voir [349, 381]), il est possible d'éliminer de $\mathbf{C}^2$ un ensemble fini de variétés de niveau d'un polynôme de telle façon que la restriction du polynôme au complémentaire de cet ensemble soit un fibré localement trivial. Soient $t_1, \ldots, t_N$ les valeurs des niveaux en question. Dans l'exemple considéré, il suffit d'éliminer la variété de niveau nul.

Revenons à l'intégrale $\int_{\sigma(s)}\omega$. Elle admet un prolongement bien défini le long de tout chemin sur $\mathbf{C}^1\setminus\{t_1, \ldots, t_N\}$ ayant son origine en t. Pour l'obtenir, on doit réduire par déformation continue la courbe $\sigma(t)$ aux variétés de niveau au-dessus des points du chemin; la classe d'homologie de dimension un de la courbe située sur la variété de niveau correspondant au dernier point du chemin est définie par le chemin et est indépendante du procédé de déformation. Si deux chemins de même extrémité sont homotopes dans $\mathbf{C}^1\setminus\{t_1, \ldots, t_N\}$, les prolongements de l'intégrale ont même valeur dans le point final. Ainsi donc, l'intégrale est une fonction holomorphe multiforme sur $\mathbf{C}^1\setminus\{t_1, \ldots, t_N\}$.

La ramification de l'intégrale est définie par la transformation de monodromie en homologie de dimension un de la variété de niveau t. Toute classe de chemins fermés homotopes dans $\mathbf{C}^1\setminus\{t_1, \ldots, t_N\}$ ayant leur origine en t se fait correspondre un automorphisme linéaire de monodromie de l'homologie de dimension un de la variété de niveau t; il se définit par une déformation continue des cycles vers les variétés de niveau au-dessus des points du chemin (voir chapitre I). Si M_γ est l'automorphisme de monodromie pour le chemin γ, le prolongement de l'intégrale le long du chemin γ est

par définition égal à $\int\limits_{M_\gamma \sigma(t)} \omega$, où $\sigma(t)$ est la classe d'homologie définie par la courbe $\sigma(t)$.

Dans l'exemple considéré, la restriction du polynôme au complémentaire de la variété de niveau nul est un fibré différentiable localement trivial. L'intégrale elliptique en question $\int y\,dx$ est donc une fonction holomorphe multiforme sur $\mathbf{C}^1 \setminus 0$. Tous les chemins fermés dans $\mathbf{C}^1 \setminus 0$ sont multiples d'un chemin unique qui se ferme une fois autour de l'origine en l'évitant dans le sens antihoraire. Donc, pour décrire la ramification de l'intégrale, on doit

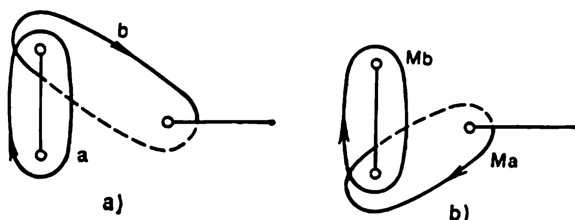


Fig. 72

comprendre d'abord la structure de la transformation linéaire de monodromie associée au chemin choisi. Dans notre exemple la variété de niveau non singulière est un tore privé d'un point. Son groupe d'homologie de dimension un est un espace vectoriel de dimension deux.

Assimilons la variété de niveau t, i.e. la courbe $\{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid y^2 + x^3 = t\}$, à un revêtement à deux feuillets au-dessus de l'axe des x ramifié dans les racines cubiques de t. On voit sur la figure 72, *a* des cycles (projetés sur l'axe des x) qui définissent une base (a, b) de l'homologie de dimension un. Le difféomorphisme de monodromie associé au chemin fermé de t autour de 0 se laisse définir par

$$(x, y) \mapsto (\exp(2\pi i/3)\, x, \quad \exp(2\pi i/2)\, y).$$

On voit l'image des cycles sur la figure 72, *b*. La monodromie se définit donc par

$$M: (a, b) \mapsto (a - b, a).$$

Maintenant, pour décrire la ramification de l'intégrale de la forme holomorphe suivant les cycles de la famille engendrée par le cycle $\sigma(t)$, il suffit de connaître le développement de la classe d'homologie définie par $\sigma(t)$ par rapport à la base et de savoir les intégrales de la forme suivant les classes de base.

Remarque. Pour décrire la ramification dans le cas d'une forme aussi simple que $y\,dx$, on n'a pas besoin de connaître la transformation de monodromie en homologie. L'application $(x, y) \mapsto \mapsto (t^{1/3}x, t^{1/2}y)$ définit un difféomorphisme de la variété de niveau 1 sur la variété de niveau t. La restriction de la forme $y\,dx$ à la variété de niveau t transposée par le difféomorphisme en question à la variété de niveau 1 et multipliée par $t^{-5/6}$ est égale à la restriction de $y\,dx$ à la surface de niveau 1. Aussi la fonction définie par l'intégrale de $y\,dx$ suivant les cycles de la famille est-elle égale à Cte$\cdot t^{5/6}$, où Cte est l'intégrale de la forme suivant le cycle de la famille appartenant à la variété de niveau 1.

C. Développement de l'intégrale en série. Nous venons de montrer que l'intégrale d'une forme polynomiale suivant un cycle dépendant du paramètre est une fonction holomorphe multiforme sur $\mathbf{C}^1 \setminus \{t_1, \ldots, t_N\}$. Chaque branche de cette fonction se développe donc en série de Taylor au voisinage de toute valeur non exceptionnelle du paramètre. Maintenant nous montrerons que l'intégrale se développe en série aussi au voisinage d'une valeur exceptionnelle du paramètre, mais cette fois c'est une série des puissances fractionnaires du paramètre dont les coefficients sont des polynômes en logarithme du paramètre. Une telle série converge dans chaque secteur du voisinage restreint de la valeur exceptionnelle du paramètre (le cloisonnement du voisinage est dû à la présence des logarithmes). La description de la série utilise essentiellement la transformation de monodromie associée au lacet autour de la valeur exceptionnelle du paramètre. C'est ainsi que les exposants de puissance du paramètre sont les quotients par $2\pi i$ des logarithmes des valeurs propres de la transformation de monodromie, et la puissance de tout polynôme en logarithme intervenant comme coefficient de la série est toujours plus petite que la taille maximale des blocs jordaniens de la valeur propre correspondante.

Formulons un théorème. Pour simplifier les notations, supposons que la valeur exceptionnelle du paramètre soit 0. Choisissons, dans un voisinage restreint de 0, un secteur $a \leqslant \arg t \leqslant b$ et, pour tout nombre t non nul appartenant à ce secteur, choisissons une base $\sigma_1(t), \ldots, \sigma_\mu(t)$ du groupe d'homologie entier de dimension un de la variété de niveau t qui dépend continûment de t. Soit M la transformation de monodromie associée au chemin fermé du paramètre qui contourne une fois la valeur 0 en l'évitant dans le sens antihoraire.

Théorème 2 (voir [52, 90, 135, 175, 229, 252]). *Dans le secteur indiqué la fonction vectorielle* $I(t) = \left(\int_{\sigma_1(t)} \omega, \ldots, \int_{\sigma_\mu(t)} \omega \right)$ *se développe en série* $\sum_{\alpha, k} a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. *La série converge si le paramètre est*

suffisamment petit en module. Les coefficients de la série sont des vecteurs de l'espace $\mathbf{C}^{\mu}$. *Les parties réelles de tous les* α *sont supérieures à une constante. Chaque* α *est tel que* $\exp(2\pi i\alpha)$ *est une valeur propre de l'opérateur* M. *Un coefficient* $a_{k,\alpha}$ *de la série est nul si la forme jordanienne de* M *n'a aucun bloc de taille égale ou supérieure à* $k+1$ *de valeur propre* $\exp(2\pi i\alpha)$.

Remarque. D'après les théorèmes 11 et 12 du § 3, les valeurs propres de l'opérateur de monodromie M sont des racines de 1 et la taille de ses blocs de Jordan n'est jamais supérieure à 2. Pour cette raison dans la série précédente tous les α sont rationnels et les puissances des logarithmes ne sont pas supérieures à 1.

Exemple. Soit y^2+x^3 le polynôme dont les variétés de niveau portent des cycles, et soit $\omega = y\,dx$. On a alors $\int_{\sigma(t)} \omega = \mathrm{Cte}\cdot t^{5/6}$ au voisinage de 0 (voir la remarque à la page précédente). Nous avons décrit en B la transformation de monodromie associée au lacet autour de 0 pour le cas considéré. Les valeurs propres de cette transformation sont distinctes et égales à $\exp(\pm\pi i/3)$. Donc, d'après le théorème, l'intégrale de toute forme polynomiale ω se développe au voisinage de 0 en série

$$\int_{\sigma(t)} \omega = \sum_l a_l t^{5/6+l} + \sum_l b_l t^{7/6+l}$$

dans laquelle l sont des entiers qui sont tous positifs sauf peut-être un ensemble fini de négatifs. Or, nous verrons en D que tous les exposants des termes de la série sont en réalité positifs.

La démonstration du théorème du développement en série utilise un autre théorème selon lequel l'intégrale d'une forme polynomiale dans chaque secteur du voisinage d'une valeur exceptionnelle du paramètre croît moins vite (ou tout au plus aussi vite) qu'une puissance convenable du paramètre.

Théorème 3 (voir [229, 252, 253]). *Il existe un entier naturel* N *tel que dans le secteur indiqué ci-dessus on a les inégalités*

$$\left|\int_{\sigma_j(t)} \omega\right| \leqslant \mathrm{Cte}\cdot|t|^{-N}, \quad j=1, \ldots, \mu.$$

Sans démontrer ce théorème, nous nous bornerons à indiquer une variante de sa démonstration. Désingularisons la variété de niveau exceptionnel: alors, en introduisant des coordonnées convenables dans le voisinage d'un point arbitraire de la variété de niveau désingularisée, le polynôme se réduit à un monôme, la forme polynomiale devient holomorphe, et on arrive à majorer convenablement l'intégrale suivant la partie du cycle appartenant au voisinage. Remar-

quons que la désingularisation doit aussi être étendue aux points à l'infini de la variété de niveau exceptionnel, afin de pouvoir majorer l'intégrale suivant la partie du cycle s'éloignant à l'infini. Il est vrai que la forme devient méromorphe au voisinage de tels points, mais la majoration pour une forme méromorphe s'obtient tout aussi facilement (voir [378, 354]). On trouve dans [252, 253] une méthode de démonstration élémentaire sans désingularisation.

Pour déduire le théorème 2 du théorème 3, on doit savoir calculer le logarithme de la transformation linéaire non dégénérée.

Lemme 2. *Soit A une matrice* $\mu \times \mu$ *non dégénérée. Il existe alors une matrice* $\mu \times \mu$ *non dégénérée B telle que* $\exp B = A$ $(\exp B = \sum B^n/n!)$.

Avant de démontrer ce lemme, rappelons quelques définitions. Un opérateur linéaire est dit *semi-simple* s'il opère dans un espace admettant une base formée de vecteurs propres de l'opérateur. Un opérateur linéaire est dit *unipotent* si toutes ses valeurs propres sont égales à 1. On sait bien que pour tout opérateur linéaire non dégénéré M il existe un et un seul opérateur semi-simple M_s et un et un seul opérateur unipotent M_u qui sont permutables et tels que $M = M_uM_s$ (M_s est l'opérateur dont l'action sur le sous-espace des racines de M se réduit à la multiplication par la valeur propre correspondante, voir [316]). Les opérateurs M_u, M_s sont appelés respectivement *partie unipotente* et *partie semi-simple* de l'opérateur M.

Démonstration du lemme 2. Il suffit de démontrer le lemme pour la matrice jordanienne; mieux, cette matrice peut n'avoir qu'un bloc unique. Soit λ la valeur propre d'un bloc. Alors la matrice en blocs se décompose en produit de la matrice $\lambda \cdot \mathrm{Id}$ et d'une matrice dont toutes les valeurs propres sont égales à 1. La première matrice est la partie semi-simple, et la deuxième, la partie unipotente. Les matrices des parties semi-simple et unipotente commutent. Il suffit donc de prendre le logarithme de chacune d'elles. Celui de la première est $\ln \lambda\ \mathrm{Id}$. Le logarithme de la deuxième se définit par

$$\ln C = \ln (\mathrm{Id} + (C - \mathrm{Id})) = \sum (-1)^{s+1} (C - \mathrm{Id})^s/s.$$

Remarque. La matrice $\ln C$ est nilpotente, i.e. toutes ses valeurs propres sont nulles.

Démonstration du théorème 2. Dans un voisinage restreint de 0, étendons par continuité la base d'homologie entière de dimension un aux paramètres à arguments quelconques. Par intégration de la forme suivant la base, la fonction vectorielle I devient une fonction vectorielle multiforme dans un voisinage restreint pointé de 0. Lorsque le paramètre contourne 0 dans le sens antihoraire, le vecteur $I(t)$ devient $I(t) \cdot A$, où A est la matrice de

la transformation de monodromie M écrite par rapport à la base $\sigma_1(t), \ldots, \sigma_\mu(t)$.

Considérons, dans le voisinage pointé de 0, une fonction matricielle holomorphe multiforme

$$J(t) = \exp(-\ln(t)\cdot\ln(A)/2\pi i),$$

où $\ln(A)$ est une des valeurs possibles du logarithme de la matrice A. Lorsque le paramètre fait un tour complet autour de 0 dans le sens antihoraire, la matrice $J(t)$ devient $A^{-1}J(t)$. Ainsi donc, la fonction vectorielle $t \mapsto I(t)J(t)$ est uniforme dans le voisinage pointé de 0.

Montrons que la fonction $I\cdot J$ est méromorphe en 0, i.e. que ses coordonnées croissent au plus aussi vite qu'une puissance convenable du paramètre à l'approche de celui-ci de 0. D'après le théorème 3, il suffit de démontrer une proposition analogue pour les coordonnées de la matrice J.

Voyons comment se présentent les éléments de J. A cet effet, il suffit de prendre le cas où A est une matrice diagonale ou unipotente (voir lemme 2). Dans le premier cas la matrice J est diagonale elle aussi; on voit sur ses diagonales les puissances de la variable t. Dans le second cas les éléments de la matrice sont des polynômes en $\ln t$ de puissances inférieures à la taille du bloc de Jordan correspondant (voir la remarque au lemme 2). Ainsi donc, pour toute matrice A chaque élément de la matrice $J(t)$ se présente comme une somme finie $\sum_\alpha t^\alpha P_\alpha(\ln t)$. Dans cette somme chaque α est tel que $\exp(-2\pi i\alpha)$ est une valeur propre de la matrice A. Pour tout α le coefficient P_α est un polynôme en $\ln t$ de puissance inférieure à la taille maximale des blocs jordaniens de la matrice A de valeur propre $\exp(-2\pi i\alpha)$.

Cette assertion signifie que les coefficients de la matrice J croissent assez lentement. La fonction vectorielle $I\cdot J$ est donc méromorphe en 0. Par conséquent, elle se laisse développer en série de Laurent qui a un ensemble fini de puissances négatives. Multipliant cette série par J^{-1}, nous retrouvons le théorème 2.

D. Enoncé plus précis des théorèmes 2 et 3. Si, en réduisant le cycle par déformation à une variété de niveau exceptionnel, le cycle reste confiné dans une partie bornée de l'espace, l'intégrale de la forme polynomiale prise suivant ce cycle reste bornée pendant la déformation. Mieux, si le cycle réduit par déformation à une variété de niveau exceptionnel y est homologue à 0, l'intégrale de la forme polynomiale suivant ce cycle tend vers 0 pendant la déformation. Ces assertions ont été démontrées par B. Malgrange [229]. Citons leur formulation exacte. Supposons comme précédemment que la valeur exceptionnelle soit 0.

Désignons la variété de niveau t par X_t, alors $X_{t,R}$ est l'ensemble des points de la surface de niveau t dont la distance à l'origine est non supérieure à R. Prenant des t réels positifs petits, considérons la famille des classes d'homologie entières de dimension un $\sigma(t) \in H_1(X_t, Z)$ qui dépendent continûment de t. Nous disons que pour $t \to 0$ cette famille est une famille de classes d'homologie *bornées* par une boule de rayon R si, pour tout t suffisamment petit, la classe $\sigma(t)$ est contenue dans l'image de l'homomorphisme naturel $\gamma_R: H_1(X_{t,R}, Z) \to H_1(X_t, Z)$. Il est clair que si la famille est bornée par une boule de rayon R, elle l'est aussi par toute boule de rayon plus grand.

Nous disons que pour $t \to 0$ la famille de classes d'homologie bornées est une famille de classes d'homologie *évanescentes* s'il existe un $R > 0$ et un $\delta > 0$ tels que

a) la famille est bornée par une boule de rayon R;

b) pour tout $t \in (0, \delta)$ il existe une classe $\sigma(t) \in H_1(X_{t,R}, Z)$ dont l'image par l'homomorphisme γ_R est $\sigma(t)$ et qui appartient au noyau de l'homomorphisme naturel $H_1(X_{t,R}, Z) \to H_1(X, Z)$, où $X = \bigcup_{t \in [0,\delta[} X_{t,R}$.

Théorème 3' (voir [229]). *Si σ est une famille de classes d'homologie bornées, l'intégrale $\int_{\sigma(t)} \omega$ admet une limite finie pour $t \to +0$. Cette limite est égale à 0 si la famille en question est une famille de classes d'homologie évanescentes.*

Corollaire des théorèmes 2 et 3'. Soit σ une famille de classes d'homologie bornées. Etendons-la par continuité, dans un voisinage restreint de 0, aux paramètres à arguments quelconques. Nous obtenons une famille multiforme de classes d'homologie entières dépendant continûment d'un paramètre. D'après le théorème 2, la fonction définie par l'intégrale de la forme polynomiale suivant les classes de la famille se développe au voisinage de 0 en série $\sum a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. D'après le théorème 3', dans cette série tous les α sont non négatifs et tous les coefficients $a_{k,0}$ sont nuls pour $k > 0$. Il y a plus: tous les α sont positifs si σ est une famille de classes d'homologie évanescentes.

Exemple. Soit $y^2 + x^3$ le polynôme dont les variétés de niveau portent des cycles. Au voisinage de 0 toute famille de classes d'homologie entières de dimension un dépendant continûment d'un paramètre est une famille de classes d'homologie évanescentes (voir la remarque en B). Aussi tous les exposants de la série de l'exemple de la page 224 sont-ils positifs.

Dans les n^{os} qui suivent, nous généraliserons les résultats obtenus de trois façons. Premièrement, nous opérerons dans un espace

de dimension plus élevée. Deuxièmement, nous admettrons que le polynôme soit une fonction holomorphe de paramètres auxiliaires. Troisièmement, nous prendrons une fonction holomorphe au lieu d'un polynôme.

10.2. Dépendance holomorphe par rapport aux paramètres. Considérons une fonction holomorphe de variables réparties en deux groupes: $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$. Cette fonction définit sur $\mathbf{C}^n$ une famille de fonctions holomorphes qui dépendent holomorphiquement des paramètres $y = (y_1, \ldots, y_k)$. Soit $X_{(t, y)}$ l'hypersurface de niveau t d'une fonction $F(\cdot, y)$:

$$X_{(t, y)} = \{x \in \mathbf{C}^n \mid F(x, y) = t\}.$$

Choisissons un cycle de dimension $(n - 1)$ sur l'hypersurface de niveau non critique t_0 de $F(\cdot, y_0)$. En faisant passer ce cycle par déformation continue d'une hypersurface de niveau à l'autre, nous obtenons une famille continue de cycles sur les hypersurfaces de niveau voisines de l'hypersurface considérée des fonctions dont les paramètres sont proches des paramètres considérés. Notons $\sigma(t, y)$ le cycle porté par l'hypersurface $X_{(t, y)}$.

A. Intégrales d'une $(n - 1)$-forme holomorphe. Soit sur $\mathbf{C}^n$ une $(n - 1)$-forme différentielle holomorphe qui dépend holomorphiquement des paramètres y:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} h_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)\, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n,$$

où $\{h_i\}$ sont des fonctions holomorphes. Considérons l'intégrale $I(t, y) = \int\limits_{\sigma(t, y)} \omega(y)$. Comme fonction des paramètres t, y, cette intégrale est définie au voisinage du point (t_0, y_0) de l'espace $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^k$. La restriction de la forme à l'hypersurface de niveau est fermée (car une variété holomorphe de dimension $(n - 1)$ n'admet aucune n-forme holomorphe non nulle). L'intégrale se définit donc par la classe du cycle dans le groupe d'homologie de dimension $(n - 1)$ de l'hypersurface et est indépendante du cycle qui représente la classe. De plus, l'intégrale de la forme suivant un cycle réduit par déformation à une hypersurface de niveau voisine ne dépend pas de la déformation, car deux déformations différentes conduisent à des cycles homologues.

Théorème 4 (voir [52, 229]). *L'intégrale est une fonction holomorphe de* (t, y).

La démonstration est pratiquement la même que pour le théorème 1. Nous introduirons la notion d'opérateur cobord de Leray,

notion que nous avions d'ailleurs utilisée implicitement en formulant le lemme 1.

Soient M une variété holomorphe et N sa sous-variété holomorphe de codimension 1. Alors il existe pour tout l un homomorphisme naturel $H_l(N) \to H_{l+1}(M \setminus N)$ appelé *opérateur cobord de Leray*. Il se définit comme suit. Choisissons un voisinage tubulaire de N dans M. Considérons la projection sur N du bord du voisinage tubulaire. Cette projection est un fibré localement trivial dont la fibre est un cercle. Considérons une classe d'homologie sur N et le cycle qui la représente. Considérons l'image réciproque du cycle sur le bord du voisinage tubulaire. C'est un cycle dont la dimension est de 1 supérieure à celle du cycle initial. Considéré comme un cycle dans le complémentaire de N, ce cycle est par définition l'image de la classe d'homologie initiale par l'opérateur cobord de Leray. On voit sans peine que la classe d'homologie de ce cycle dans le complémentaire ne dépend ni du choix du cycle représentant la classe d'homologie initiale sur N, ni du choix du voisinage tubulaire.

Démonstration du théorème 4. Un théorème canonique de l'Analyse dit : étant données une chaîne et une forme qui dépend holomorphiquement des paramètres, l'intégrale de la forme suivant la chaîne dépend holomorphiquement des paramètres. Pour pouvoir appliquer ce théorème, on doit assimiler les intégrales de la forme donnée suivant les cycles de la famille situés dans des hypersurfaces différentes à l'intégrale d'une nouvelle forme suivant une chaîne commune. Comme nouvelle forme, on prend la forme initiale multipliée par $dF(\cdot, y)/(F(\cdot, y) - t)$. Comme chaîne commune, on retient un cycle qui représente en même temps les images de toutes les classes d'homologie des cycles de la famille par l'action des opérateurs cobord de Leray pour les couples constitués chacun d'une hypersurface de niveau et de $\mathbf{C}^n$ (voir lemme 1).

Considérons le bord du voisinage tubulaire de l'hypersurface $X_{(t_0, y_0)}$ dans $\mathbf{C}^n$. Considérons sur ce bord le cycle $\partial\sigma$ de dimension n qui représente l'image de la classe d'homologie du cycle $\partial\sigma(t_0, y_0)$ sur l'hypersurface par l'opérateur cobord de Leray. Ce même cycle représente l'image de la classe d'homologie du cycle $\sigma(t, y)$ sur l'hypersurface $X_{(t, y)}$ par l'opérateur cobord de Leray si le point (t, y) est suffisamment proche de (t_0, y_0).

On a la représentation intégrale

$$I(t, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma(t, y)} dF(\cdot, y) \wedge \omega(y)/(F(\cdot, y) - t) \qquad (1)$$

dans laquelle $\partial\sigma(t, y)$ est l'image par l'opérateur cobord de Leray de la classe d'homologie du cycle $\sigma(t, y)$ sur $X_{(t, y)}$. (Notons que l'intégrande du second membre est fermée dans $\mathbf{C}^n \setminus X_{(t, y)}$, c'est

pourquoi l'intégrale du second membre est indépendante du cycle représentant la classe $\partial\sigma(t, y)$.) La démonstration de la formule (1) se confond avec la démonstration du lemme 1.

Ainsi donc, pour tout (t, y) proche de (t_0, y_0) on a la représentation intégrale

$$I(t, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} dF(\cdot, y) \wedge \omega(y)/(F(\cdot, y) - t).$$

Appliquant un théorème canonique de l'Analyse, nous retrouvons maintenant le théorème 4.

Ensuite nous montrerons que les intégrales de la forme de Guelfand-Leray suivant une famille continue de cycles dépendent holomorphiquement des paramètres.

B. Forme de Guelfand-Leray. Elle se définit dans le cas complexe de la même façon que dans le cas réel, voir n° 7.1.

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine de l'espace $\mathbf{C}^n$. Soit η une n-forme différentielle holomorphe dans le même domaine. Considérons dans ce domaine un point qui n'est pas un point critique de f.

Lemme 3. *Il existe une $(n-1)$-forme différentielle holomorphe ψ définie au voisinage du point, telle que $\eta = df \wedge \psi$. La restriction de ψ à une hypersurface de niveau non critique de f ne dépend pas du choix de ψ vérifiant l'égalité ci-dessus.*

La restriction de la forme ψ à une hypersurface de niveau non critique de la fonction est appelée *forme de Guelfand-Leray* de η et est notée η/df.

Pour la démonstration du lemme, voir n° 7.1.

C. Intégrales de la forme de Guelfand-Leray. Revenons à la situation décrite au commencement de ce n°. Soit une n-forme différentielle holomorphe η définie sur $\mathbf{C}^n$. Supposons que η dépende holomorphiquement des paramètres y:

$$\eta = h(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

On a donc sur l'espace tout entier, pour des valeurs données des paramètres, une fonction holomorphe et une forme holomorphe de dimension maximale. Cela revient à dire qu'une forme de Guelfand-Leray est définie sur chaque hypersurface de niveau non critique. Considérons ses intégrales suivant des cycles choisis sur les hypersurfaces de niveau:

$$I(t, y) = \int_{\sigma(t, y)} \eta(y)/d_x F(\cdot, y),$$

où d_x est la différentielle par rapport aux variables x.

Théorème 5 (voir [52, 229]). *Cette intégrale est une fonction holomorphe de* (t, y).

Le théorème 5 découle de la représentation intégrale

$$I(t, y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma(t, y)}\eta(y)/(F(\cdot, y)-t) \qquad (2)$$

(comparer avec (1)). Sa démonstration est analogue à celle du lemme 1.

D. Dérivées des fonctions définies par des intégrales. Il y a intérêt à les mettre sous la forme des intégrales suivant les mêmes cycles. De telles formules conduisent aux représentations intégrales (1), (2).

Afin d'abréger l'écriture, nous supposerons dans les formules qui suivent que les paramètres des formes ont les mêmes valeurs que les paramètres des cycles. L'indice j d'une forme signifie que ses coefficients ont été dérivés par rapport à y_j.

D'après (1), (2) il vient

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\sigma(t, y)}\omega=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma(t, y)}dF\wedge\omega/(F-t)^2=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma(t, y)}d\omega/(F-t)=\int\limits_{\sigma(t, y)}d_x\omega/d_xF, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\int\limits_{\sigma(t, y)}\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma(t, y)}(dF\wedge\omega_j/(F-t)+dF_j\wedge\omega/(F-t)-F_j\,dF\wedge\omega/(F-t)^2)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma(t, y)}(dF\wedge\omega_j/(F-t)-F_j\,d_x\omega/(F-t))=$$

$$=\int\limits_{\sigma(t, y)}(\omega_j-F_j\,d_x\omega/d_xF). \qquad (4)$$

La seconde égalité se démontre en prenant une forme cohomologue à la forme donnée.

10.3. Ramification de l'intégrale et son développement en série. Pour pouvoir étudier les prolongements analytiques d'une fonction holomorphe définie par une intégrale, on doit savoir réduire les cycles d'intégration de la forme par déformation continue aux hypersurfaces des niveaux non critiques éloignés de la fonction. A cet effet, il suffit que l'ensemble des hypersurfaces des niveaux non critiques forme un fibré localement trivial. Sans considérer la situation la plus générale où cette propriété puisse se manifester (voir nº 1.1), nous envisagerons un cas local qui nous sera utile par la suite.

A. Fibration de Milnor du déploiement d'un point critique d'une fonction holomorphe. Soit un germe de déploiement d'un point critique d'une fonction holomorphe. (On considère en général deux cas extrêmes où le déploiement est miniversel ou trivial.) On appelle *fibration de Milnor* une fibration qui a pour fibres des hypersurfaces localement non singulières de niveau des fonctions qui interviennent dans le déploiement. Voici une définition plus précise.

Soit $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe ayant un point critique de multiplicité finie. Soit $\mathfrak{F}: (\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k,$

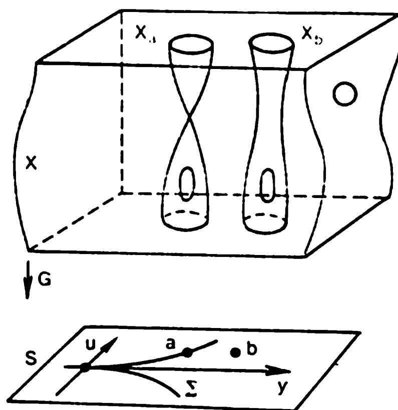


Fig. 73

$0 \times 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ son déploiement, i.e. un germe de fonction holomorphe tel que $\mathfrak{F}(\cdot, 0) = \mathfrak{f}$. Considérons le *développement* du déploiement, i.e. un germe d'application $\mathfrak{G}: (\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k, 0 \times 0) \to$ $\to (\mathbf{C} \times \mathbf{C}^k, 0 \times 0)$ défini par la formule $(x, y) \mapsto (\mathfrak{F}(x, y), y)$.

Soient F, G les représentants des germes $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$.

Pour des $\rho > 0$, $\eta > 0$, $\delta > 0$ petits, considérons dans les espaces $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^k$ des boules des rayons correspondants: $B_\rho^n = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \| x \| < \rho\}$, $B_\eta^1 = \{u \in \mathbf{C} \mid | u | < \eta\}$, $B_\delta^k = \{y \in \mathbf{C}^k \mid \| y \| < \delta\}$. Posons $S = B_\eta^1 \times B_\delta^k$, $X = (B_\rho^n \times B_\delta^k) \cap G^{-1}(S)$, $X_s = X \cap G^{-1}(s)$ pour tout $s \in S$, voir fig. 73.

Choisissons ρ tellement petit que pour tout r tel que $0 < r \leqslant \rho$ le bord ∂B_r^n d'une boule de rayon r rencontre transversalement l'hypersurface de niveau nul d'une fonction $F(\cdot, 0)$. Choisissons η, δ tellement petits devant ρ que pour tout point $(u, y) \in S$ le bord ∂B_ρ^n de la boule de rayon ρ rencontre transversalement l'hypersurface de niveau u d'une fonction $F(\cdot, y)$. Le triplet des nombres ρ, η, δ ainsi choisis est appelé *triplet permis*.

Si le triplet est permis, l'application $X \to S$ qui est une restriction de G sera appelée *spécialisation du développement du déploiement*. Dans le texte qui suit, les restrictions des applications seront désignées par les mêmes lettres que les applications elles-mêmes.

Soit Σ l'ensemble des valeurs critiques (le *discriminant*) de l'application $G\colon X \to S$, i.e. l'ensemble $\{s \in S \mid X_s$ est singulier$\}$. Si le triplet des nombres ρ, η, δ est permis, la restriction de l'application $G\colon X \to S$ au complémentaire de l'image réciproque de l'ensemble des valeurs critiques est une fibration différentiable localement triviale (voir n° 1.1). Ici la fibration différentiable localement triviale est l'application $G\colon X' \to S'$, où $S' = S \setminus \Sigma$, $X' = X \setminus G^{-1}(\Sigma)$. Cette fibration est appelée *fibration de Milnor* du déploiement (plus exactement, fibration de Milnor de la spécialisation du développement du déploiement).

La fibre de la fibration de Milnor est une variété à bord analytique complexe de dimension $(n - 1)$ (et respectivement une variété réelle de dimension $(2n - 2)$). D'après le théorème de Milnor [245] (voir aussi le n° 2.1), la fibre a le type d'homotopie d'un bouquet de μ sphères de dimension moyenne, où μ est égal à la multiplicité du point critique initial. Donc

$$X_s \sim \underbrace{S^{n-1} \vee \ldots \vee S^{n-1}}_{\mu} \quad \text{pour } s \in S'.$$

Le type différentiable de la fibre de la fibration de Milnor ne dépend pas du choix du triplet permis. Pour différents triplets permis, les germes d'ensembles Σ, S' à l'origine de l'espace S sont les mêmes. Si le premier nombre d'un premier triplet est plus petit que le premier nombre d'un second triplet, alors, pour tous les points de la base proches de l'origine, la fibre de la première fibration se plonge dans la fibre de la seconde. Mieux, la première fibre est un rétracte par déformation de la seconde fibre. Aussi le plongement de la première fibre dans la seconde induit-il l'isomorphie des groupes d'homologie et de cohomologie des fibres des fibrations de Milnor qui répondent à des triplets permis différents. Dans ce sens les groupes d'homologie et de cohomologie de la fibre de la fibration de Milnor sont définis de façon intrinsèque.

Nous allons considérer les groupes d'homologie et de cohomologie de dimension $(n - 1)$ de la fibre de la fibration de Milnor. Ils sont les mêmes que pour le bouquet de sphères : ce sont des modules libres sur l'anneau des coefficients. Leurs dimensions sont égales à la multiplicité du point critique initial si $n - 1 > 0$, ou de 1 supérieures à cette multiplicité si $n - 1 = 0$ (un bouquet de μ sphères de dimension 0 n'est autre que $\mu + 1$ points). Sans le mentionner expressément, nous ne considérerons, dans le texte qui suit, que des grou-

pes d'homologie et de cohomologie réduits *). Quel que soit n, le rang d'un groupe de (co)homologie réduit est égal à la multiplicité du point critique. Pour $n > 1$ les groupes de (co)homologie de dimension $(n - 1)$ réduits se confondent avec les groupes de (co)homologie usuels.

Nous dirons que les groupes de cohomologie et d'homologie de la fibre de la fibration de Milnor sont *évanescents* au point critique initial.

B. Ramification d'une intégrale. Soit un germe $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ de fonction holomorphe ayant un point critique isolé. Soit un déploiement $\mathfrak{F}: (\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k, 0 \times 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ de $\mathfrak{f}$. Pour un triplet permis ρ, η, δ, considérons la spécialisation du développement et la fibration de Milnor.

Choisissons dans une fibre de la fibration de Milnor une classe d'homologie entière de dimension $(n - 1)$. En faisant subir une déformation continue au cycle qui représente cette classe, on obtient une famille de classes entières de dimension $(n - 1)$ dans les fibres de la fibration de Milnor, qui dépendent continûment d'un point de la fibration. Cette dépendance est multiforme. Elle est décrite par le groupe de monodromie en homologie de dimension $(n - 1)$ de la fibre. En effet, soit sur la base un chemin fermé et une classe d'homologie dans la famille au-dessus du point initial du chemin. En étendant la classe aux fibres au-dessus de tous les points du chemin, la classe d'homologie pour le point final se déduit de la classe d'homologie pour le point initial par l'action de la transformation de monodromie associée au chemin en question.

Soit une $(n - 1)$-forme différentielle holomorphe définie dans un voisinage de l'origine de l'espace $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$. Supposons que le voisinage en question soit assez grand pour contenir l'espace de la fibration de Milnor. Considérons les intégrales de la forme suivant les cycles de la famille. En accord avec le théorème 4, ces intégrales définissent une fonction holomorphe multiforme sur la base de la fibration de Milnor.

La ramification de cette fonction est décrite par le groupe de monodromie en homologie de dimension $(n - 1)$ de la fibre de la fibration de Milnor. Soient ω la forme, $\sigma(u, y)$ la classe d'homologie de la famille dans la fibre au-dessus d'un point $(u, y) \in S'$, γ un chemin fermé dans la base de la fibration d'origine et d'extrémité au point (u, y), et M_γ la transformation de monodromie associée à γ.

*) Rappelons qu'on appelle *groupe d'homologie réduit* de dimension k d'un espace topologique le noyau de l'application du groupe d'homologie de dimension k de l'espace dans le groupe d'homologie de dimension k d'un point, induite par l'application de l'espace dans le point. De même, le *groupe de cohomologie réduit* de dimension k est le conoyau de l'application du groupe de cohomologie de dimension k d'un point dans le groupe de cohomologie de dimension k de l'espace.

Alors la valeur du prolongement analytique le long de γ de la branche de la fonction répondant à l'intégrale $\int\limits_{\sigma(u,y)} \omega$ est égale à $\int\limits_{M_\gamma\sigma(u,y)} \omega$.
Ainsi donc, la ramification des fonctions holomorphes définies par les intégrales suivant des classes d'homologie évanescentes au point critique est définie par la topologie de la fibration de Milnor du déploiement considéré et, en fin de compte, par la topologie de la fibration de Milnor d'un déploiement versel du point critique initial.

Remarques. 1. Le groupe de monodromie en homologie de dimension $(n - 1)$ de la fibre de la fibration de Milnor du déploiement versel d'un point critique s'appelle *groupe de monodromie du point critique.* Les groupes de monodromie des points critiques ont été étudiés dans le chapitre I. Tout résultat relatif au groupe de monodromie peut aussi être interprété comme un résultat sur la ramification des intégrales correspondantes.

2. Soit à présent une n-forme différentielle holomorphe η (et non une $(n - 1)$-forme comme précédemment) définie au voisinage de l'origine de l'espace $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$. La forme η définit sur chaque fibre de la fibration de Milnor une $(n - 1)$-forme holomorphe η/d_xF (on fait la restriction de la forme η et de la fonction F à des sous-espaces de X' du type $y =$ Cte qui sont des domaines dans $\mathbf{C}^n$, puis on divise la forme par d_xF). Considérons les intégrales de la forme η/d_xF suivant les classes de la famille indiquée plus haut. Ces intégrales définissent une fonction holomorphe multiforme sur la base de la fibration de Milnor (théorème 5). Tout comme pour la fonction définie par les intégrales de la $(n - 1)$-forme (voir ci-dessus), sa ramification est définie par le groupe de monodromie en homologie de dimension $(n - 1)$ de la fibre de la fibration de Milnor. Au lieu de prendre une n-forme, on peut commencer par une $(n + k)$-forme, et au lieu de la diviser par d_xF, on doit la diviser par $d_xF \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k$. On obtient finalement une $(n - 1)$-forme holomorphe bien définie sur chaque fibre. Ses intégrales suivant les classes de la famille définissent une fonction holomorphe multiforme sur la base de la fibration de Milnor (théorème 5). La ramification de cette fonction, comme celle des fonctions précédentes, se définit également par le groupe de monodromie.

3. Si la $(n - 1)$-forme ω est définie dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$ qui ne contient pas l'espace de la fibration de Milnor pour le triplet permis ρ, η, δ donné, on ne peut pas en général intégrer cette forme suivant n'importe quelle classe d'homologie de la famille. En revanche, on peut très bien l'intégrer suivant les classes de la famille situées dans les fibres au-dessus des points suffisamment proches de l'origine de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$. Cela tient à ce que les classes de ce type ont les cycles représentatifs dans un voisinage

suffisamment restreint de l'origine de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$. Plus exactement, le domaine de définition de la forme, aussi restreint soit-il, contient toujours l'espace d'une fibration de Milnor définie à partir d'un triplet permis de nombres suffisamment petits, si bien que le plongement de la fibre de la petite fibration de Milnor dans la fibre de la grande fibration de Milnor induit l'isomorphie des groupes d'homologie et de cohomologie (voir n° 11.3 A).

C. Développement en série d'une intégrale. Soit une droite complexe dans l'espace S (base de la spécialisation). Supposons que l'ensemble des valeurs critiques Σ ne contienne pas cette droite. Alors l'intersection de la droite avec Σ est discrète. Considérons un des points d'intersection. Nous montrerons que la restriction à la droite de la fonction holomorphe multiforme définie par l'intégrale d'une forme holomorphe suivant les cycles de la famille continue (voir B ci-dessus) se développe, au voisinage du point d'intersection considéré de la droite avec Σ, en série suivant les puissances fractionnaires du paramètre sur la droite, série dont les coefficients sont des polynômes en logarithmes du paramètre sur la droite. Cette proposition est un analogue direct du théorème 2.

Soit t une coordonnée holomorphe locale sur la droite d'origine au point d'intersection considéré. Dans un petit voisinage du point d'intersection, considérons un secteur $a \leqslant \arg t \leqslant b$. Pour chaque valeur non nulle du paramètre t appartenant au secteur, choisissons une base $\sigma_1(t), \ldots, \sigma_\mu(t)$ de classes d'homologie entières de dimension $(n-1)$ de la fibre de la fibration de Milnor située au-dessus du point correspondant de la droite, de telle façon que cette base dépende continûment du point de la droite. Soit M la transformation de monodromie en homologie associée au chemin que suit le paramètre de la droite en contournant 0 dans le sens antihoraire. (Rappelons que selon les théorèmes 11 et 12 du § 3, les valeurs propres de cet opérateur sont les racines de 1 et que la taille de ses blocs jordaniens n'est pas supérieure à n.) Soit ω une $(n-1)$-forme différentielle holomorphe définie sur un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$ contenant l'espace source de la spécialisation du déploiement (voir la définition en A). Il existe alors une fonction vectorielle définie dans le secteur indiqué:

$$I(t) = \left(\int_{\sigma_1(t)} \omega, \ldots, \int_{\sigma_\mu(t)} \omega \right).$$

Théorème 6 (voir [52, 90, 135, 175, 229, 252]). *La fonction vectorielle indiquée se développe en série* $\sum_{\alpha, k} a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. *La série est convergente si le paramètre est suffisamment petit en module. Les coefficients de la série sont des vecteurs de* $\mathbf{C}^\mu$; *les* α *sont des nombres rationnels non négatifs. Les coefficients* $a_{k,0}$ *sont nuls pour* $k > 0$. *Chaque* α

est tel que exp $(2\pi i\alpha)$ *est une valeur propre de l'opérateur* M. *Le coefficient* $a_{k,\alpha}$ *s'annule chaque fois que la forme jordanienne de* M *n'a pas de blocs de valeur propre* exp $(2\pi i\alpha)$ *de taille égale ou supérieure à* $k+1$.

Remarque. Supposons que la droite dans la base S (décrite dans le théorème 6) soit le lieu des valeurs de la fonction F pour un y donné et rencontre transversalement le discriminant dans un point qui correspond à un point critique non dégénéré de F pour cette valeur de y. On peut alors préciser le développement du théorème 6 (voir le lemme 2 du § 12).

Le théorème 6 est consécutif au théorème 7 ci-après et s'en déduit tout comme le théorème 2 se déduit du théorème 3.

Théorème 7 (voir [229, 252, 253]). *Il existe un entier naturel* N *tel qu'on a dans le secteur délimité*

$$\left| \int_{\sigma_j(t)} \omega \right| \leqslant \text{Cte} \cdot |t|^{-N}, \quad j = 1, \ldots, \mu.$$

Mieux, étant donnée une demi-droite arg t = Cte *dans ce secteur, la fonction vectorielle admet une limite finie quand le paramètre tend vers* 0 *suivant la demi-droite.*

Nous ne démontrerons pas le théorème 7 (voir [229] et les remarques relatives au théorème 3), en nous bornant à en formuler une variante plus forte (cf. le théorème 3′).

Définissons d'abord la notion de famille de classes d'homologie évanescentes dans un point donné d'intersection de la droite avec le discriminant Σ (cf. la définition du n° 11.1 C). Soit X_t la fibre de la fibration de Milnor située au-dessus du point de la droite en lequel le paramètre est égal à t. Prenons sur la droite une demi-droite arg t = Cte et, pour tout t suffisamment petit appartenant à la demi-droite, choisissons une classe d'homologie $\sigma(t) \in H_{n-1}(X_t, \mathbf{Z})$ dépendant continûment de t. Nous dirons que les classes $\sigma(t)$ de cette famille sont *évanescentes* quand le paramètre tend vers 0 le long de la demi-droite si, pour tout t suffisamment petit, la classe $\sigma(t)$ appartient au noyau de l'homomorphisme naturel

$$H_{n-1}(X_t, \mathbf{Z}) \to H_{n-1}\Big(\bigcup_{s \in [0, t]} X_s, \mathbf{Z}\Big).$$

Si une famille continue de classes d'homologie est définie pour des paramètres appartenant au secteur, on montre sans peine que la propriété d'évanescence de la famille ne dépend pas de la demi-droite dans le secteur.

Théorème 7′ (voir [229]). *Supposons que la famille continue de classes d'homologie soit définie pour des paramètres qui appartiennent au secteur. Supposons que chaque classe de la famille soit évanescente*

quand le paramètre tend vers 0 *le long d'une demi-droite choisie dans le secteur. Alors la limite de l'intégrale* $\int\limits_{\sigma(t)} \omega$ *est nulle quand le paramètre tend vers* 0 *le long de la demi-droite.*

Remarquons que l'existence d'une limite finie est une conséquence du théorème 7.

Corollaire du théorème 7'. *L'intégrale d'une forme holomorphe suivant une famille de classes d'homologie évanescentes se développe dans chaque secteur en série*

$$\sum a_{k,\,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k,$$

où tous les α *sont positifs.*

D. Fibration de Milnor d'un point critique. Soit un germe $f:(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ de fonction holomorphe ayant un point critique isolé. C'est un déploiement trivial propre. Voyons ce que deviennent, vis-à-vis d'un tel déploiement, les objets introduits dans les n^{os} précédents, à savoir la spécialisation $f: X \to S$ du germe et la fibration de Milnor associée $f: X' \to S'$.

Pour toute $(n-1)$-forme différentielle holomorphe définie sur X, ses intégrales suivant les classes d'une famille continue de classes d'homologie entières évanescentes définissent une fonction holomorphe multiforme sur le disque pointé S'. La ramification de cette fonction qu'on observe lorsque le paramètre fait un tour de 0 se définit par la transformation de monodromie en homologie, qui est en l'occurrence la *monodromie classique* (voir n° 2.1). Dans chaque secteur $a \leqslant \arg t \leqslant b$ la fonction en question se développe en série $\sum a_{k,\,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k$. Dans cette série tous les exposants de puissance des paramètres sont positifs. De plus, chaque exposant est le quotient par $2\pi i$ du logarithme d'une valeur propre de l'opérateur de monodromie classique. Toute puissance du logarithme du paramètre dans la série est plus petite que la taille maximale des blocs jordaniens de valeur propre correspondante de l'opérateur de monodromie classique (voir les théorèmes 7 et 7').

Soient sur X une n-forme différentielle holomorphe η et une famille continue de classes d'homologie entières évanescentes $\sigma(t)$, où $t \in S'$. Sur la base de la fibration de Milnor, considérons la fonction holomorphe multiforme $\int\limits_{\sigma(t)} \eta/df$.

Théorème 8 (voir [229]). *Dans chaque secteur* $a \leqslant \arg t \leqslant b$ *la fonction indiquée se développe en série*

$$\sum_{\alpha,\,k} a_{k,\,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k.$$

La série est convergente si le paramètre est suffisamment petit en module. Tous les α sont des nombres rationnels. Chaque α est supérieur à -1. Chaque α est tel que $\exp(2\pi i\alpha)$ *est une valeur propre de l'opérateur de monodromie classique en homologie. Un coefficient $a_{k,\,\alpha}$ s'annule chaque fois que l'opérateur de monodromie classique n'a pas de blocs jordaniens de valeur propre* $\exp(2\pi i\alpha)$ *de taille égale ou supérieure à $k+1$.*

D é m o n s t r a t i o n. On a d'après le lemme de Poincaré

$$\eta = d\omega,$$

où ω est une $(n-1)$-forme différentielle holomorphe. D'après la formule (3), p. 231, on a

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\sigma(t)}\omega = \int\limits_{\sigma(t)}\eta/dt.$$

Le théorème résulte maintenant du théorème 6.

Remarque sur l'application du lemme de Poincaré. On montre sans peine que X est une variété de Stein (voir la définition dans [143, 111]), d'où il ressort qu'on peut calculer les classes de cohomologie de X à l'aide des formes holomorphes (voir [317], [111, théorème 12.13]). Puisque X est contractile et la forme η, fermée, il existe sur X une $(n-1)$-forme holomorphe ω telle que $\eta = d\omega$. On peut aussi démontrer le théorème 8 sans profiter du fait que X est une variété de Stein. En vertu du lemme canonique de Poincaré, il existe pour la forme η donnée une $(n-1)$-forme holomorphe ω définie dans un voisinage suffisamment restreint de l'origine de $\mathbf{C}^n$, telle que $\eta = d\omega$. La formule (5) vaut à présent pour tout t suffisamment petit. Cette assertion suffit pour démontrer le théorème 8.

Exemple. Soit $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. L'espace des classes d'homologie évanescentes est engendré par un cycle évanescent. Soit $\sigma(t)$ un cycle évanescent au-dessus de t dépendant continûment du paramètre. Quand le paramètre suit un chemin fermé autour de 0, on a $\sigma(t) \mapsto (-1)^n\,\sigma(t)$. Soit ω une $(n-1)$-forme différentielle holomorphe. Considérons la fonction holomorphe $I(t) = \int\limits_{\sigma(t)}\omega$. D'après le théorème 6

$$I(t) = \sum a_\alpha t^\alpha,$$

où les α sont entiers pour n pair et demi-entiers pour n impair. Décomposons ω en composantes homogènes $\omega_{n-1} + \omega_n + \ldots$ Puisque le germe est homogène, l'intégrale $\int\limits_{\sigma(t)}\omega_p$ est égale à 0 si $p-n$ est impair et à $a_{p/2}t^{p/2}$ si $p-n$ est pair. Calculons le premier coeffi-

cient $a_{n/2}$. Avec t réel, il vient

$$\int_{\sigma(t)} \sum_j (-1)^j A_j x_j \, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_j} \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \sum_j A_j \int_0^t \Big(\int_{\sigma(s)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n / df \Big) \, dt = \sum_j A_j \operatorname{Vol}(D^n) \, t^{n/2},$$

où Vol (D^n) est le volume d'une boule de dimension n de rayon 1.

§ 11. Intégrales oscillantes complexes

En étudiant le comportement asymptotique des fonctions, on est souvent amené à envisager le comportement asymptotique des intégrales du type

$$\int_\Gamma e^{\tau f(x)} \varphi(x) \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

pour des grandes valeurs du paramètre τ. Ici f, φ sont des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$; Γ, une chaîne réelle de dimension n dans $\mathbf{C}^n$; τ, un grand paramètre réel. La fonction f est appelée *phase*, la fonction φ, *amplitude*. De telles intégrales sont appelées *intégrales de la méthode du point selle ou du col*. On trouvera dans [108] par exemple des problèmes types faisant intervenir de telles intégrales.

La méthode du col employée pour l'étude de ces intégrales consiste en ce qui suit. D'après la formule de Stokes, l'intégrale reste inchangée si l'on déforme la chaîne sans varier son bord. On déforme donc la chaîne, sans toucher à son bord, de façon à diminuer la valeur de la partie réelle de la phase sur la chaîne (car c'est cette partie qui définit la valeur de l'intégrale quand le paramètre prend des valeurs positives élevées). On peut diminuer la partie réelle de la phase en déplaçant l'intérieur de la chaîne le long de la trajectoire du gradient de phase. On le fait jusqu'à ce que la chaîne ne rencontre des points critiques de la phase en lesquels le gradient s'annule. Les déformations poursuivies font décroître la partie réelle de la phase sur la partie de la chaîne qui ne rencontre aucun point critique, sans changer le maximum de la partie réelle de la phase sur la chaîne. L'étude du comportement asymptotique de l'intégrale se ramène désormais à majorer localement cette dernière dans les voisinages des points critiques de la phase rencontrés par la chaîne ou à majorer l'intégrale au voisinage du bord de la chaîne si le maximum est atteint sur le bord de la chaîne.

La méthode du point selle comprend donc deux parties. La première partie — topologique — consiste à définir une chaîne convenablement déformée, appelée *contour selle*. La seconde partie — analytique — prévoit la recherche des majorations de l'intégrale

suivant le contour selle dans les voisinages des points critiques de la phase et au voisinage du bord du contour selle (si la partie réelle de la phase passe par le maximum sur le bord de la chaîne). Dans les problèmes appliqués, le maximum de la partie réelle de la phase se situe généralement ailleurs que sur le bord de la chaîne.

Le présent paragraphe est consacré à la partie analytique de la méthode du point selle: nous y étudions le comportement asymptotique de l'intégrale de la méthode du point selle suivant une chaîne située dans un voisinage restreint d'un point critique isolé de la phase, disposée de telle façon que la partie réelle de la phase au bord de la chaîne soit plus petite que la partie réelle de la valeur critique de la phase. Nous montrerons que l'intégrale se développe alors en série asymptotique de la forme

$$e^{\tau f(x_0)} \sum a_{k,\alpha} \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k.$$

Nous montrerons que dans cette série les puissances du paramètre et celles de son logarithme sont liées à l'opérateur de monodromie (classique) en homologie de dimension $(n-1)$ de la fibration de Milnor du point critique de la phase. Plus exactement, chaque exposant de puissance du paramètre est le quotient par $2\pi i$ du logarithme d'une valeur propre de l'opérateur de monodromie, et chaque exposant de puissance du logarithme du paramètre est plus petit que la taille maximale du bloc jordanien de l'opérateur de monodromie de valeur propre correspondante.

Cette propriété de la série tient à ce qui suit. Le bord de la chaîne d'une intégrale de la méthode du point selle définit de façon naturelle une famille continue d'homologies entières évanescentes dans les fibres de la fibration de Milnor (voir n° 11.1 B). Considérons une fonction sur la base de la fibration de Milnor, fonction définie par les intégrales suivant les classes de la famille de la forme

$$\varphi \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n / df,$$

où f et φ sont la phase et l'amplitude de l'intégrale de la méthode du point selle. Il se trouve que l'intégrale de la méthode du point selle est la transformée de Laplace (dans un sens à préciser) de la fonction considérée. La fonction elle-même se développe au voisinage de la valeur critique de la phase en série suivant les puissances fractionnaires de l'argument et suivant les puissances entières du logarithme de l'argument (théorème 8 du § 10). Le lien entre ces puissances et l'opérateur de monodromie est indiqué dans ce théorème. Nous montrons qu'en faisant subir à cette série une transformation de Laplace terme à terme nous obtenons une série asymptotique pour l'intégrale de la méthode du point selle.

Dans la deuxième partie du paragraphe nous étudions les intégrales oscillantes de phase analytique étendues à $\mathbf{R}^n$ en supposant que le support de l'amplitude est contenu dans un voisinage suffi-

samment restreint du point critique de multiplicité finie de la phase. On peut complexifier la phase pour l'assimiler à une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^n$ qui est réelle sur la partie réelle de l'espace complexe. On peut alors comparer le comportement asymptotique de l'intégrale oscillante étendue à $\mathbf{R}^n$ et celui des intégrales de la méthode du point selle de phase complexifiée. Nous montrons qu'il existe, au voisinage du point critique de la phase, un contour selle (dit *réel*) tel que le développement asymptotique de l'intégrale suivant ce contour soit le même que celui de l'intégrale oscillante étendue à $\mathbf{R}^n$. Cette proposition a deux conséquences. La première conduit à une nouvelle démonstration du théorème 3 du § 6 du développement asymptotique d'une intégrale oscillante. La seconde explicite le sens géométrique des exposants de puissance du paramètre et du logarithme du paramètre dans le développement asymptotique de l'intégrale oscillante : les exposants se définissent en termes de structure jordanienne de l'opérateur de monodromie classique de la complexification du point critique de la phase.

Dans la troisième partie du paragraphe nous considérons des intégrales de phase $f(x) + g(y)$ et nous définissons leur comportement asymptotique en fonction des intégrales de phases f, g.

Les principaux résultats de ce paragraphe (théorèmes 1, 3 et 4) appartiennent à B. Malgrange [229].

11.1. Intégrales de la méthode du point selle. Soit une fonction $f\colon (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ holomorphe au voisinage de son point critique à l'origine. Soit une chaîne Γ de dimension n située dans un voisinage restreint du point critique. Supposons que la partie réelle des valeurs de f soit négative au bord de Γ. Une telle chaîne est dite *permise*. Soit une n-forme différentielle holomorphe ω définie au voisinage du point critique. Proposons-nous d'étudier le comportement asymptotique de l'intégrale $\int\limits_{\Gamma} e^{\tau f(x)}\omega$ pour des valeurs positives élevées du paramètre τ. Une telle intégrale est appelée *intégrale oscillante complexe*, ou *intégrale de la méthode du point selle*.

On dit que deux chaînes Γ, Γ' sont *équivalentes* s'il existe, dans un petit voisinage du point critique, une chaîne V de dimension $(n + 1)$ telle que la partie réelle des valeurs de la fonction f soit négative sur la chaîne $\Gamma - \Gamma' + \partial V$ de dimension n (après simplifications).

Lemme 1. *Soient Γ, Γ' deux chaînes permises équivalentes. Alors pour $\tau \to +\infty$*

$$\int\limits_{\Gamma} e^{\tau f}\omega - \int\limits_{\Gamma'} e^{\tau f}\omega = o(\tau^{-N})$$

pour tout N entier naturel.

Démonstration. On a $\Gamma = \Gamma' + \partial V + \Gamma''$, où $\operatorname{Re} f|_{\Gamma''} < 0$. Donc $\int\limits_{\Gamma} - \int\limits_{\Gamma'} = \int\limits_{\Gamma''}$, mais la dernière intégrale est un petit à décroissance exponentielle.

Nous allons poursuivre le développement asymptotique des intégrales oscillantes complexes jusqu'aux termes petits devant τ^{-N}, où N est un entier naturel quelconque.

Exemple. Soient $f(x) = x^3$, $\omega = dx$. Un contour permis arbitraire est équivalent à une combinaison linéaire de deux contours Γ_1, Γ_2 de la figure 74. Les intégrales suivant Γ_1 et Γ_2 sont conjuguées:

$$\int\limits_{\Gamma_1} e^{\tau x^3}\,dx = (1 - e^{+2\pi i/3}) \int\limits_0^1 e^{-\tau x^3}\,dx = (\ldots)\,\tau^{-1/3} \int\limits_0^\infty e^{-x^3}\,dx + o(\tau^{-N}).$$

Précisons les notions de contours permis et équivalents.

A. Définitions précises. Supposons que la fonction $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ soit holomorphe à l'origine et admette un point critique

Fig. 74

Fig. 75

de multiplicité finie à l'origine. Considérons un couple de nombres positifs ρ, η. Soit S le disque $\{t \in \mathbf{C}^1 \mid |t| < \eta\}$ et S^- sa moitié gauche $\{t \in S \mid \operatorname{Re} t < 0\}$. Soient ensuite X l'ensemble $\{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) \in S,\ \|x\| < \rho\}$, X^- l'ensemble $X \cap f^{-1}(S^-)$, X_t l'ensemble $X \cap f^{-1}(t)$ (voir fig. 75). Supposons que le couple ρ, η soit permis pour le point critique (voir n° 10.3,A).

Une chaîne $\Gamma \subset \mathbf{C}^n$ de dimension n est appelée *permise* si $\Gamma \subset X$, $\partial\Gamma \subset X^-$. Deux chaînes permises Γ, Γ' sont dites *équivalentes* s'il existe une chaîne $V \subset X$ de dimension $(n + 1)$ telle que $(\Gamma - \Gamma' + dV) \subset X^-$. Les classes d'équivalence des chaînes permises par rapport aux opérations d'addition et de multiplication par un nom-

bre forment un espace vectoriel qui se confond par définition avec $H_n(X, X^-)$.

B. Développement en série. Associons à chaque élément $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$ une famille de classes d'homologie réduites de dimension $(n-1)$ dans les fibres de la fibration de Milnor au-dessus de S^-. A cet effet, considérons la suite exacte

$$\ldots \to H_n(X) \to H_n(X, X^-) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X^-) \to H_{n-1}(X) \to \ldots$$

Les nombres ρ, η sont permis. Donc, X est contractile, et ∂ est l'isomorphisme du groupe $H_n(X, X^-)$ et du groupe d'homologie réduit de dimension $(n-1)$ de X^-.

La restriction de l'application f à $X' = X \setminus X_0$ est une fibration différentiable localement triviale (fibration de Milnor du point critique). En particulier, $f\colon X^- \to S^-$ est une fibration triviale. Aussi les groupes d'homologie de X^- sont-ils isomorphes à ceux d'une fibre quelconque au-dessus de S^-. On a donc l'isomorphisme

$$\partial_t\colon H_n(X, X^-) \to H_{n-1}(X_t)$$

pour tout $t \in S^-$. Ici $H_{n-1}(X_t)$ est le groupe d'homologie réduit. Si Γ est une chaîne permise représentant un élément $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$, on peut, en prenant le bord de Γ et en le déformant dans X^- vers la fibre X_t, obtenir le cycle représentant l'élément $\partial_t[\Gamma] \in H_{n-1}(X_t)$. La famille de classes $\partial_t[\Gamma]$ dépend continûment de $t \in S^-$.

Dans l'exemple de la page précédente la fibre X_t de la fibration de Milnor se compose des racines de l'équation $x^3 = t$. A l'élément $[\Gamma_1] \in H_1(X, X^-)$ correspond la famille de classes d'homologie $\partial_t[\Gamma_1]$ de dimension 0. La classe $\partial_t[\Gamma_1]$ est représentée par le cycle $x^0 - x^1$, où x^0 est le point inférieur et x^1 le point de gauche de la fibre (voir fig. 74).

Lemme 2. *Soient ω une n-forme différentielle holomorphe sur X, $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$. Alors*

$$\int_{[\Gamma]} e^{\tau f}\omega \approx \int_0^{t_0} e^{-\tau t}\Big(\int_{\partial_{-t}[\Gamma]} \omega/df\Big)\,dt. \qquad (1)$$

Ici t_0 est un petit nombre positif appartenant à S; l'intégrale du second membre est prise suivant un segment d'axe réel. Le signe $\approx$ indique que le second et le premier membre diffèrent d'un terme $o(\tau^{-N})$ pour $\tau \to +\infty$, où N est un nombre quelconque.

Ce lemme établit un lien entre les intégrales de la méthode du point selle et celles des formes holomorphes suivant des familles de classes d'homologie évanescentes. L'intégrale d'une forme holomorphe se développe en série suivant les puissances du paramètre et les puissances du logarithme du paramètre (voir § 10). La for-

mule (1) permet un développement analogue pour une intégrale de la méthode du point selle.

D é m o n s t r a t i o n. Choisissons une chaîne Γ représentant $[\Gamma]$ de telle façon que $\partial\Gamma \subset X_{-t_0}$. On a alors pour toute $(n-1)$-forme holomorphe φ sur X

$$\int_{\Gamma} d\varphi = \int_{0}^{-t_0} \Big(\int_{\partial_t[\Gamma]} d\varphi/df \Big)\, dt. \tag{2}$$

En effet, l'intégrale du premier membre est égale d'après la formule de Stokes à l'intégrale de φ suivant $\partial\Gamma$. Le cycle $\partial\Gamma$ représente $\partial_{-t_0}[\Gamma]$. Considérons une fonction

$$J(t) = \int_{\partial_t[\Gamma]} \varphi.$$

Elle est holomorphe sur S^- et tend vers 0 lorsque le paramètre tend vers 0 le long du rayon (voir théorèmes 4 et 7 du § 10). Elle prend donc dans t_0 une valeur égale à l'intégrale de 0 à $-t_0$ de sa dérivée. Conformément à la formule (3) de la page 231, la dérivée de J se définit par l'intégrale de la forme $d\varphi/df$. La formule (2) est démontrée.

Pour tout τ donné il existe sur X une $(n-1)$-forme holomorphe φ telle que $d\varphi = e^{\tau f}\omega$ (d'après le lemme de Poincaré). Maintenant la formule (2) appliquée à φ donne la proposition du lemme.

Remarque. Tout comme le théorème 8 du § 10, ce lemme demande une utilisation savante du lemme de Poincaré (voir la remarque sur la page 239).

Théorème 1 (voir [229]). *Soient ω une n-forme différentielle holomorphe sur X, $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$. Alors l'intégrale*

$$\int_{[\Gamma]} e^{\tau f}\omega \tag{3}$$

se développe pour $\tau \to +\infty$ en série asymptotique

$$\sum_{\alpha, k} a_{k,\alpha}\tau^{\alpha} (\ln \tau)^k. \tag{4}$$

Ici le paramètre α parcourt un ensemble fini de progressions arithmétiques ne dépendant que de la phase et composées de nombres rationnels négatifs. Plus exactement, chaque α est tel que $\exp(-2\pi i\alpha)$ *est une valeur propre de l'opérateur de monodromie classique du point critique de la phase. Le coefficient $a_{k,\alpha}$ s'annule chaque fois que l'opérateur de monodromie classique ne comporte aucun bloc jordanien de taille égale ou supérieure à $k+1$ de valeur propre* $\exp(-2\pi i\alpha)$.

La démonstration résulte de (1). L'intégrale intérieure dans le second membre de (1) se développe sur le demi-axe réel positif en

série

$$\sum b_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k; \tag{5}$$

nous l'avons vue dans le théorème 8 du § 10. Il est facile de voir qu'on peut obtenir le développement asymptotique de l'intégrale (3) en calculant les développements asymptotiques des intégrales des différents termes de la série (5). Appliquant la formule canonique

$$\int_0^\infty e^{-\tau t} t^{\alpha} (\ln t)^k \, dt = \left(\frac{d}{d\alpha}\right)^k \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\tau^{\alpha+1}}\right), \tag{6}$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma et $\int_0^\infty$ est mis au lieu de $\int_0^1$, nous obtenons la série (4).

Remarque. La série (4) définit la série (5). L'étude du comportement asymptotique des intégrales de la méthode du point selle se réduit donc à l'étude du comportement asymptotique des intégrales des formes holomorphes suivant les familles continues de classes d'homologie évanescentes.

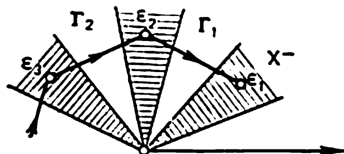


Fig. 76

C. Exemple. Soit $f = x^{\mu+1}$, et soit $x = 0$ un point critique de multiplicité μ. Choisissons des chaînes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\mu$ qui engendrent une base dans $H_1(X, X^-)$. A cet effet, désignons par $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\mu+1}$ les racines de l'équation $x^{\mu+1} = -1$, où $\arg \varepsilon_j = \pi(2j-1)/(\mu+1)$, et posons Γ_j égale au segment $\varepsilon_{j+1}\varepsilon_j$, voir fig. 76. Soit ω_l la forme $x^{l-1}\,dx$.

Lemme 3. *Pour* $1 \leqslant l,\ j \leqslant \mu$ *on a*

$$\int_{[\Gamma_j]} e^{\tau f} \omega_l = a\tau^{\alpha},$$

où $a = (\varepsilon_{j+1}^l - \varepsilon_j^l)\,\Gamma(l/(\mu+1))/(\mu+1)$, $\alpha = -l/(\mu+1)$, $\Gamma(\cdot)$ *est la fonction gamma.*

Remarque. Une intégrale d'une forme ω arbitraire de phase $x^{\mu+1}$ peut être réduite, au moyen de l'intégration par parties, à une combinaison linéaire d'intégrales de même phase des formes ω_l, $l = 1, \ldots, \mu$. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont des séries formelles de $1/\tau$.

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. Pour t négatifs, désignons par $\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_{\mu+1}(t)$ les racines de l'équation $x^{\mu+1} = t$, où $\arg \varepsilon_j(t) = \pi(2j-1)/(\mu+1)$. Pour de tels t l'élément $\partial_t[\Gamma_j]$

est représenté par le 0-cycle $\varepsilon_j(t) - \varepsilon_{j+1}(t)$. La 0-forme ω_l/df est égale à la fonction $x^{l-\mu-1}/(\mu+1)$. Par conséquent,

$$\int\limits_{\partial_t[\Gamma_j]} \omega_l/df = (\varepsilon_{j+1}^l - \varepsilon_j^l)\,|t|^{l/(\mu+1)-1}/(\mu+1). \tag{7}$$

Le lemme 3 résulte maintenant du lemme 2 et de la formule (6).

Citons en conclusion une propriété importante des formes $\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_\mu$ de l'exemple.

Lemme 4. *Les formes $\omega_1/df, \ldots, \omega_\mu/df$ engendrent une base en cohomologie évanescente dans chaque fibre de la fibration de Milnor. Mieux,*

$$\det{}^2\Big(\int\limits_{\partial_t[\Gamma_j]} \omega_l/df\Big) = C_\mu t^{-\mu},$$

où $1 \leqslant j,\ l \leqslant \mu$, C_μ est une constante non nulle.

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de la formule (7), il suffit de montrer qu'il n'existe aucun polynôme non nul $P = \alpha_1 x + \ldots$ $\ldots + \alpha_\mu x^\mu$ qui prenne des valeurs égales aux points $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\mu+1}$. Il est évident que $P(\varepsilon_1) = \ldots = P(\varepsilon_{\mu+1}) = (P(\varepsilon_1) + \ldots$ $\ldots + P(\varepsilon_{\mu+1}))/(\mu+1) = 0$. Donc $P \equiv 0$.

Corollaire. *On a*

$$\det\Big(\int\limits_{[\Gamma_j]} e^{\tau f}\omega_l\Big) = B_\mu \tau^{-\mu/2},$$

où B_μ est une constante non nulle.

Remarque. Nous montrerons plus loin, à l'aide du lemme 4 et de son corollaire, que pour tout point critique de multiplicité μ il existe des formes $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ qui, après division par la différentielle de la phase, engendrent une base en cohomologie évanescente dans chaque fibre de la fibration de Milnor (voir théorème 1 du § 12).

11.2. Intégrale oscillante comme cas particulier de l'intégrale de la méthode du point selle. Soit une fonction $f\colon (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ holomorphe à l'origine et admettant un point critique à l'origine. Supposons que f prenne des valeurs réelles sur le sous-espace réel $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$. Une telle fonction peut servir de phase tant pour une intégrale oscillante étendue à $\mathbf{R}^n$ que pour une intégrale de la méthode du point selle. Supposons qu'il existe au voisinage de l'origine une n-chaîne permise Γ pour laquelle

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f}\varphi\,dx \approx \int\limits_{\Gamma} e^{i\tau f}\varphi\,dx \tag{8}$$

pour φ quelconque à support contenu dans un voisinage suffisamment restreint de l'origine. Ainsi donc, toute intégrale oscillante est un cas particulier d'une intégrale de la méthode du point selle.

Faisons trois précisions. Premièrement, l'égalité (8) a lieu à un terme près qui décroît plus vite que toute puissance du paramètre τ quand $\tau \to +\infty$. Deuxièmement, la chaîne permise pour une intégrale de phase $i\tau f$ (et non de phase τf comme dans le n° précédent) est une chaîne telle que la partie imaginaire de f est positive sur son bord. Troisièmement, l'amplitude φ doit être définie non seulement sur $\mathbf{R}^n$ mais aussi sur Γ, c'est pourquoi l'égalité (8) a lieu pour des amplitudes de la forme $\psi\theta$, où ψ est une fonction holomorphe et θ une fonction différentiable à support borné contenu dans un voisinage suffisamment petit de l'origine, identiquement égale à 1 dans un voisinage encore plus petit de l'origine.

D'après le théorème 1, le comportement asymptotique de l'intégrale du second membre se définit en termes de structure jordanienne de l'opérateur de monodromie classique du point critique. Il en est donc de même pour le comportement asymptotique de l'intégrale du premier membre. Le fait que l'égalité (8) est établie seulement pour des amplitudes φ analytiques n'a pas d'importance ici (voir le lemme 5 ci-après).

A. Nouvelles définitions. La présence de i dans la phase de l'intégrale (8) nous contraint à modifier la définition de chaîne permise (cette nouvelle définition sera valable jusqu'à la fin de ce n°). Supposons que f admette un point critique de multiplicité finie à l'origine. Reprenons les notations du n° 11.1 A et désignons par S^{+i} le demi-disque $\{t \in S \mid \operatorname{Im} t > 0\}$. Soit X^{+i} l'ensemble $X \cap f^{-1}(S^{+i})$. Une chaîne $\Gamma \subset X$ de dimension n sera appelée *permise* si $\partial\Gamma \subset X^{+i}$. Deux chaînes permises seront dites *équivalentes* si elles définissent une même classe dans $H_n(X, X^{+i})$. L'intégrale $\int_\Gamma e^{i\tau f}\omega$ d'une n-forme holomorphe ω suivant la chaîne permise Γ sera appelée *intégrale de la méthode du point selle*. Les intégrales prises suivant des chaînes équivalentes ont même développement asymptotique pour $\tau \to +\infty$ (lemme 1). Reformulons le théorème 1.

Théorème 2. *Soit ω une n-forme différentielle holomorphe sur X, $[\Gamma] \in H_n(X, X^{+i})$. Alors l'intégrale $\int_{[\Gamma]} e^{i\tau f}\omega$ se développe pour $\tau \to +\infty$ en série asymptotique $\sum a_{k,\alpha}\tau^\alpha (\ln \tau)^k$ qui possède les propriétés énumérées dans le théorème 1.*

B. Théorème 3 (voir [229]). *Supposons que les valeurs de la fonction f soient réelles sur le sous-espace réel. Il existe alors une classe $[\Gamma_{\mathbf{R}}] \in H_n(X, X^{+i})$ (appelée classe réelle) qui possède la propriété*

suivante. Soit $\theta: \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$ *une fonction indéfiniment différentiable à support dans* X, *identiquement égale à* 1 *au voisinage de l'origine. On a alors pour toute fonction holomorphe* $\varphi: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f}\varphi\theta\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \approx \int_{[\Gamma_\mathbf{R}]} e^{i\tau f}\varphi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

à un terme de l'ordre de $o(\tau^{-N})$ *près pour* N *quelconque quand* $\tau \to +\infty$.

Corollaire des théorèmes 2 et 3 (voir le théorème 3 du § 6). *L'intégrale oscillante*

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f}\psi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

se développe en série asymptotique $\sum a_{k,\,\alpha}\tau^{\alpha}(\ln \tau)^k$ *pour* $\tau \to +\infty$ *si l'amplitude est de la forme décrite dans le théorème* 3. *Dans cette série le paramètre* α *parcourt un ensemble fini de progressions arithmétiques ne dépendant que de la phase et composées de nombres rationnels négatifs. Plus exactement, chaque* α *est tel que* $\exp(-2\pi i\alpha)$ *est une valeur propre de l'opérateur de monodromie classique du point critique de la phase considérée comme une fonction holomorphe. Le coefficient* $a_{k,\,\alpha}$ *s'annule chaque fois que l'opérateur de monodromie classique n'a aucun bloc jordanien de valeur propre* $\exp(-2\pi i\alpha)$ *de taille égale ou supérieure à* $k + 1$.

Remarques. 1. Le lemme 5 ci-après permet de remplacer la condition imposée à l'amplitude dans ce corollaire par la condition exigeant que le support de l'amplitude soit contenu dans un voisinage suffisamment restreint de l'origine.

2. Il serait intéressant de décrire toutes les classes réelles $[\Gamma_\mathbf{R}]$ pour les différentes formes réelles d'une même fonction holomorphe f.

Nous avons vu au n° 9.2 un exemple de deux germes équivalents complexes de fonctions analytiques à indices de singularité différents. Les classes réelles correspondant à ces formes réelles sont disposées de façons différentes par rapport aux fonctions linéaires définies par les intégrales de la méthode du point selle sur $H_n(X, X^{+i})$.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 3. Nous allons construire la chaîne $\Gamma_\mathbf{R}$ représentant la classe $[\Gamma_\mathbf{R}]$, puis nous démontrerons le théorème pour $\Gamma_\mathbf{R}$. La chaîne $\Gamma_\mathbf{R}$ est une partie de l'espace réel $\mathbf{R}^n$, située dans X et ayant ses bords rabattus sur X^{+i}. Les bords sont rabattus le long des trajectoires du champ de vecteurs $i \cdot \operatorname{grad} f$.

Avant de préciser la construction, donnons un exemple. Soit $f = x^3$; on voit la chaîne correspondante $\Gamma_\mathbf{R}$ sur la figure 77, *a*.

Choisissons un $r > 0$ suffisamment petit et considérons un champ de vecteurs différentiable ξ sur X qui s'annule pour $|x| < r/4$ et qui a la propriété $\xi(\operatorname{Im} f) \geqslant 0$, $\xi(\operatorname{Im} f) > 0$ pour $x \geqslant r/2$, voir fig. 77, *b*.

Soit B_r l'intersection d'une boule $|x| \leqslant r$ et de $\mathbf{R}^n$. Pour des $s > 0$ suffisamment petits, le difféomorphisme $\exp(s\xi)$ définit dans X un disque $B_r(s) = \exp(s\xi)(B_r)$ dont le bord est dans X^{+i}. Donc

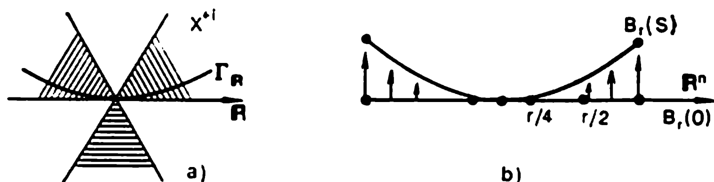


Fig. 77

$B_r(s)$ définit une classe dans $H_n(X, X^{+i})$ qui ne dépend manifestement pas de s. Montrons que le théorème 3 est vérifié pour cette classe.

Nous pouvons supposer que la fonction θ soit à support dans une boule $|x| < 3r/4$ et que $\theta \equiv 1$ sur une boule $|x| \leqslant r/2$ (la variation de θ en dehors de l'origine n'affecte aucunement le développement asymptotique de l'intégrale oscillante).

Maintenant, d'une part. les intégrandes des intégrales

$$\int\limits_{B_r(s)} e^{i\tau f}\varphi\theta\, dx \quad \text{et} \quad \int\limits_{B_r(s)} e^{i\tau f}\varphi\, dx$$

ne diffèrent que sur un compact dans X^{+i}, ce qui veut dire que la différence entre ces deux intégrales est exponentiellement petite. D'autre part,

$$\int\limits_{B_r(s)} e^{i\tau f}\theta\varphi\, dx = \int\limits_{B_r} (\exp(s\xi))^* [e^{i\tau f}\theta\varphi\, dx].$$

Mettons l'intégrande de l'intégrale du second membre sous la forme $e^{i\tau f_s}(\theta\varphi)_s\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Alors pour un $s > 0$ suffisamment petit

a) $\operatorname{Im} f_s \geqslant 0$ sur B_r,

b) f_s est sans points critiques sur $B_r \setminus 0$,

c) $f_s = f$, $(\theta\varphi)_s = \theta\varphi$ sur $B_{r/4}$.

Il découle de a), b), c) que les intégrales $\int\limits_{B_r} e^{i\tau f}\theta\varphi\, dx$ et $\int\limits_{B_r} e^{i\tau f_s}(\theta\varphi)_s\, dx$ diffèrent d'une quantité $o(\tau^{-N})$ pour N quelconque quand $\tau \to +\infty$. Le théorème est démontré.

Prouvons un lemme exprimant les séries asymptotiques de l'intégrale oscillante à amplitude différentiable par celles des intégrales à amplitude se présentant comme indiqué dans le théorème 3.

Lemme 5. *Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ des monômes qui engendrent une base sur* **R** *dans l'algèbre locale* $\mathbf{R}\{x\}/(\partial f/\partial x)$, *et soit la fonction θ la même que dans le théorème 3. Alors, pour toute amplitude différentiable φ à support contenu dans un voisinage suffisamment petit de l'origine, on a pour $\tau \to +\infty$ l'égalité des séries asymptotiques*

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f}\varphi\, dx \approx \sum_{k=1}^{\mu} c_k(\tau^{-1}) \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau f} \varphi_k \theta\, dx,$$

où c_k sont des séries formelles convenables de $1/\tau$.

D é m o n s t r a t i o n. Mettons φ sous la forme

$$\varphi = \sum a^k \varphi_k \theta + \sum h^k\, \partial f/\partial x_k,$$

où les a^k sont des nombres et les h^k des fonctions différentiables à support borné. Alors

$$\int e^{i\tau f}\varphi\, dx = \sum a^k \int e^{i\tau f}\varphi_k \theta\, dx + \frac{1}{i\tau} \int e^{i\tau f} \sum (-1)^{k+1}\, \partial h^k/\partial x_k\, dx.$$

Les $a^1, \ldots, a^\mu$ sont les termes constants des séries $c_1(\tau^{-1}), \ldots$ $\ldots, c_\mu(\tau^{-1})$. En faisant subir à l'intégrale du second membre une transformation analogue à celle subie par l'intégrale initiale, on obtient les coefficients des séries formelles affectant τ^{-1}, et ainsi de suite.

Remarque. On montre dans [275] que les séries $\{c_k(\tau^{-1}) = \sum c_k^j \tau^{-j}\}$, après division du j-ième coefficient par $j!$, deviennent convergentes pour des τ suffisamment grands si l'amplitude est de la forme décrite dans le théorème 3.

C. Indices de singularité des points critiques simples et nombres de Coxeter. On doit à V. Arnold l'observation suivante (voir [9, 11]): les indices d'oscillation des points critiques simples des fonctions différentiables de trois variables s'expriment par la formule

$$\beta = -1 - 1/N,$$

où N est le nombre de Coxeter du groupe correspondant engendré par les réflexions. Le théorème 3 explique l'intervention de N dans cette formule.

Proposition. *Une intégrale oscillante de phase dépendant de trois variables et ayant un point critique simple se développe en série asymptotique $\sum a_\alpha t^\alpha$, où α sont des nombres rationnels de dénominateur égal au nombre de Coxeter du groupe correspondant engendré par les réflexions.*

En effet, dans ce cas l'opérateur de monodromie est la transformation de Coxeter du groupe correspondant (voir théorème 14 du § 3), donc $M^N = \text{Id}$. D'après le théorème 3, les α deviennent entiers après multiplication par N.

11.3. Intégrales oscillantes complexes de phase $f(x) + g(y)$. Les séries asymptotiques des intégrales de phase $f + g$ s'expriment par celles des intégrales de phases f et g, puisque l'exponentielle d'une somme est égale au produit des exponentielles des termes. On peut, en particulier, définir le développement asymptotique des intégrales de phase $x_1^{\mu+1} + \ldots + x_n^{\mu+1}$ à partir du développement asymptotique des intégrales de phase $x_1^{\mu+1}$ (voir n° 11.1, C). Ces expressions procurent une information non triviale sur le comportement asymptotique des intégrales de phase quelconque, car on rencontre un point critique isolé quelconque dans le déploiement versel d'un point critique $x_1^{\mu+1} + \ldots + x_n^{\mu+1}$ (pour un μ suffisamment grand). Cela permet en particulier de démontrer un théorème important : étant donnés un point critique d'une fonction f de multiplicité μ, une collection suffisamment générale $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ de n-formes holomorphes et une base $\delta_1(t), \ldots, \delta_\mu(t)$, dépendant continûment de t, d'homologie entière évanescente au point critique, alors la fonction

$$\det{}^2 \left(\int_{\delta_j(t)} \omega_i / df \right)$$

n'est pas identiquement nulle au voisinage du point $0 \in \mathbf{C}$. Mieux, elle s'annule à l'ordre $\mu(n-2)$ au point 0 (voir théorème 1 du § 12 ; cf. le lemme 4).

A. Théorème de Fubini pour les intégrales oscillantes. Soient $f \colon (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ et $g \colon (\mathbf{C}^l, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ deux fonctions holomorphes à l'origine de leurs espaces respectifs et admettant des points critiques de multiplicité finie à l'origine. Considérons la fonction $f + g \colon (\mathbf{C}^{n+l}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$.

La fonction $f + g$ admet à l'origine un point critique de multiplicité finie égale au produit des multiplicités des points critiques de f et de g. Soient ω une n-forme holomorphe définie au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$ et η une l-forme holomorphe définie au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^l$. Nous allons comparer les comportements asymptotiques des trois intégrales $\int e^{\tau f}\omega$, $\int e^{\tau g}\eta$, $\int e^{\tau(f+g)}\omega \wedge \eta$ en choisissant des chaînes d'intégration permises compatibles.

Soient $\Gamma_1 \subset \mathbf{C}^n$, $\Gamma_2 \subset \mathbf{C}^l$ des chaînes permises pour les points critiques de f et de g respectivement. Supposons que $\operatorname{Re} f|_{\partial\Gamma_1} = \operatorname{Re} g|_{\partial\Gamma_2} = -a$, $a/2 > \operatorname{Re} f|_{\Gamma_1}$, $\operatorname{Re} g|_{\Gamma_2} \geqslant -a$ pour un $a > 0$

suffisamment petit (on peut toujours vérifier cette condition en prenant des chaînes équivalentes). Alors la chaîne $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \subset \mathbf{C}^{n+l}$ est permise pour le point critique de la fonction $f + g$. On remarque sans peine que cette construction définit une application linéaire du produit tensoriel des groupes des classes d'équivalence des chaînes permises pour les points critiques des fonctions f, g dans le groupe des classes d'équivalence des chaînes permises pour le point critique de la fonction $f + g$. On montre (voir [312] et aussi le théorème 9 du § 2) que cette application est un isomorphisme.

Remarque. La démonstration citée dans [312] est de nature topologique. On obtient une autre démonstration en faisant intervenir le théorème du déterminant formulé au commencement du nº 11.3 (voir nº 13.3, E, ainsi que le corollaire 1 du lemme 6).

Théorème 4 (voir [229]). *On a*

$$\int\limits_{\Gamma_1\times\Gamma_2} e^{\tau(f+g)}\omega \wedge \eta = \int\limits_{\Gamma_1} e^{\tau f}\omega \int\limits_{\Gamma_2} e^{\tau g}\eta.$$

Le théorème 4 est une conséquence directe du théorème de Fubini.

Corollaire. *La série asymptotique de l'intégrale du premier membre est le produit des séries asymptotiques des intégrales du second membre.*

C. Intégrales de phase $f = x_1^{\mu+1} + \ldots + x_n^{\mu+1}$ (exemple d'application du théorème 4). La multiplicité du point critique de la fonction $x_1^{\mu+1} + \ldots + x_n^{\mu+1}$ est égale à μ^n. Construisons μ^n chaînes $\Gamma_{j_1 \ldots j_n}$ de dimension n ($1 \leqslant j_1, \ldots, j_n \leqslant \mu$) permises pour ce point critique.

A chacune des chaînes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\mu \subset \mathbf{C}$ indiquées au nº 11.1, C et permises pour le point critique de $x^{\mu+1}$, substituons une chaîne équivalente de façon à avoir $x^{\mu+1}|_{\partial\Gamma_j} = -1$, $1/n > \operatorname{Re} x^{\mu+1}|_{\Gamma_j} \geqslant -1$. Supposons que la chaîne $\Gamma_{j_1, \ldots, j_n} \subset \mathbf{C}^n$ soit égale à $\Gamma_{j_1} \times \Gamma_{j_2} \ldots$ $\ldots \times \Gamma_{j_\mu}$. On voit sans peine que la chaîne $\Gamma_{j_1, \ldots, j_\mu}$ est permise pour le point critique de $x_1^{\mu+1} + \ldots + x_n^{\mu+1}$.

Désignons par ω_j, avec $j = (j_1, \ldots, j_n)$, la forme $x_1^{j_1-1} \ldots$ $\ldots x_n^{j_n-1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Soit J l'ensemble des indices $j =$ $= (j_1, \ldots, j_n)$ tels que $1 \leqslant j_1, \ldots, j_n \leqslant \mu$.

Lemme 6. 1. *On a pour tous* j, $l \in J$

$$\int\limits_{[\Gamma_j]} e^{\tau f}\omega_l = \tau^{r_l}(\mu+1)^{-n} \prod_{k=1}^{\mu} (\varepsilon_{j_k+1}^{l_k} - \varepsilon_{j_k}^{l_k})\, \Gamma\left(\frac{l_k}{\mu+1}\right),$$

où $r^l = -(l_1 + \ldots + l_n)/(\mu + 1)$; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\mu+1}$ *sont les racines de l'équation* $x^{\mu+1} = -1$ (voir nº 11.1, C), $\Gamma(\cdot)$ *est la fonction gamma.*

2. *On a*

$$\det \Big(\int\limits_{[\Gamma_j]} e^{\tau f} \omega_l \Big) = (\beta_\mu)^{n\mu^{n-1}} \tau^{-n\mu^n/2},$$

où j, $l \in J$; B_μ *est une constante non nulle* (voir corollaire du lemme 4).

Le lemme 6 est une conséquence évidente du théorème 4 et des lemmes 3, 4.

Remarque. Une intégrale de phase $x_1^{\mu+1} + \ldots + x_n^{\mu+1}$ d'une forme ω quelconque se laisse réduire, au moyen de l'intégration par parties, à une combinaison linéaire d'intégrales de même phase des formes ω_l, $l \in J$ (voir lemme 5).

Corollaire 1. *Les chaînes* Γ_j, $j \in J$, *engendrent une base dans le groupe des classes d'équivalence des chaînes permises pour le point critique de la fonction* $x_1^{\mu+1} + \ldots + x_n^{\mu+1}$.

En effet, ces chaînes sont linéairement indépendantes (p. 2 du lemme 6) et leur nombre est égal à la multiplicité du point critique.

Corollaire 2. *On a*

$$\det{}^2 \Big(\int\limits_{\partial_t [\Gamma_j]} \omega_l / df \Big) = C_\mu t^{\mu^n (n-2)},$$

où C_μ *est une constante non nulle.*

Le corollaire 2 découle avec évidence du lemme 6 et de la formule (6), page 246.

Remarques. 1. On voit sans peine que le corollaire 2 appliqué au point critique de $x_1^{\mu+1} + \ldots + x_n^{\mu+1}$ est équivalent à l'assertion du théorème du déterminant formulé au début du nº 11.3.

2. Le lemme 6 et ses corollaires s'étendent sans difficulté au cas du point critique de la fonction $x_1^{a_1} + \ldots + x_n^{a_n}$.

§ 12. Intégrales et équations différentielles

Dans ce paragraphe nous montrerons que les fonctions multiformes définies par les intégrales d'une forme différentielle holomorphe suivant des classes de familles d'homologie continues, évanescentes au point critique de la fonction holomorphe épuisent les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène dont l'ordre n'est pas supérieur à la multiplicité du point critique. L'analyse de ce phénomène conduit à la notion de connexion de Gauss-Manin dans une fibration de (co)homologies évanescentes associée à la fibration de Milnor du point critique.

Nous démontrons d'abord le théorème du déterminant, d'où il découle, en particulier, l'existence de n-formes différentielles holo-

morphes dans $\mathbf{C}^n$ qui, après division par la différentielle de la fonction, engendrent une base de cohomologie dans chaque fibre de la fibration de Milnor du point critique de la fonction, puis la proposition sur l'équation différentielle formulée plus haut. A la fin du paragraphe nous étudions la connexion de Gauss-Manin.

Nous introduisons la notion de singularité de Picard-Fuchs d'un point critique de multiplicité finie d'une fonction holomorphe (nº 12.2), ainsi que les notions de fibration de Milnor de (co)homologie, de section covariante constante de la fibration de (co)homologie, de section géométrique de la fibration de cohomologie (nº 12.3).

12.1. Théorème du déterminant. Ce nº est construit autour du théorème 1 énoncé ci-dessous; il représente un des résultats fondamentaux sur les intégrales.

Soit un germe $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ de fonction holomorphe avec un point critique de multiplicité μ. Considérons une spécialisation $f: X \to S$ du germe $\mathfrak{f}$ et la fibration de Milnor associée à f (voir page 233). Choisissons dans les fibres de la fibration de Milnor des bases d'homologie entière δ de dimension $(n - 1)$ dépendant continûment du point de S. La base δ dans la fibre au-dessus d'un point t de S sera notée $\delta_1(t), \ldots, \delta_\mu(t)$. (Notons que δ est une fonction multiforme du point de S.) Considérons une collection quelconque de μ n-formes différentielles holomorphes $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ définies au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$. Supposons que l'espace X soit contenu dans le voisinage de définition des formes. Proposons-nous d'étudier les propriétés de la fonction

$$\det{}^2: t \mapsto \det{}^2 \left(\int\limits_{\delta_j(t)} \omega_l/df \right), \quad j, l = 1, \ldots, \mu.$$

Théorème 1 (voir [354]). 1. *La fonction* $\det^2$ *est uniforme au voisinage de* $t = 0$.

2. *La fonction* $\det^2$ *s'annule pour* $t = 0$ *à un ordre non inférieur à* $\mu (n - 2)$ (*en particulier, si* $n > 1$, *la fonction* $\det^2$ *est holomorphe pour* $t = 0$).

3. *Si la collection de formes est suffisamment générale* (*les jets finis des formes en* $0 \in \mathbf{C}^n$ *ne vérifient pas une relation analytique complexe déterminée*), *alors, pour* $t = 0$, *la fonction* $\det^2$ *s'annule à l'ordre* $\mu (n - 2)$.

Définitions. 1. Une collection de formes $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ est appelée *trivialisation* si, pour une (donc pour toute) famille de bases $\delta_1, \ldots, \delta_\mu$, la fonction $\det^2$ n'est pas identiquement nulle.

2. Une collection de formes $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ est appelée *trivialisation de base* si, pour une (donc pour toute) famille de bases $\delta_1, \ldots, \delta_\mu$, la fonction $\det^2$ s'annule à l'ordre $\mu (n - 2)$ pour $t = 0$.

Corollaire du théorème 1. *Tout point critique de multiplicité finie d'une fonction holomorphe admet une trivialisation; mieux, il admet une trivialisation de base.*

Remarques. 1. La première démonstration de l'existence d'une trivialisation est donnée dans [52], elle s'appuie sur les théorèmes (A), (B) de H. Cartan.

2. Dans le n° 12.3 nous définissons la fibration de cohomologie de Milnor du point critique. C'est une fibration vectorielle dont la base se confond avec celle de la fibration de Milnor ordinaire. Elle a comme fibres les espaces vectoriels de classes de cohomologie des fibres de la fibration de Milnor ordinaire. La collection de formes appelée trivialisation (voir définition ci-dessus) définit une trivialisation de la fibration de cohomologie de Milnor au-dessus du voisinage du point $t = 0$.

3. La notion de trivialisation ne dépend pas du choix de la spécialisation du germe (voir n° 10.3, A et remarque 3 au n° 10.3, B).

4. On exhibe dans le corollaire 2 du lemme 6, § 11, une collection de formes qui est une trivialisation de base pour le point critique de la fonction $x_1^N + \ldots + x_n^N$. Le théorème 1 découle de l'existence d'une trivialisation de base pour le point critique en question. Voir la démonstration du théorème aux n°s 12.1, C et 12.1, E. Dans les n°s 12.1, A et 12.1, B nous démontrons des propositions auxiliaires relatives à la fonction det^2.

Avant de passer à la démonstration du théorème 1, formulons les propriétés des trivialisations.

I. Si $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ est une trivialisation, les formes de Gelfand-Leray $\omega_1/df, \ldots, \omega_\mu/df$ engendrent des bases de cohomologie de dimension $(n-1)$ à coefficients complexes dans toutes les fibres de la fibration de Milnor du point critique 0 de f situées au-dessus d'un voisinage suffisamment petit de $t = 0$.

II. Soient $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_\mu$ des n-formes différentielles holomorphes définies au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$. Si $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ est une trivialisation, alors, dans un voisinage pointé suffisamment petit de $t = 0$, existent des fonctions holomorphes uniques $p_1, \ldots$ $\ldots, p_\mu$ telles que

$$\int_{\delta(t)} \omega/df \equiv \sum_j p_j(t) \int_{\delta(t)} \omega_j/df$$

pour toute famille continue δ de classes d'homologie entières de dimension $(n-1)$ dans les fibres de la fibration de Milnor du point critique 0 de la fonction f. Si de plus $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ est une trivialisation de base, les fonctions $p_1, \ldots, p_\mu$ admettent des prolongements holomorphes en $t = 0$.

La propriété I étant évidente, démontrons la propriété II. Prenant comme δ les familles $\delta_1, \ldots, \delta_\mu$ qui engendrent des bases

d'homologie dans les fibres de la fibration de Milnor, on obtient un système d'équations linéaires pour $p_1, \ldots, p_\mu$. Son déterminant est non nul par définition d'une trivialisation. Résolvant le système par la règle de Cramer, on obtient les fonctions cherchées sous forme de quotients de paires de déterminants. Chaque quotient est holomorphe pour $t = 0$ si $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ est une trivialisation de base.

A. Propriétés élémentaires de la fonction det². La fonction det² sera considérée non pas sur la base de la fibration de Milnor d'un point critique, mais sur la base de la fibration de Milnor d'un déploiement versel de ce point critique, ce qui est plus commode.

Soit $\mathfrak{F}: (\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k, 0 \times 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un déploiement versel du germe $\mathfrak{f}$. Considérons la spécialisation $G: X \to S$ du développement du déploiement et la fibration de Milnor correspondante $G: X' \to S'$ (pour les notations et les définitions, voir nº 10.3, A et fig. 73). Choisissons, dans les fibres de la fibration de Milnor, des bases d'homologie entière de dimension $(n-1)$ dépendant continûment des points de S'. La base dans la fibre au-dessus du point $s \in S'$ sera notée $\delta_1(s), \ldots, \delta_\mu(s)$. Soient $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ des n-formes différentielles holomorphes sur X. Soit $F: X \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe représentant $\mathfrak{F}$. Les formes $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ définissent sur chaque fibre de la fibration de Milnor des $(n-1)$-formes différentielles holomorphes $\omega_1/d_xF, \ldots, \omega_\mu/d_xF$ (on fait la restriction des $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ à des sous-espaces du type $\mathbf{C}^n \times y$, puis on divise par d_xF). Considérons sur S' la fonction

$$\det{}^2 : s \mapsto \det{}^2 \left(\int\limits_{\delta_j(s)} \omega_l/d_xF \right), \quad j, l = 1, \ldots, \mu.$$

Lemme 1. *La fonction* det² *est uniforme et holomorphe.*

D é m o n s t r a t i o n. Chaque élément de la matrice est une fonction holomorphe multiforme sur S' (théorème 5 du § 10). Le prolongement analytique le long d'un chemin fermé fait multiplier la valeur de det² par le carré du déterminant de l'opérateur de monodromie en homologie. L'opérateur de monodromie est non dégénéré et entier ainsi que son inverse. Par conséquent, le carré de son déterminant est égal à 1, d'où il découle que det² est une fonction uniforme.

Remarque. Pour n pair, déjà la fonction det est uniforme et holomorphe. Il suffit de vérifier l'uniformité en faisant le prolongement analytique le long d'un petit chemin autour d'un point non singulier du discrminant dans la base du déploiement versel. Le déterminant de la transformation de monodromie correspondante est égal à celui de la transformation de Picard-Lefschetz; or, celui-ci est égal à 1 pour n pair.

D'après les définitions du nº 10.3, A, la base S' de la fibration de Milnor est le complémentaire d'une hypersurface dans le produit

de boules $S = B^1_\eta \times B^k_\rho$. La différence $\Sigma = S \setminus S'$ est appelée *discriminant.*

Théorème 2 (voir [354]). *La fonction* $\det^2$ *est méromorphe à l'origine de S; mieux, elle se laisse mettre sous la forme* gh^{n-2}, *où g, h sont deux fonctions sur S holomorphes à l'origine, h étant la fonction dont les zéros définissent le discriminant (sans multiplicités).*

D é m o n s t r a t i o n. On a des coordonnées sur S: les paramètres du déploiement $y \in B^k_\rho$ et les valeurs $u \in B^1_\eta$ de F. Pour un y donné, la droite des valeurs coupe le discriminant en μ points (compte tenu des multiplicités). Quand la coordonnée y a une valeur générale, la droite des valeurs coupe le discriminant en μ points non singuliers distincts. Il suffit de montrer que la fonction $\det^2/h^{n-2}$ est holomorphe au voisinage de tels points non singuliers du discriminant, car, en vertu du théorème de désingularisation de la fonction, elle est alors holomorphe en tout point de S. Le fait que la fonction soit holomorphe au voisinage d'un point non singulier du discriminant se démontre par calcul explicite des intégrales suivant un cycle évanescent dans un point critique non dégénéré (voir l'exemple dans le nº 10.3, p. 239).

Soit donc $s_0 = (u_0, y_0)$ un point non singulier du discriminant au voisinage duquel le discriminant est le graphe de la fonction $u = u(y)$. Une fonction $F(\cdot, y)$ admet un point critique de valeur critique $u(y)$ dans $X \cap (\mathbf{C}^n \times y)$, et ce point critique est non dégénéré. Considérons l'opérateur de monodromie M sur un petit lacet autour du point $(u(y), y)$ situé sur la droite des valeurs. C'est l'opérateur de Picard-Lefschetz de la « réflexion » dans la classe d'homologie d'un cycle évanescent pour $s \to s_0$. Utilisant l'opérateur de monodromie, faisons un changement linéaire sur $\mathbf{R}$ de toutes les bases $\delta_1(s), \ldots, \delta_\mu(s)$ à la fois pour tous les s situés dans un petit voisinage de s_0 (ce qui revient à multiplier $\det^2$ par un nombre égal au carré du déterminant du changement). Si n est impair, M admet un sous-espace de dimension $(\mu - 1)$ de vecteurs invariants et un sous-espace de dimension 1 de vecteurs anti-invariants engendré par la classe du cycle évanescent pour $s \to s_0$. Comme nouvelle base, prenons $\delta_1(s), \ldots, \delta_\mu(s)$, où $\delta_1(s)$ est la classe du cycle évanescent pour $s \to s_0$ et les $\delta_2(s), \ldots, \delta_\mu(s)$ sont des classes quelconques formant une base de classes invariantes. Si n est pair, toutes les valeurs propres de l'opérateur M sont égales à 1, si bien que le sous-espace des vecteurs invariants est de dimension $(\mu - 1)$. Prenons comme nouvelle base $\delta_1(s), \ldots, \delta_\mu(s)$, où $\delta_1(s)$ est la classe du cycle évanescent pour $s \to s_0$, $\delta_2(s)$ une classe d'homologie quelconque dont l'indice d'intersection avec $\delta_1(s)$ est égal à 1, et $\delta_3(s), \ldots, \delta_\mu(s)$ des classes quelconques qui forment avec $\delta_1(s)$ une base de classes invariantes.

Maintenant le théorème 2 résulte du lemme 2:

Lemme 2. *Soit* ω *une* n*-forme différentielle holomorphe définie au voisinage de l'origine de* $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$; *supposons que ce voisinage contienne l'espace* X. *Si* n *est impair, on a au voisinage de* $s_0 \in \Sigma$ *les développements*

$$\int_{\delta_1(u,\, y)} \omega/d_xF = (u - u(y))^{n/2-1} P_1(u,\, y), \tag{1}$$

$$\int_{\delta_j(u,\, y)} \omega/d_xF = P_j(u,\, y), \quad j = 2,\, \ldots,\, \mu, \tag{2}$$

où $P_1, \ldots, P_\mu$ *sont des fonctions holomorphes en* s_0. *Si* n *est pair, on a au voisinage de* $s_0 \in \Sigma$ *le développement* (1), *le développement* (2) *pour* $j = 3, \ldots, \mu$, *ainsi que le développement*

$$\int_{\delta_2(u,\, y)} \omega/d_xF = \pm (u - u(y))^{n/2-1} \frac{\ln (u - u(y))}{2\pi i} P_1(u,\, y) + P_2(u,\, y), \tag{3}$$

où $P_1, \ldots, P_\mu$ *sont des fonctions holomorphes en* s_0.

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. La restriction de ω à un sous-espace du type $\mathbf{C}^n \times y$ est fermée. D'après le lemme de Poincaré, il existe au voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$ une $(n - 1)$-forme holomorphe ψ telle que la restriction de la différentielle de ψ à tout sous-espace du type $\mathbf{C}^n \times y$ se confond avec la restriction de ω. D'après la formule (3) de la page 231,

$$\int_{\delta_j(u,\, y)} \omega/d_xF = \frac{\partial}{\partial u} \int_{\delta_j(u,\, y)} \psi. \tag{4}$$

Si le cycle δ_j est invariant par M, alors, au voisinage du point s_0, l'intégrale de ψ suivant $\delta_j(u,\, y)$ est une fonction uniforme et holomorphe de $(u,\, y) \in S \setminus \Sigma$. D'après le théorème 7 du § 10, cette intégrale admet une limite finie pour $u \to u(y)$ le long de la droite $y =$ = Cte. Elle admet donc au voisinage de s_0 un prolongement holomorphe à Σ. Par conséquent, sa dérivée (4) admet elle aussi un prolongement holomorphe à Σ. Le lemme est démontré pour $j = 3$, $4, \ldots, \mu$ et pour $j = 2$ avec n impair.

Quitte à faire un changement holomorphe de variables $x =$ $= x(z,\, y)$, on ramène la fonction $F(\cdot,\, y)$ au voisinage d'un point critique non dégénéré de valeur critique $u(y)$ à la forme $z_1^2 + \ldots$ $\ldots + z_n^2 + u(y)$. Profitant du calcul fait dans l'exemple du n° 10.3, D de la page 239, on obtient dans ces coordonnées

$$\int_{\delta_1(u,\, y)} \psi = (u - u(y))^{n/2} Q(u,\, y), \tag{5}$$

où Q est une fonction holomorphe. Compte tenu de (4), le lemme est alors démontré pour $j = 1$.

Des formules de Picard-Lefschetz il ressort que pour n pair on a

$$\int_{\delta_2(u,\,y)} \psi = \pm \frac{\ln (u - u(y))}{2\pi i} \int_{\delta_1(u,\,y)} \psi + P(u,\,y), \tag{6}$$

où P est une fonction uniforme au voisinage du point s_0 (on choisit le signe + ou — selon la parité de $n/2$). Comme précédemment, P admet un prolongement holomorphe à Σ. Le lemme vaut donc pour $j = 2$ avec n pair. Le lemme 2 et le théorème 2 sont démontrés.

Corollaire 1 du théorème 2. *Soient* $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ *des n-formes différentielles holomorphes sur X. Supposons que la restriction de la fonction*

$$\det{}^2 : s \mapsto \det{}^2 \left(\int_{\delta_j(s)} \omega_l / d_x F \right), \quad j = 1, \ldots, \mu,$$

à la droite $y = 0$ *s'annule à l'ordre* $\mu\,(n - 2)$ *à l'origine. La fonction* $\det^2$ *peut s'écrire alors*

$$\det{}^2 = g h^{n-2},$$

où g est une fonction holomorphe sur S non nulle au point $s = 0$, *et h une fonction holomorphe sur S dont les zéros définissent le discriminant (sans multiplicités). Mieux, les formes* $\omega_1/d_xF, \ldots, \omega_\mu/d_xF$ *engendrent alors des bases de cohomologie de dimension* $(n - 1)$ *dans toutes les fibres de la fibration de Milnor du déploiement versel situées au-dessus des points de S suffisamment voisins de* $s = 0$.

En effet, l'intersection de la droite $y = 0$ avec le discriminant au point $s = 0$ est de multiplicité μ. Donc, la restriction à la droite $y = 0$ de toute fonction définissant le discriminant sans multiplicités s'annule à l'ordre μ à l'origine. D'après le théorème 2, le quotient de la fonction $\det^2$ par la puissance $(n-2)$-ième de la fonction définissant le discriminant est inversible à l'origine. La seconde partie du corollaire est évidente.

Remarque. L'existence d'une collection de formes $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ telle que la restriction de $\det^2$ à la droite $y = 0$ s'annule à l'ordre $\mu\,(n - 2)$ à l'origine est démontrée au n° 12.1, E.

Corollaire 2 du théorème 2. *Soient* $\omega_1, \ldots, \omega_\mu, \omega$ *des n-formes différentielles holomorphes sur X. Supposons que la restriction de la fonction*

$$\det{}^2 : s \mapsto \det{}^2 \left(\int_{\delta_j(s)} \omega_l / d_x F \right), \quad j = 1, \ldots, \mu,$$

à la droite $y = 0$ *s'annule à l'ordre* $\mu\,(n - 2)$ *à l'origine. Il existe alors, au voisinage de l'origine de S, des fonctions holomorphes (uni-*

ques) $p_1, \ldots, p_\mu$ *telles que*

$$\int_{\delta(s)} \omega/d_xF = \sum_j p_j(s) \int_{\delta(s)} \omega_j/d_xF$$

pour toute famille δ *d'homologie entière de dimension* $(n - 1)$ *dans les fibres de la fibration de Milnor du déploiement versel.*

Voir la démonstration du corollaire 2 du théorème 1.

B. Coefficients du développement en série de l'intégrale d'une forme suivant les classes de familles d'homologie évanescentes. Ces coefficients ne dépendent que du jet fini de cette forme et sont chacun une fonction holomorphe du jet. Plus exactement, on a le lemme que nous allons énoncer.

Soit $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ une fonction holomorphe à l'origine et ayant un point critique de multiplicité finie à l'origine. Soit $\omega = g\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ une n-forme différentielle holomorphe à l'origine. Soit $\delta(t) \in H_{n-1}(X_t, \mathbf{Z})$ une classe d'homologie dépendant continûment d'un paramètre dans la fibre X_t de la fibration de Milnor du point critique 0 de la fonction f. D'après le théorème 8 du § 10, il existe dans chaque secteur d'un petit voisinage de $t = 0$ un développement

$$\int_{\delta(t)} \omega/df = \sum_{k, \alpha} a_{k, \alpha} t^\alpha (\ln t)^k, \tag{7}$$

où les α ne dépendent que de f et ne dépendent pas de ω, δ.

Lemme 3. *Pour* k, α *quelconques le coefficient* $a_{k,\alpha}$ *ne dépend que du jet fini de* g *en* $0 \in \mathbf{C}^n$ *et est une fonction holomorphe de ce jet.*

Corollaire. *Chaque coefficient de la série de Laurent au point* $t = 0$ *de la fonction* det² *du théorème* 1 *ne dépend que des jets finis des formes* $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ *en* $0 \in \mathbf{C}^n$ *et est une fonction holomorphe de ces jets.*

D é m o n s t r a t i o n du l e m m e. Soit J_f un idéal dans $\mathbf{C}\langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle\rangle$ engendré par les fonctions $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$. Soit un entier naturel N. Pour démontrer la première partie du lemme, il suffit de montrer que pour $g \in (J_f)^{2N}$ tout exposant α dans la série (7) est plus grand que $N - 1$. Ici $(J_f)^{2N}$ est l'idéal engendré par les produits $2N$-uples des éléments de J_f. En effet, J_f contient une certaine puissance de l'idéal maximal (car le point critique est de multiplicité finie). Aussi $(J_f)^{2N}$ contient-il lui aussi une certaine puissance de l'idéal maximal. Pour toute fonction g de cette puissance de l'idéal maximal chaque α de la série (7) est plus grand que $N - 1$.

Montrons que pour $g \in (J_f)^{2N}$ tous les α de (7) sont plus grands que $N - 1$. Raisonnons par récurrence. La proposition est vérifiée pour $N = 0$ (théorème 8 du § 10). Soit $g = \sum h_j\, \partial f/\partial x_j$, où $h_j \in$

$\in (J_f)^{2N-1}$. Alors, d'après la formule (3) de la page 231,

$$\frac{d}{dt}\int_{\delta(t)}\omega/df=\int_{\delta(t)}\sum(-1)^{j+1}\partial h_j/\partial x_j\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n/df,$$

où $\partial h_j/\partial x_j\in(J_f)^{2N-2}$. D'après l'hypothèse de récurrence, le développement en série de l'intégrale du second membre commence par un terme de degré supérieur à $N-2$. Donc, la série de l'intégrale de la forme ω/df commence par un terme de degré plus grand que $N-1$.

La seconde partie du lemme découle naturellement de l'assertion évidente: étant donnée une fonction méromorphe qui dépend holomorphiquement des paramètres, chaque coefficient de sa série de Laurent est une fonction holomorphe des paramètres (voir la démonstration du théorème 2 du § 10).

C. Début de la démonstration du théorème 1. La première et la deuxième partie du théorème sont des conséquences du lemme 1 et du théorème 2. D'après le corollaire du lemme 3, pour prouver la troisième partie du théorème 1, il suffit de démontrer l'existence d'au moins une collection de formes telle que $\det^2$ s'annule à l'origine à un ordre *non supérieur* à $\mu(n-2)$. L'existence se déduit du corollaire 2 du lemme 6, § 11, voir n° 12.1, F. Démontrons d'abord une proposition auxiliaire.

D. Un point critique de multiplicité μ se rencontre dans un déploiement versel du point critique de la fonction $x_1^N+\ldots+x_n^N$ pour $N\geqslant\mu+2$. Plus exactement, on a le

Lemme 4. *Supposons que f: $(\mathbf{C}^n, 0)\to(\mathbf{C}, 0)$ soit une fonction holomorphe à l'origine et ait un point critique de multiplicité μ à l'origine. Alors pour tout $N\geqslant\mu+2$ il existe un polynôme*

$$P(x_1,\ldots,x_n,\ \delta,\ \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=Q(x_1,\ldots,x_n,\ \delta)+\sum_{j=1}^{n}(1+\varepsilon_j)\,x_j^N,$$

tel que

1) *pour $\delta\neq0$ et $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ fixés, la fonction P: $\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}$ et la fonction f sont équivalentes au voisinage de* 0;

2) *on a $Q(x_1,\ldots,x_n,0)\equiv0$;*

3) *il existe des δ, $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ aussi petits en module que l'on veut, tels que l'hypersurface $\{x\in\mathbf{C}^n\mid P(x,\delta,\varepsilon)=0\}$ soit non singulière en tout point sauf à l'origine.*

Corollaire. *Soit $\mathfrak{F}$ un déploiement versel du germe de fonction $x_1^N+\ldots+x_n^N$ à l'origine. Soit Λ le germe de l'ensemble des valeurs des paramètres de $\mathfrak{F}$ telles que $\mathfrak{F}$ possède un seul point critique*

de valeur critique nulle et que ce point critique soit équivalent au point critique 0 *de la fonction* f. *Alors* Λ *est non vide pour* $N \geqslant \mu + 2$.

Le corollaire a toujours lieu, car le déploiement indiqué dans le lemme 4 peut toujours être induit du déploiement versel.

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. Prenons comme Q un polynôme $f_{N+1}(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$, où $f_{N+1}(x_1, \ldots, x_n)$ est le polynôme de Taylor de f de degré $N + 1$ à l'origine. D'après le théorème de la détermination finie (voir Première partie, § 6), toute fonction est équivalente, dans un voisinage de son point critique de multiplicité μ, à son polynôme de Taylor de degré $\mu + 1$. Le p. 1 du lemme est donc démontré. Le p. 2 se démontre par analogie au lemme 1 du § 6.

E. Il existe au moins une collection de formes telle que la fonction $\det^2$ **du théorème 1 s'annule à l'origine à un ordre non supérieur à** $\mu(n-2)$. Une telle collection a été exhibée pour le point critique du type $x_1^N + \ldots + x_n^N$ dans le n° 11.3 C (voir corollaire 2 du lemme 6, § 11). Un point critique quelconque de multiplicité finie se rencontre dans le déploiement versel de points du type $x_1^N + \ldots + x_n^N$. Donc, les fibres de la fibration de Milnor d'un point critique quelconque se plongent dans les fibres de la fibration de Milnor du déploiement versel d'une somme de puissances. Ce plongement induit un plongement monomorphe de classes d'homologie évanescentes. Les formes de la collection exhibée pour la somme de puissances se laissent intégrer suivant les classes d'homologie évanescentes dans le point critique de multiplicité finie en question. Nous nous proposons de montrer qu'on peut prendre comme collection de formes pour le point critique étudié une partie de la collection exhibée pour la somme de puissances. Voyons les choses plus en détails.

Soit $N \geqslant \mu + 2$. Considérons un déploiement versel $\mathfrak{F}$: $(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k, 0 \times 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ du germe à l'origine de la fonction $x_1^N + \ldots + x_n^N$. Considérons une spécialisation $G\colon X \to S$ du développement de $\mathfrak{F}$ et la fibration de Milnor correspondante $G\colon X' \to S'$.

Soit J l'ensemble des multi-indices $j = (j_1, \ldots, j_n)$, où $1 \leqslant j_1, \ldots, j_n \leqslant N$. Le cardinal de J est égal au nombre de Milnor μ' du point critique de la fonction $x_1^N + \ldots + x_n^N$, $\mu' = (N-1)^n$. Considérons sur X des n-formes différentielles holomorphes ω_j, $j \in J$, où $\omega_j = x_1^{j_1-1} \ldots x_n^{j_n-1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Supposons que soit définie, dans les fibres de la fibration de Milnor $G\colon X' \to S'$, une base $\delta_1(s), \ldots, \delta_{\mu'}(s)$ d'homologie entière de dimension $(n-1)$ dépendant continûment du point $s \in S'$. Considérons sur S' la fonction

$$\det{}^2 : s \mapsto \det{}^2 \Big(\int_{\delta_i(s)} \omega_j / d_x F \Big).$$

Conformément au théorème 2, cette fonction est uniforme et holomorphe et est une fonction méromorphe sur $S = S' \cup \Sigma$. D'après le corollaire 2 du lemme 6, § 11 et le corollaire 1 du théorème 2, on peut écrire la fonction $\det^2$ comme $\det^2 = gh^{n-2}$, où g est une fonction holomorphe sur S non nulle au point $s = 0$, et h une fonction holomorphe sur S dont les zéros définissent le discriminant (sans multiplicités).

L'espace S (la base de la spécialisation) est un produit de boules $B^1_\eta \times B^k_\sigma$ (les coordonnées sur B^1_η, B^k_σ étant u et y respectivement). Soit Λ l'ensemble des $y \in B^k_\sigma$ pour lesquels une fonction $F(\cdot, y)$

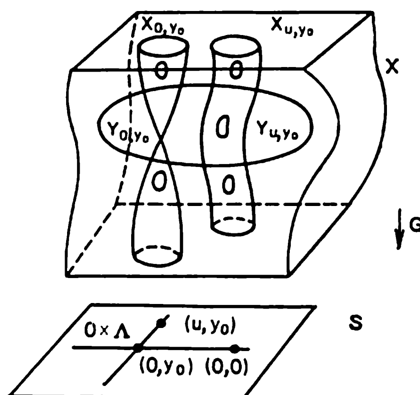


Fig. 78

n'admet sur $X \cap (\mathbf{C}^n \times y)$ qu'un point critique unique de valeur critique 0, ce point étant équivalent au point critique de la fonction f (F est représentant de $\mathfrak{F}$ sur X). D'après le lemme 4, l'ensemble Λ est non vide.

Soit $y_0 \in \Lambda$. Soit (x^0, y_0) le point critique de $F(\cdot, y_0)$ de valeur critique 0. Choisissons un $\rho' > 0$ et désignons par $Y_{(u, y_0)}$ le sous-ensemble des points de la fibre $X_{(u, y_0)}$ de la spécialisation dont la distance de (x^0, y_0) est plus petite que ρ' (fig. 78; comparer avec fig. 73). Si ρ' est suffisamment petit et si $\eta' > 0$ est suffisamment petit par rapport à ρ', alors l'ensemble $\bigcup_u Y_{(u, y_0)}$, $u \neq 0$, $|u| < \eta'$, et la projection naturelle $Y_{(u, y_0)} \mapsto (u, y_0)$ forment la fibration de Milnor du point critique (x^0, y_0) d'une fonction $G(\cdot, y_0): \mathbf{C}^n \times y_0 \to \mathbf{C} \times y_0$. La fibre $Y_{(u, y_0)}$ de cette fibration est homotopiquement équivalente à un bouquet de μ sphères de dimension $(n - 1)$. Le plongement $Y_{(u, y_0)} \hookrightarrow X_{(u, y_0)}$ induit, d'après le théorème 2.1, un monomorphisme de classes d'homologie de dimension $(n - 1)$.

Faisons, sur la droite $y = y_0$, au voisinage du point $(0, y_0)$, un changement linéaire sur **R** de toutes les bases $\delta_1(s), \ldots, \delta_{\mu'}(s)$ à la fois, de telle façon que

1° les μ premiers éléments des bases de la nouvelle famille soient évanescents pour $(u, y_0) \mapsto (0, y_0)$ (i.e. soient des bases d'homologie de dimension $(n - 1)$ des fibres $Y_{(u, y_0)}$ de la fibration de Milnor du point critique (x^0, y_0) de $G(\cdot, y_0)$);

2° les $\mu' - \mu$ derniers éléments des bases de la nouvelle famille appartiennent au sous-espace des racines de valeur propre 1 de l'opérateur de monodromie engendré par le chemin autour de $(0, y_0)$ le long de la droite $y = y_0$.

Une telle base existe, parce que le sous-espace $H_{n-1}(Y_{(u, y_0)}) \subset \subset H_{n-1}(X_{(u, y_0)})$ est invariant par l'opérateur de monodromie indiqué et que l'action de cet opérateur de monodromie sur l'espace quotient est triviale (en effet,

$$H_{n-1}(X_{(u, y_0)})/H_{n-1}(Y_{(u, y_0)}) \simeq H_{n-1}(X_{(0, y_0)})).$$

Considérons la restriction de $\det^2$ à la droite $y = y_0$. Changer la base revient à multiplier la fonction $\det^2$ par le déterminant du changement. La restriction de $\det^2$ s'annule à l'ordre $\mu(n - 2)$ pour $u = 0$. En effet, quand on fait bouger une fonction $F(\cdot, y_0)$, son point critique (x^0, y_0) se sépare en μ points critiques non dégénérés, et la fonction $\det^2$ s'annule à l'ordre $n - 2$ en tout point non singulier du discriminant.

Il s'agit de prouver l'existence, dans la matrice

$$\left(\int_{\delta_l(u, y_0)} \omega_j / d_x F \right), \quad l, j \in J,$$

d'un mineur de taille μ situé dans les μ premières lignes et s'annulant pour $u = 0$ à un ordre non supérieur à $\mu(n - 2)/2$ (les μ premières lignes contiennent les intégrales suivant les μ premiers éléments de la base d'homologie).

L'existence d'un tel mineur résulte des deux remarques suivantes :

1° on a $\det = \sum_I \Delta^I \bar{\Delta}^I$, où $I \subset J$ est un sous-ensemble de μ éléments, Δ^I un mineur de taille μ situé dans les μ premières lignes et dans les colonnes à indices dans I, et $\bar{\Delta}^I$ le complémentaire algébrique de Δ^I ;

2° pour tout I, le mineur $\bar{\Delta}^I$ se développe en série suivant les puissances du paramètre u et suivant les puissances du logarithme de u, toutes les puissances de u dans cette série étant non négatives.

La première remarque constitue le théorème du développement du déterminant suivant les mineurs des μ premières lignes. La seconde

remarque résulte du théorème 6, § 10, et de la formule (3) de la page 231, en raison du choix des $\mu' - \mu$ derniers éléments de la base d'homologie.

Le théorème 1 est démontré.

12.2. L'intégrale est solution d'une équation différentielle linéaire ordinaire homogène avec un point singulier régulier.

A. Intégrales d'une forme unique.

Théorème 3. *Soit* $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ *une fonction holomorphe à l'origine, avec un point critique de multiplicité finie à l'origine. Soit* ω *une n-forme différentielle holomorphe définie au voisinage de l'origine de* $\mathbf{C}^n$. *Existent alors et sont uniques, dans un voisinage pointé suffisamment restreint de* $0 \in \mathbf{C}$, *des fonctions holomorphes* $p_1, \ldots, p_l$ *telles que l'équation différentielle ordinaire*

$$I^{(l)} + p_1 I^{(l-1)} + \ldots + p_l I = 0 \qquad (8)$$

possède la propriété suivante: toute solution de (8) *est une combinaison linéaire de fonctions multiformes holomorphes de type*

$$I(t) = \int_{\delta(t)} \omega/df, \qquad (9)$$

où δ *est une famille continue quelconque de classes d'homologie entières de dimension* $(n-1)$ *dans les fibres de la fibration de Milnor du point critique* 0 *de* f.

Définition. L'équation (8) est appelée *équation de Picard-Fuchs* de la forme ω.

Exemple. Soit f un polynôme quasi homogène de type $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, de poids 1. Soit ω une n-forme différentielle polynomiale quasi homogène de type $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, de poids r. Cela signifie que, par rapport aux homothéties

$$g_\lambda : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\lambda^{\alpha_1} x_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n} x_n), \quad \lambda \in \mathbf{C},$$

le polynôme f et la forme ω possèdent les propriétés

$$f \circ g_\lambda = \lambda f, \quad g_\lambda^* \omega = \lambda^r \omega.$$

Supposons que f ait un point critique isolé à l'origine et qu'il existe au moins une classe d'homologie évanescente au point critique de f telle que l'intégrale de ω suivant cette classe soit non nulle. Alors

$$dI/dt = (r-1)\, I/t$$

est l'équation de Picard-Fuchs de ω. En particulier, pour $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, l'équation

$$dI/dt = (n/2 - 1)\, I/t$$

est l'équation de Picard-Fuchs de la forme $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. En effet, $g_\lambda^* (\omega/df) = \lambda^{r-1}\omega/df$. Les homothéties g_λ induisent un isomorphisme des classes d'homologie des fibres de la fibration de Milnor. Toutes les intégrales de la forme ω/df sont donc de type $\mathrm{Cte}\cdot t^{r-1}$.

Remarque. On montre (à l'aide du corollaire 1 du théorème du déterminant) que l'ordre de l'équation de Picard-Fuchs de toute forme suffisamment générale est égal à la multiplicité du point critique.

D é m o n s t r a t i o n du t h é o r è m e. Soit $\delta_1(t), \ldots$ $\ldots, \delta_\mu(t)$ une base d'homologie entière de dimension $(n-1)$ dépendant continûment de t dans la fibre de la fibration de Milnor du point critique de la fonction f. Considérons une fonction vectorielle multiforme

$$I(t) = \Big(\int\limits_{\delta_1(t)} \omega/df, \ldots, \int\limits_{\delta_\mu(t)} \omega/df \Big).$$

Pour k entier naturel quelconque, désignons par $L_k(t) \subset \mathbf{C}^\mu$ le sous-espace engendré par les vecteurs $I(t)$, $I^{(1)}(t), \ldots, I^{(k)}(t)$. Le sous-espace $L_k(t)$ dépend du choix de l'argument de t. Or, sa dimension est indépendante du choix de l'argument de t (changer l'argument revient à multiplier tous les vecteurs par l'opérateur de monodromie). Les sous-espaces $L_k(t)$ ont même dimension pour tout t suffisamment petit en module. En effet, la dimension d'un sous-espace est la taille du plus grand mineur non nul de la matrice dont les éléments sont les coordonnées des vecteurs engendrant le sous-espace. D'après le théorème 8 du § 10, les mineurs de la matrice composée des coordonnées des vecteurs I, $I^{(1)}, \ldots, I^{(k)}$ se développent en séries au voisinage de $t = 0$. Donc, si un mineur n'est pas identiquement nul, il ne s'annule pas dans un voisinage pointé suffisamment restreint de $t = 0$. Soit maintenant l le plus petit entier pour lequel le vecteur $I^{(l)}(t)$ est une combinaison linéaire de vecteurs $I(t)$, $I^{(1)}(t), \ldots, I^{(l-1)}(t)$ pour tout t suffisamment petit en module. Il vient

$$I^{(l)}(t) + p_1(t)\, I^{(l-1)}(t) + \ldots + p_l(t)\, I(t) = 0, \tag{10}$$

où les $p_1, \ldots, p_l$ sont des fonctions holomorphes dans un voisinage pointé de 0. Ce sont des fonctions uniformes, car changer l'argument de t revient à multiplier la fonction I et ses dérivées par l'opérateur de monodromie. Par construction, chaque coordonnée de I est solution de l'équation (10), et les combinaisons linéaires des coordonnées engendrent l'espace des solutions de dimension l. Le théorème est démontré.

Corollaire. *L'ordre de l'équation différentielle* (8) *est non supérieur à la multiplicité du point critique* 0 *de la fonction* f.

Définition. Soit $I^{(l)} + p_1 I^{(l-1)} + \ldots + p_l I = 0$ l'équation différentielle à coefficients holomorphes définis dans un voisinage pointé de $t = 0$. On dit que le point $t = 0$ est un *point singulier* de l'équation si un au moins des coefficients est sans prolongement holomorphe en $t = 0$. On dit que $t = 0$ est un *point singulier régulier* de l'équation si le point $t = 0$ est singulier et si tout coefficient de l'équation se laisse écrire $p_j = P_j/t^j$, $j = 1, \ldots, l$, où les fonctions $P_1, \ldots, P_l$ sont holomorphes en $t = 0$.

Exemple. Soient f, ω les mêmes que dans l'exemple précédent. L'équation de Picard-Fuchs de ω a pour $t = 0$ un point non singulier si $r = 1$ et un point singulier régulier si $r \neq 1$.

Théorème 4 (voir [77]). *Pour que le point singulier $t = 0$ soit un point singulier régulier de l'équation différentielle $I^{(l)} + p_1 I^{(l-1)} + \ldots$ $\ldots + p_l I = 0$, il faut et il suffit qu'une solution arbitraire de cette équation dans un secteur quelconque $a < \arg t < b$ ne croisse pas pour $t \to 0$ plus vite que de façon exponentielle: $I(t) = o(t^{-N})$ pour un certain N.*

Corollaire. *Pour l'équation de Picard-Fuchs d'une forme différentielle holomorphe* (voir (8)) *le point $t = 0$ est ou bien non singulier, ou bien singulier régulier.*

En effet, voir le théorème 7 du § 10.

Idée de la démonstration de la suffisance. On procède par récurrence sur l. Pour $l = 1$ le théorème est vérifié, car $I = \mathrm{Cte}\cdot e^{-\int p_1 dt}$. Supposons que la suffisance soit démontrée pour $l = m$; démontrons-la pour $l = m + 1$. Premièrement, l'équation initiale a une solution du type $I_0(t) = t^\alpha \varphi(t)$, où $\alpha \in \mathbf{C}$ et φ est une fonction holomorphe pour $t = 0$. En effet, si $I_1, \ldots, I_{m+1}$ est le système fondamental de solutions, on peut prendre comme I_0 le vecteur propre $\sum c_j I_j$ de la transformation de monodromie des solutions (α et la valeur propre λ sont liés par la relation $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$). Deuxièmement, $t^j I_0^{(j)}/I_0$ est une fonction holomorphe pour j quelconque. Troisièmement, quitte à faire le changement $I = I_0 \int J\, dt$, on ramène l'équation donnée à une équation linéaire homogène d'ordre m. Les coefficients de cette nouvelle équation se définissent explicitement à partir des coefficients de l'équation initiale et des expressions du type $I_0^{(j)}/I_0$. Par hypothèse de récurrence, la nouvelle équation a un point singulier régulier. Revenant à l'équation initiale et utilisant les expressions explicites des coefficients, on s'assure que le point singulier de l'équation est régulier.

Idée de la démonstration de la nécessité. Quitte à faire le changement $y_1 = I$, $y_2 = tI^{(1)}, \ldots, y_l =$

$= t^{l-1}I^{(l-1)}$, on ramène l'équation initiale à un système d'équations linéaires homogènes d'ordre 1 : $dy/dt = Ay$, où la matrice A a un pôle d'ordre 1 pour $t = 0$. Maintenant la nécessité résulte du théorème 6 que nous verrons au n° 12.2, F ci-dessous.

L'équation de Picard-Fuchs décrit les intégrales d'une seule forme. Nous allons considérer un système d'équations différentielles définissant les intégrales des formes engendrant une base en homologie évanescente. Un tel système fournit de l'information non seulement sur les formes, mais aussi sur le point critique de la fonction.

B. Intégrales de formes engendrant une base en cohomologie évanescente. Soit f: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ une fonction holomorphe au point $0 \in \mathbf{C}^n$ ayant un point critique de multiplicité μ en 0. Soient $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ des n-formes différentielles holomorphes définies au voisinage de $0 \in \mathbf{C}^n$ et formant une trivialisation pour le point critique 0 de f (voir page 255).

Théorème 5. *Il existe dans un voisinage pointé suffisamment petit de* $0 \in \mathbf{C}$ *une matrice* $\mu \times \mu$ *et une seule* A *de fonctions holomorphes, telle que le système d'équations différentielles ordinaires*

$$\frac{dI^j}{dt} = \sum_{k=1}^{\mu} A_k^j I^k, \quad j = 1, \ldots, \mu, \tag{11}$$

possède la propriété suivante : toute solution de (11) *est une combinaison linéaire de fonctions vectorielles du type*

$$I(t) = \left(\int_{\delta(t)} \omega_1/df, \ldots, \int_{\delta(t)} \omega_\mu/df \right), \tag{12}$$

où δ *est une famille continue quelconque de classes d'homologie entières de dimension* $(n - 1)$ *dans les fibres de la fibration de Milnor du point critique* 0 *de la fonction* f.

Définition. Le système (11) est appelé *équation de Picard-Fuchs de la trivialisation* $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$.

Démonstration du théorème. Analogue à celle du théorème 3.

Remarque. Les coefficients de la matrice A sont méromorphes en $t = 0$ d'après le théorème 8 du § 10.

Exemple d'équation de Picard-Fuchs d'une trivialisation. Soit $f = x_1^{\mu+1} + \ldots + x_n^{\mu+1}$. Soit ω_j, $j \in J$, la collection de formes définies à la page 253. Ces formes constituent une trivialisation pour le point critique de la fonction f (corollaire 2 du lemme 6, § 11). L'équation de Picard-Fuchs de cette trivialisation est le système

$$\frac{dI^j}{dt} = ((j_1 + \ldots + j_n)/(\mu + 1) - 1)\, I^j/t, \quad j \in J.$$

C. Réseau dans l'espace des solutions. Dans l'espace vectoriel des solutions de l'équation de Picard-Fuchs d'une trivialisation, il existe un réseau d'entiers privilégié de dimension μ. Une solution de l'équation appartient à ce réseau si elle est de la forme (12), i.e. si ses coordonnées sont des intégrales suivant une famille de classes continues d'homologie entières. Le réseau possède deux propriétés:

1. Une base sur **Z** du réseau est une base sur **C** de l'espace complexe de dimension μ de toutes les solutions du système.

2. L'opérateur de monodromie des solutions (i.e. l'opérateur linéaire dans l'espace des solutions engendré par le prolongement analytique des solutions le long d'un chemin qui entoure une fois le point $t = 0$ dans le sens antihoraire) et son inverse préservent le réseau.

Soient V l'espace des solutions, $V_{\mathbf{Z}}$ le réseau, M l'opérateur de monodromie. Les propriétés 1 et 2 s'écrivent alors:

$$V = V_{\mathbf{Z}} \otimes {}_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}, \quad M(V_{\mathbf{Z}}) = M^{-1}(V_{\mathbf{Z}}) = V_{\mathbf{Z}}.$$

La propriété 1 revient à dire que l'image naturelle du groupe $H_{n-1}(X_t, \mathbf{Z})$ dans $H_{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ forme un réseau d'entiers de dimension μ dont la base sur **Z** est une base sur **C** dans $H_{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ (ici X_t est une fibre de la fibration de Milnor du point critique 0 de la fonction f). La propriété 2 revient à dire que l'opérateur de monodromie opérant sur $H_{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ préserve l'image du groupe $H_{n-1}(X_t, \mathbf{Z})$.

Définissons le sous-espace réel dans l'espace des solutions comme un espace vectoriel réel engendré par le réseau: $V_{\mathbf{R}} = V_{\mathbf{Z}} \otimes {}_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$. L'espace V de toutes les solutions du système est le complexifié du sous-espace réel: $V = V_{\mathbf{R}} \oplus iV_{\mathbf{R}}$, $i^2 = 1$. Cette décomposition définit le passage au conjugué complexe dans V.

Remarque. La confrontation des comportements asymptotiques des solutions et de l'opération de passage au conjugué complexe conduit à la notion de structure de Hodge mixte du point critique d'une fonction holomorphe (voir §§ 13, 14 ci-dessous).

Une structure analogue au réseau existe dans l'espace des solutions de l'équation de Picard-Fuchs d'une n-forme différentielle holomorphe (voir (8)). En effet, il existe dans l'espace vectoriel de ses solutions un module privilégié sur **Z** à μ générateurs : une solution appartient au module si elle est de la forme (9). Dans ce cas comme dans le cas précédent, l'opérateur de monodromie et son inverse préservent le module.

D. Variation du système d'équations par suite du changement de la trivialisation. Voyons ce que devient le système d'équations (11) quand la trivialisation change. Soit $\omega'_1, \ldots, \omega'_\mu$ une nouvelle tri-

vialisation. Posons

$$I_l'^j(t) = \int_{\delta_l(t)} \omega_j'/dt, \quad j, l = 1, \ldots, \mu.$$

Par définition d'une trivialisation, pour tout t appartenant à un voisinage pointé suffisamment petit du point $t = 0$, il existe une matrice $\mu \times \mu$ inversible $Q(t)$, et une seule, telle que

$$I^j(t) = \sum_r Q_r^j(t)\, I'^r(t), \quad j = 1, \ldots, \mu.$$

Tout coefficient de la matrice Q (comme précédemment tout coefficient de la matrice A) est une fonction holomorphe uniforme définie dans le voisinage pointé de $t = 0$. Les coefficients de la matrice Q sont méromorphes pour $t = 0$ d'après le théorème 8 du § 10. Le nouveau système d'équations se présente comme suit:

$$\frac{dI'}{dt} = \left(-Q^{-1}\frac{dQ}{dt} + Q^{-1}AQ\right) I'.$$

Les solutions de l'ancien système sont liées à celles du nouveau par une transformation méromorphe:

$$I = QI'. \tag{13}$$

Cette transformation permet de passer du réseau dans l'espace des solutions du nouveau système au réseau dans l'espace des solutions de l'ancien. Les opérateurs de monodromie dans les espaces des solutions commutent à cette transformation.

Lemme 5. *Si les formes $\omega_1', \ldots, \omega_\mu'$ constituent une trivialisation de base* (voir page 255), *les coefficients de la matrice Q sont holomorphes pour $t = 0$.*

D é m o n s t r a t i o n. Voir la propriété II d'une trivialisation à la page 256.

Corollaire. *Si aussi bien la collection de formes $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ que $\omega_1', \ldots, \omega_\mu'$ constitue une trivialisation de base, les coefficients de la matrice Q sont holomorphes pour $t = 0$ et la matrice $Q(0)$ est inversible.*

Ainsi donc, les équations de Picard-Fuchs de deux trivialisations de base se ramènent l'une à l'autre par une transformation holomorphe inversible (13) des fonctions cherchées. Cette transformation laisse inchangés les réseaux dans les espaces des solutions de ces équations.

Montrons que, réciproquement, tout changement holomorphe inversible pour $t = 0$ de fonctions inconnues dans l'équation de Picard-Fuchs d'une trivialisation de base peut être induit par le passage à une nouvelle trivialisation de base.

Lemme 6. *Supposons que les formes* $\omega'_1, \ldots, \omega'_\mu$ *constituent une trivialisation de base* (voir page 255). *Soit* Q *une matrice* $\mu \times \mu$ *inversible de fonctions holomorphes définies au voisinage de* $0 \in \mathbf{C}$. *Il existe alors des formes* $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ *qui constituent une trivialisation de base et pour lesquelles le passage* (13) *de l'équation de Picard-Fuchs de la trivialisation* $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ *à celle de la trivialisation* $\omega'_1, \ldots$ $\ldots, \omega'_\mu$ *est donné par la matrice* Q.

Démonstration. Comme formes cherchées, on peut prendre des formes $\omega_j = \sum_r Q(f)^j_r \omega'_r$, $j = 1, \ldots, \mu$, où $Q(f)$ est une fonction matricielle à l'origine de $\mathbf{C}^n$ induite de la fonction matricielle Q par l'application $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$.

E. Détermination de la singularité de Picard-Fuchs d'un point critique de multiplicité finie. Soit A une matrice $\mu \times \mu$ de fonction-holomorphes définies dans un voisinage pointé du point $0 \in \mathbf{C}$. Considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{dI^j}{dt} = \sum_{k=1}^{\mu} A^j_k I^k, \quad j = 1, \ldots, \mu. \tag{14}$$

Soit dans l'espace des solutions V de dimension μ de ce système un réseau d'entiers privilégié $V_{\mathbf{Z}}$ de dimension μ dont la base est une base sur $\mathbf{C}$ de V tout entier (i.e. $V = V_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$). Considérons l'opérateur de monodromie M des solutions (i.e. l'opérateur linéaire dans V engendré par le prolongement analytique des solutions le long d'un chemin entourant une fois le point $t = 0$ dans le sens antihoraire). Supposons que l'opérateur de monodromie et son inverse laissent inchangé le réseau (i.e. $M(V_{\mathbf{Z}}) = M^{-1}(V_{\mathbf{Z}}) = V_{\mathbf{Z}}$). Dans ce cas le système (14) est dit *équipé*, et le réseau dans l'espace des solutions est appelé *équipement* du système.

Des exemples de systèmes équipés sont donnés par les équations de Picard-Fuchs des trivialisations (voir (11)); ceux d'équipements de ces systèmes, par les solutions de la forme (12).

Remarque. Un système d'équations différentielles peut être équipé si et seulement si son espace des solutions admet une base par rapport à laquelle l'opérateur de monodromie et son inverse sont entiers.

Soient deux systèmes de μ équations équipés; soient A, V, $V_{\mathbf{Z}}$ et A', V', $V'_{\mathbf{Z}}$ leurs matrices, espaces de solutions et équipements respectivement. Ces deux systèmes sont appelés *équivalents* s'il existe au voisinage de $0 \in \mathbf{C}$ une matrice $\mu \times \mu$ inversible Q de fonctions holomorphes telle que le changement de fonctions inconnues $I^j(t) = \sum_r Q^j_r(t) I'^r(t)$, $j = 1, \ldots, \mu$, transforme le premier système dans le second tout en conservant les équipements, i.e.

$A' = -Q^{-1}\frac{dQ}{dt} + Q^{-1}AQ$, $V_Z = QV'_Z$. La classe d'équivalence du système équipé d'équations différentielles est appelée sa *singularité*.

D'après les lemmes 5 et 6, les équations de Picard-Fuchs des trivialisations de base constituent exactement une classe d'équivalence. Cette classe d'équivalence sera appelée *singularité de Picard-Fuchs du point critique* 0 de la fonction holomorphe f.

Problème. *Décrire la singularité de Picard-Fuchs d'un point critique.*

Il s'agit, en particulier, d'en donner la forme normale, d'indiquer, parmi les singularités de systèmes équipés, celles qui peuvent être les singularités de Picard-Fuchs de points critiques.

Toute question sensée sur les singularités de Picard-Fuchs de points critiques admet en toute logique une réponse sensée. Par exemple, la singularité de Picard-Fuchs admet un représentant diagonal (i.e. un représentant du type $dI^j/dt = a_j(t) I^j$, $j = 1, \ldots, \mu$) si et seulement si le point critique est holomorphiquement équivalent au point critique d'une fonction quasi homogène. (Démonstration : la singularité de Picard-Fuchs d'un point critique d'une fonction quasi homogène a un représentant diagonal d'après [333] ou [229, exemple (6.7)] ; la réciproque se déduit de [295] (cf. [353]).

Hypothèse. *Les singularités de Picard-Fuchs des points critiques de multiplicité finie sont différentes pour les points critiques holomorphiquement non équivalents, tout au moins pour des points voisins.*

Cette hypothèse est l'analogue du théorème de Torelli en géométrie algébrique (voir [138], [7]).

Comme circonstance susceptible de stimuler l'étude du problème et de corroborer l'hypothèse, notons que la singularité de Picard-Fuchs d'un point critique définit sa structure de Hodge, voir n° 13.2.

F. L'équation de Picard-Fuchs d'une trivialisation admet un point singulier régulier. Rappelons un théorème classique en théorie des équations différentielles ordinaires.

Théorème 6 (voir [77]). *Soit A une matrice $\mu \times \mu$ de fonctions holomorphes dans un voisinage pointé de* $0 \in \mathbf{C}$. *Considérons un système de μ équations différentielles linéaires homogènes*

$$\frac{dI}{dt} = AI, \quad I(t) \in \mathbf{C}^{\mu}. \tag{15}$$

Les propriétés suivantes de ce système sont équivalentes :

1. *Soit $I = (I^1, \ldots, I^{\mu})$ une solution quelconque du système. Alors, dans un secteur quelconque $a < \arg t < b$, chaque coordonnée de la solution croît pour $t \to 0$ de façon exponentielle au plus vite, $I^j(t) = o(t^{-N})$ pour un certain N.*

2. *Il existe, dans un voisinage pointé de $t = 0$, une matrice $\mu \times \mu$ inversible Q de fonctions holomorphes, méromorphes en $t = 0$, telle que le changement $I = QI'$ transforme le système initial en un système d'équations ayant un pôle simple en $t = 0$, i.e. la fonction matricielle $Q^{-1}AQ - Q^{-1}\, dQ/dt$ admet au point $t = 0$ un pôle d'ordre non supérieur à 1.*

Définition. On dit que le point $t = 0$ est un point *singulier* du système (15) si l'une quelconque au moins des coordonnées de la matrice A est sans prolongement holomorphe au point $t = 0$. On dit que le point singulier de (15) est *régulier* si le système (15) possède les propriétés 1 et 2 du théorème 6.

L'équation de Picard-Fuchs d'une trivialisation admet en $t = 0$ soit un point singulier régulier, soit un point non singulier, d'après le théorème 7 du § 10.

Remarque. Le point $t = 0$ est un point non singulier de l'équation de Picard-Fuchs d'une trivialisation si et seulement si le point 0 de la fonction f est non dégénéré, la fonction a deux variables et la trivialisation est de base. (La démonstration découle avec évidence du théorème 8 du § 10 et du théorème 6 du § 4).

Idée de la démonstration du théorème 6. $1 \Rightarrow 2$. Soit M la transformation de monodromie des solutions engendrée par un chemin autour de $t = 0$ dans le sens antihoraire. Soit $\ln M$ une des valeurs possibles du logarithme de M. Soit B la matrice du système fondamental des solutions de l'équation (15). Alors $P = B \exp(-\ln t \ln M/2\pi i)$ est une matrice de fonctions méromorphes. Quitte à faire le changement $I = PI'$, on ramène l'équation à la forme

$$\frac{dI'}{dt} = -\frac{\ln M}{2\pi i t} I'. \tag{16}$$

Remarques. 1. $\exp(-\ln t \cdot \ln M/(2\pi i))$ est la matrice du système fondamental des solutions de (16). Les solutions de (15) se développent donc en séries $\sum a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k$ (si le système a la propriété 1 du théorème); voir la démonstration du théorème 2 du § 10.

2. Quitte à faire le changement $I = PI'$, on peut toujours ramener un système d'équations quelconque (15) à la forme (16). Or, P n'est pas toujours une matrice méromorphe.

$2 \Rightarrow 1$. Puisque A admet un pôle d'ordre 1, on a $\frac{d\|B\|}{dr} \leqslant \leqslant \frac{\mathrm{Cte}}{r} \|B\|$, où $r = |t|$. Donc $\|B\| < B_0 r^{-\mathrm{Cte}}$. Pour de plus amples détails, voir [110].

12.3. Connexion de Gauss-Manin. Ce n° est consacré à l'interprétation géométrique des systèmes d'équations différentielles véri-

fiés par des intégrales de formes holomorphes suivant des classes de familles continues d'homologie entière évanescente.

A toute fibration localement triviale π est associée une fibration vectorielle complexe de (co)homologie de dimension k des fibres de π. Dans cette fibration vectorielle est définie l'opération naturelle de transport de fibres au-dessus de courbes dans la base (car les (co)homologies des fibres voisines de π sont canoniquement isomorphes). L'opération de transport est appelée *connexion de Gauss-Manin* dans la fibration de (co)homologie.

On appelle section *covariantement constante* multiforme d'une fibration de (co)homologie une section multiforme (i.e. une section de la fibration de (co)homologie relevée sur le revêtement universel de la base) dont les valeurs sont invariantes par l'opération de transport. Les sections covariantement constantes constituent une première classe importante de sections de fibration de (co)homologie.

Supposons à présent que π soit une fibration analytique complexe. Considérons, sur l'espace total de π, une k-forme différentielle holomorphe dont les restrictions aux fibres sont fermées. Cette forme définit une section (uniforme) de la fibration de cohomologie de dimension k : à tout point de la base est associée une classe de cohomologie de la restriction de la forme à la fibre située au-dessus de ce point. Les sections obtenues par un tel procédé géométrique constituent une deuxième classe importante de sections de fibrations de cohomologie (classe des *sections géométriques*; pour la définition exacte, voir n° 12.3, B).

Il existe une relation naturelle entre les fibrations d'homologie de dimension k et celles de cohomologie de dimension k. Etant données une section covariantement constante de la fibration d'homologie de dimension k et une section géométrique de la fibration de cohomologie de dimension k, en calculant les valeurs de l'une sur celles de l'autre, point par point, on obtient une fonction multiforme sur la base. Les valeurs de cette fonction ne sont autres que les intégrales de la forme définissant la section géométrique prises suivant les cycles représentant dans les fibres les classes d'homologie qui sont les valeurs de la section covariantement constante. De telles fonctions sur la base d'une fibration de Milnor ont été étudiées au § 10.

Soient définis une base de sections géométriques et un procédé de transport des classes de cohomologie dans les coordonnées définies par cette base. Proposons-nous de déterminer les coordonnées des sections covariantement constantes. Pour le faire, nous devrons résoudre un système d'équations différentielles du premier ordre. Pour le cas de la fibration de Milnor du point critique, ce système est associé à l'équation de Picard-Fuchs de la trivialisation définie par la collection de formes définissant la base des sections géométriques (voir n° 12.2). Voyons maintenant les choses plus en détails.

A. Fibration de (co)homologie associée à la fibration localement triviale donnée. Soit $\pi : X \to B$ une fibration localement triviale (peut-être non vectorielle). Pour tout $k \geqslant 0$, définissons des fibrations vectorielles complexes d'homologie de dimension k et de cohomologie de dimension k des fibres de π. Posons $H_k = \bigcup\limits_{b \in B} H_k (X_b, \mathbf{C})$. Soit π_* la projection naturelle $H_k \to B$.

Soit U une partie ouverte contractile de B. Alors $\pi^{-1} (U)$ est homéomorphe au produit direct de la fibre et de U. Le plongement naturel d'une fibre quelconque au-dessus de U dans $\pi^{-1} (U)$ induit un isomorphisme de classes de (co)homologie. On obtient ainsi des trivialisations de la projection π_* au-dessus des parties ouvertes contractiles de B. Les trivialisations construites munissent $\pi_* : H_k \to B$ d'une structure de fibration vectorielle complexe. Cette fibration est appelée *fibration d'homologie de dimension k associée à π.*

On définit d'une façon analogue la *fibration de cohomologie de dimension k* associée à la fibration donnée π. Il existe une relation naturelle entre les fibrations d'homologie de dimension k et celles de cohomologie de dimension k (puisque tel est le cas des classes d'homologie et de cohomologie de dimension k).

Remarque. Les fonctions de passage des trivialisations construites sont localement constantes.

Dans une fibration de (co)homologie est définie une opération naturelle de transport parallèle des fibres au-dessus des courbes dans la base. (Une courbe définie dans la base induit de π une fibration triviale au-dessus d'un segment, si bien que les classes de (co)homologie des fibres au-dessus des points initial et final de la courbe sont canoniquement isomorphes.) L'opération de transport parallèle a quelques propriétés :

1. L'application de la fibre au-dessus du point origine dans la fibre au-dessus du point extrémité du chemin est un isomorphisme linéaire.

2. L'application ne dépend pas du choix de la courbe dans la classe des courbes homotopes à extrémités fixées.

L'opération de transport des classes de (co)homologie est appelée *connexion de Gauss-Manin* dans la fibration de (co)homologie.

Les opérations de transport dans la fibration d'homologie et dans la fibration de cohomologie sont compatibles : le transport commute à la conjugaison.

La section de la fibration de (co)homologie au-dessus d'une partie ouverte de la base est dite *covariantement constante* si ses valeurs sont invariantes par les transports parallèles le long de toute courbe située dans cette partie ouverte.

Si la base B est localement simplement connexe (par exemple B est une variété), tout vecteur d'une fibre quelconque de la fibration de (co)homologie se laisse prolonger (et ce d'une façon unique) en

section covariantement constante au-dessus d'un voisinage suffisamment restreint de sa projection dans B (à cet effet, on fait le transport du vecteur sur des fibres voisines). En poursuivant le prolongement de cette section covariantement constante, on obtient une section covariantement constante multiforme au-dessus de la base B tout entière, i.e. une section covariantement constante de la fibration de (co)homologie relevée sur le revêtement universel de la base B.

Il y a dans chaque fibre de la fibration de (co)homologie deux structures privilégiées: le sous-espace réel et le réseau d'entiers dans ce sous-espace. Le sous-espace réel est l'image naturelle des classes de (co)homologie à coefficients réels dans les classes de (co)homologie de la fibre de π à coefficients complexes; le réseau d'entiers dans le sous-espace réel est l'image naturelle du groupe de (co)homologie de la fibre à coefficients entiers. Toute fibre de la fibration de (co)homologie est le complexifié de son sous-espace réel; le réseau engendre le sous-espace réel (par addition et multiplication par des nombres réels). Le sous-espace réel et le réseau d'entiers sont invariants par tout transport parallèle.

Supposons que la base d'une fibration π soit une variété holomorphe. Alors la fibration de (co)homologie associée à π a une structure canonique de fibration vectorielle holomorphe. En effet, définissons les sections holomorphes de la fibration de (co)homologie comme des sections à coordonnées holomorphes dans un repère quelconque de la fibration de (co)homologie composé de sections covariantement constantes. Une telle définition est légitime, car les fonctions de passage entre repères de sections covariantement constantes sont localement constantes.

Remarque. La connexion de Gauss-Manin est décrite dans [231, 232, 276].

B. Fibration de (co)homologie de Milnor d'un déploiement. Soit $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe ayant un point critique de multiplicité finie μ. Soit $\mathfrak{F}: (\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k, 0 \times 0) \to$ $\to (\mathbf{C}, 0)$ un déploiement de $\mathfrak{f}$. Soit $G: X \to S$ une spécialisation du déploiement et $G: X' \to S'$ la fibration de Milnor associée (voir page 233). La fibration de (co)homologie de dimension $(n-1)$ associée à la fibration de Milnor est appelée *fibration de* (*co*)*homologie de Milnor* du déploiement (plus exactement, de la spécialisation du déploiement). La fibration de (co)homologie de Milnor a une structure canonique de fibration vectorielle holomorphe. La fibration de (co)homologie de Milnor est munie de la connexion de Gauss-Manin.

Remarque. La fibre type de la fibration de Milnor a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dimension $(n-1)$. Donc la fibration associée de (co)homologie de dimension k a un sens uniquement pour $k = n - 1$.

Définissons la classe des sections géométriques de la fibration de (co)homologie de Milnor. Soit ω une n-forme différentielle holomorphe sur X. Pour tout point $b \in S'$ la restriction de la forme de Guelfand-Leray à la fibre X_b de la fibration de Milnor définit une classe de cohomologie $[\omega/d_xF \mid_{X_b}] \in H^{n-1}(X_b, \mathbf{C})$. La section $b \mapsto$ $\mapsto [\omega/d_xF \mid_{X_b}]$ de la fibration de cohomologie de Milnor est appelée *section géométrique* de ω et notée $s[\omega]$.

Soit δ une section multiforme covariantement constante de la fibration d'homologie de Milnor. Considérons sur S' la fonction multiforme $\langle s[\omega], \delta\rangle$. Conformément à nos définitions, $\langle s[\omega], \delta\rangle =$ $= \int_\delta \omega/d_xF$. Nous avons étudié de telles fonctions dans le § 10.

La fonction $\langle s[\omega], \delta\rangle$ est holomorphe d'après le théorème 5 du § 10. Toute section géométrique d'une n-forme différentielle holomorphe est donc une section holomorphe de la fibration de cohomologie de Milnor.

L'ensemble des sections géométriques est un module sur l'anneau des fonctions holomorphes sur la base S de la spécialisation du déploiement: si $s[\omega]$ est une section géométrique et g une fonction holomorphe sur S, alors $gs[\omega]$ est une section géométrique de la forme $s[(g \circ G)\cdot\omega]$.

D'après les théorèmes 1 et 2, il existe une collection de μ sections géométriques dont les valeurs engendrent des bases dans toutes les fibres de la fibration de cohomologie de Milnor situées au-dessus des points de S suffisamment voisins de l'origine $0 \in S$.

Remarque. Le module des germes de sections géométriques à l'origine de la base S du déploiement versel du point critique du germe $\mathfrak{f}$ est un module libre de rang μ sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de S. On le montre aisément à l'aide des corollaires du théorème 2 et de la proposition du nº 12.1, E (voir plus loin le cas d'un déploiement trivial du germe). La base du module est définie par les sections géométriques des formes pour lesquelles la restriction de la fonction $\det^2$ à la droite de valeurs passant par l'origine possède à l'origine un zéro de multiplicité minimale; voir les corollaires du théorème 2.

C. Connexion de Gauss-Manin et équation de Picard-Fuchs d'une trivialisation. Bornons-nous à considérer, dans le texte qui suit, le cas d'un déploiement trivial du germe $\mathfrak{f}$. Soit une spécialisation $f: X \to S$ du germe et la fibration de Milnor associée $f: X' \to S'$. Soit $s_1, \ldots, s_\mu$ une base de sections holomorphes de la fibration de (co)homologie de Milnor sur S'.

Lemme 7. *Il existe sur S' une matrice $\mu \times \mu$ unique B de fonctions holomorphes pour laquelle le système d'équations différentielles*

$$\frac{dI^j}{dt} = \sum B_k^j I^k, \quad j = 1, \ldots, \mu, \tag{17}$$

possède la propriété suivante: une section $\sum I^j s_j$ est covariantement constante dans la connexion de Gauss-Manin si et seulement si $(I^1, \ldots, I^\mu)$ est solution de (17).

Le système d'équations différentielles (17) est appelé *équation des sections covariantement constantes* dans le repère $s_1, \ldots, s_\mu$.

D é m o n s t r a t i o n. L'ensemble des sections multiformes covariantement constantes de la fibration de (co)homologie de Milnor forme un espace vectoriel complexe de dimension μ. En décomposant les sections covariantement constantes par rapport à la base $s_1, \ldots, s_\mu$, on obtient un espace vectoriel complexe de dimension μ de fonctions vectorielles holomorphes $(I^1, \ldots, I^\mu)$ invariant par le prolongement analytique des fonctions vectorielles autour du point 0. L'existence et l'unicité d'un système d'équations différentielles vérifié par les fonctions vectorielles de l'espace décrit se démontrent comme les théorèmes 3 et 5.

Soient $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ des n-formes différentielles holomorphes sur X dont les sections géométriques $s_j = s[\omega_j]$, $j = 1, \ldots, \mu$, forment une base de sections de la fibration de cohomologie de Milnor. Dans le nº 12.1, nous avons appelé la collection de telles formes une trivialisation (leurs sections géométriques définissent une trivialisation de la fibration de cohomologie de Milnor).

A une telle collection de formes sont associés deux systèmes d'équations différentielles. D'une part, c'est l'équation (17) des sections covariantement constantes dans le repère $s_1, \ldots, s_\mu$, et d'autre part c'est l'équation de Picard-Fuchs (11) de la trivialisation.

Lemme 8. *La matrice B de l'équation des sections covariantement constantes et la matrice A de l'équation de Picard-Fuchs de la trivialisation sont liées par la relation $A + B^* = 0$.*

Corollaire. *Soit $s^1, \ldots, s^\mu$ le repère de la fibration d'homologie de Milnor dual du repère $s_1, \ldots, s_\mu$. Alors l'application $(I^1, \ldots, I^\mu) \mapsto \sum I^j s^j$ définit un isomorphisme entre l'espace des solutions de l'équation de Picard-Fuchs* (11) *et l'espace des sections covariantement constantes de la fibration d'homologie de Milnor. Par cet isomorphisme le réseau privilégié dans l'espace des solutions de l'équation de Picard-Fuchs décrit au nº* 12.2, C *se transforme en un réseau des sections covariantement constantes de la fibration d'homologie de Milnor constitué par les sections dont les valeurs appartiennent à l'image naturelle des classes d'homologie à coefficients entiers.*

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e: aisée, à partir des définitions.

Le lemme 8 et son corollaire donnent une interprétation géométrique à l'équation de Picard-Fuchs d'une trivialisation.

Soit une trivialisation de base $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ (voir page 255). En accord avec la propriété II d'une trivialisation (page 256), il existe pour toute section géométrique $s[\omega]$ des fonctions holomorphes $p_1, \ldots, p_\mu$ définies au voisinage de $0 \in S$, telles que $s[\omega] = \sum_j p_j s[\omega_j]$. Par conséquent, les sections géométriques de la trivialisation de base engendrent une base du module des germes de sections géométriques en $0 \in S$ sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes en $0 \in S$. Cette propriété permet de choisir les trivialisations de base parmi toutes les trivialisations (lemmes 5, 6).

Ainsi donc, la singularité de Picard-Fuchs du point critique (voir n° 12.2, E) est la classe des équations des sections covariantement constantes de la fibration d'homologie de Milnor dans les repères duals des repères de sections géométriques qui engendrent une base du module des germes de sections géométriques au point $0 \in S$.

§ 13. Coefficients des développements en série des intégrales. Filtration par le poids et filtration de Hodge. Spectre du point critique

Considérons l'intégrale d'une forme différentielle holomorphe suivant les classes d'homologie d'une famille continue d'homologie entière des fibres de la fibration de Milnor d'un point critique. La fonction définie par l'intégrale se développe en série suivant les puissances du paramètre et suivant les puissances du logarithme du paramètre (§ 10). Chaque coefficient de la série est fonction linéaire tant de la forme que de la famille continue d'homologie entière. Proposons-nous de varier les familles continues tout en laissant la forme inchangée : chaque coefficient de la série devient alors une fonction linéaire sur des familles continues. Les combinaisons linéaires sur **C** de familles continues de classes d'homologie entières forment l'espace des sections covariantement constantes (pour la connexion de Gauss-Manin) de la fibration d'homologie de Milnor. Ainsi donc, pour une forme donnée chaque coefficient de la série est une fonction linéaire sur l'espace des sections covariantement constantes de la fibration d'homologie de Milnor, i.e. une section covariantement constante de la fibration de cohomologie de Milnor.

On peut se le représenter autrement. À toute forme holomorphe correspond une section géométrique (uniforme) de la fibration de cohomologie de Milnor. Choisissons un repère covariantement constant dans cette fibration de cohomologie et décomposons la section géométrique par rapport à ce repère. Les coefficients de la décomposition sont des fonctions multiformes. On voit sans peine que les coef-

ficients sont du type $\sum b_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. En regroupant les termes de la somme, on obtient un développement en série de la section géométrique suivant les puissances du paramètre et des logarithmes du paramètre, série dont les coefficients sont des sections covariantement constantes. Pour définir les intégrales de la forme suivant les classes d'homologie de la famille d'homologie covariantement constante, il suffit de déterminer les nombres égaux aux valeurs des coefficients de la série sur la section covariantement constante donnée de la fibration d'homologie de Milnor.

Ainsi donc, la section géométrique se développe en série

$$s[\omega] = \sum_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k A^{(\omega)}_{k,\alpha}/k!, \qquad (1)$$

où ω est la forme et $A^{(\omega)}_{k,\alpha}$ des sections covariantement constantes. Les coefficients $A^{(\omega)}_{k,\alpha}$ définissent complètement les propriétés de cohomologie des formes ω/df définies sur les fibres de la fibration de Milnor. Même plus, l'ensemble des coefficients de toutes les formes contient une information sur le point critique.

Nous démontrerons au n° 13.1 les propriétés fondamentales des coefficients:

1. $A^{(\omega)}_{k,\alpha}(t) = (-\ln M_u/2\pi i)^k A^{(\omega)}_{0,\alpha}(t)$, où M_u est la partie unipotente de l'opérateur de monodromie classique M en cohomologie.

2. La section $A^{(\omega)}_{k,\alpha}$ appartient au sous-espace des racines de M ayant comme valeur propre $\exp(-2\pi i\alpha)$.

3. Chaque section $A^{(\omega)}_{k,\alpha}$ est une fonction holomorphe de ω (plus exactement, du jet fini de ω au point critique initial).

Ensuite nous définirons la *partie principale* de la forme (d'une section géométrique) comme une somme des termes de la série (1) avec un α fixé, qui est le plus petit α qu'on rencontre dans la série. Cet α minimal est appelé *ordre de la forme*. Nous énoncerons quelques propositions relatives au calcul de l'ordre.

Le n° 13.2 est la clé de voûte du paragraphe. On y construit, au départ des parties principales de toutes les formes, une filtration décroissante *) dans les fibres de la fibration de cohomologie de Milnor. Elle est appelée *filtration de Hodge*. Ensuite, d'après la structure jordanienne de l'opérateur de monodromie, on construit une filtration croissante dans les fibres de la fibration de cohomologie de Milnor: elle est appelée *filtration par le poids*, ou *pondérale*. Les sous-espaces des filtrations dans les différentes fibres sont compatibles: ils forment des sous-fibrations holomorphes dans la fibration de cohomologie de Milnor. Dans le n° 13.2 est formulé un théorème sur la structure de Hodge mixte: la filtration par le poids et la filtration de Hodge forment la structure de Hodge mixte dans les fibres

*) La filtration d'un espace vectoriel est une suite ordonnée de ses sous-espaces vectoriels.

de la fibration de cohomologie de Milnor du point critique isolé. Ce théorème sera discuté plus loin, tout au long du § 14.

Dans le n° 13.3 on définit des caractéristiques numériques de la filtration par le poids et de celle de Hodge: les *couples spectraux* du point critique. Les couples spectraux sont une collection non ordonnée de μ couples de nombres, où μ est la multiplicité du point critique. Le premier nombre de chaque couple est un nombre rationnel, le second est un entier. La collection non ordonnée des premiers nombres des couples est appelée *spectre du point critique*. Les nombres du spectre, ou valeurs spectrales, sont quotients par $2\pi i$ des logarithmes des valeurs propres de l'opérateur de monodromie. Le choix de la branche du logarithme est fait à l'aide des parties principales des formes holomorphes. Les seconds nombres des couples spectraux sont les niveaux jordaniens convenablement renormalisés des éléments de la base de Jordan.

Le spectre du point critique possède quelques propriétés remarquables:

1. La somme de toutes les valeurs spectrales est égale à $\mu(n/2 - 1)$, où μ est la multiplicité du point critique et n le nombre de variables.

2. Le spectre est symétrique par rapport au point $n/2 - 1$.

3. Le spectre d'un point critique non dégénéré se réduit à une valeur spectrale unique $n/2 - 1$. Si le spectre est concentré dans le point $n/2 - 1$, i.e. se compose de plusieurs nombres $n/2 - 1$, le point critique est non dégénéré.

4. Le spectre est invariant par toute déformation du point critique n'affectant pas sa multiplicité.

5. Si $\{\alpha_i\}$, $i = 1, \ldots, \mu$, est le spectre du point critique du germe $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ et $\{\beta_j\}$, $j = 1, \ldots, \eta$, le spectre du point critique du germe $\mathfrak{g}: (\mathbf{C}^l, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, alors $\{\alpha_i + \beta_j + 1\}$, $i = 1, \ldots, \mu$, $j = 1, \ldots, \eta$, est le spectre du point critique du germe $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}: (\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^l, 0 \times 0) \to (\mathbf{C}, 0)$.

Ces propriétés du spectre, ainsi que quelques autres, sont discutées dans le n° 13.3 et dans le § 14.

13.1. Coefficients du développement en série.

A. Coefficients et opérateur de monodromie. Considérons un germe $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ de fonction holomorphe ayant un point critique de multiplicité finie. Considérons sa spécialisation $f: X \to S$ et la fibration de Milnor associée $f: X' \to S'$ (voir page 233). Si ω est une n-forme différentielle holomorphe sur X et δ une section covariantement constante de la fibration d'homologie de Milnor, alors on a

$$\int_{\delta(t)} \omega/df = \sum_{k,\alpha} a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k/k! \tag{2}$$

d'après le théorème 8 du § 10. Dans cette formule les coefficients $1/k!$ sont introduits afin de simplifier les formules qui suivront. Les nombres k, α dans (2) ne dépendent pas de la forme ni de la section ; ils sont définis uniquement par l'opérateur de monodromie de la fibration de Milnor. Etant donnés une forme fixée ω et des nombres k, α fixés, le coefficient $a_{k,\alpha}$ définit une section multiforme covariantement constante $A^{\omega}_{k,\alpha}$ de la fibration de cohomologie de Milnor par la formule $\langle A^{\omega}_{k,\alpha}(t), \delta(t)\rangle = a_{k,\alpha}(\omega, \delta)$. On a par définition

$$s[\omega](t) = \sum_{k,\alpha} t^{\alpha}(\ln t)^{k} A^{\omega}_{k,\alpha}(t)/k!, \tag{3}$$

où $s[\omega]$ est la section géométrique correspondant à ω. La série (3) converge dans chaque secteur $a < \arg t < b$ si le paramètre t est suffisamment petit en module.

Lemme 1.

1. $$A^{\omega}_{k,\alpha} = (-\ln(M_u)/2\pi i)^{k} A^{\omega}_{0,\alpha}, \tag{4}$$

où M_u est la partie unipotente de l'opérateur de monodromie en cohomologie de dimension $(n-1)$.

2. *La section $A^{\omega}_{k,\alpha}$ appartient au sous-espace des racines de valeur propre* $\exp(-2\pi i\alpha)$ *de l'opérateur de monodromie en cohomologie de dimension $(n-1)$.*

Remarque. L'opérateur de monodromie M en cohomologie (ou en sections covariantement constantes de la fibration de cohomologie de Milnor) est l'opérateur de monodromie en connexion de Gauss-Manin engendré par le chemin entourant le point $t=0$ dans le sens antihoraire. Si M_{hom} est l'opérateur de monodromie défini de façon analogue en homologie de dimension $(n-1)$, on a $M^{*} = M^{-1}_{\text{hom}}$, où $*$ signifie « adjoint ».

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. Elle découle de la remarque suivante. Le prolongement analytique de la première partie de (2) autour du point $t=0$ conduit à l'intégrale de ω/df suivant $M_{\text{hom}}\delta(t)$. Le prolongement analytique du second membre autour de $t=0$ revient à substituer l'expression $te^{2\pi i}$ au lieu de t. Le confrontement des deux procédés de prolongement donne le lemme. Pour plus de détails, voir [354].

Corollaires du lemme. 1. *La section géométrique $s[\omega]$ se définit par les sections $A^{\omega}_{k,\alpha}$ pour $k=0$.*

2. *Si pour un certain α on a $A^{\omega}_{0,\alpha}=0$, alors pour tout k on a* $A^{\omega}_{k,\alpha}=0$.

3. *On a pour tout* α

$$t^{\alpha}(A^{\omega}_{0,\alpha}(t) + \ldots + (\ln t)^{n-1} A^{\omega}_{n-1,\alpha}(t)/(n-1)!) =$$
$$= \exp(\ln t(\alpha\,\mathrm{Id} - \ln(M_u)/2\pi i))\,A^{\omega}_{0,\alpha}(t).$$

(Rappelons que la taille de tout bloc de la forme jordanienne de l'opérateur de monodromie est non supérieure à n, aussi les coefficients $A^{\omega}_{k,\alpha}$ s'annulent-ils pour $k \geqslant n$.)

4. *La section définie par la formule précédente est une section holomorphe uniforme de la fibration de cohomologie de Milnor.*

Lemme 2. *Chaque section* $A^{\omega}_{k,\alpha}$ *dépend uniquement du jet fini de la forme* ω *au point* $0 \in \mathbf{C}^n$; *mieux, elle est une fonction holomorphe de ce jet.*

Le lemme 2 est un corollaire du lemme 3 du § 12.

B. Sections élémentaires. Soit A une section multiforme covariantement constante de la fibration de cohomologie de Milnor appartenant au sous-espace des racines de valeur propre λ de l'opérateur de monodromie en cohomologie. Soit α un nombre rationnel tel que $\exp(-2\pi i\alpha) = \lambda$. Définissons une section $s[A, \alpha]$ de la fibration de cohomologie par la formule

$$s[A, \alpha] = \exp[\ln t(\alpha\,\mathrm{Id} - \ln(M_u)/2\pi i)]\,A.$$

La section $s[A, \alpha]$ est appelée *section élémentaire* d'ordre α engendrée par la section A.

D'après le lemme 2, toute section géométrique est une somme de sections élémentaires, $s[\omega] = \sum_{\alpha} s[A^{\omega}_{0,\alpha}, \alpha]$.

Lemme 3. 1. $s[A, \alpha]$ *est une section holomorphe uniforme de la fibration de cohomologie.*

2. *Si les sections covariantement constantes* $A_1, \ldots, A_l$ *appartiennent au sous-espace des racines de valeur propre* λ *de l'opérateur* M *et forment une famille libre sur* $\mathbf{C}$, *les valeurs des sections* $s[A_1, \alpha], \ldots, s[A_l, \alpha]$ *forment une famille libre en tout point de la base de la fibration de cohomologie.*

3. $t\nabla_{\partial/\partial t} s[A, \alpha] = \alpha s[A, \alpha] + s[-\ln(M_u)\cdot A/2\pi i, \alpha]$, *où* $\nabla_{\partial/\partial t}$ *est la dérivation en connexion de Gauss-Manin, i.e. la dérivation des coordonnées de la section dans un repère covariantement constant.*

D é m o n s t r a t i o n. Les pp. 1 et 3 sont évidents. Le p. 2 résulte du fait que les sections covariantement constantes forment une famille libre et que la transformation linéaire $\exp[\ldots]$ est non dégénérée.

C. Ordre et partie principale d'une forme. Soit ω une n-forme différentielle holomorphe sur X (espace source de la spécialisation

du germe $\mathfrak{f}$). On appelle *ordre* de la forme (de la section géométrique définie par la forme) le plus petit α tel que le coefficient $A^{\omega}_{0,\alpha}$ soit non nul. L'ordre se note $\alpha(\omega)$.

Rappelons que, d'après le lemme 1, $A^{\omega}_{0,\alpha} = 0$ implique $A^{\omega}_{k,\alpha} = 0$ pour k quelconque.

On appelle *partie principale* de la forme (de la section géométrique définie par la forme) une section holomorphe uniforme $s_{\max}[\omega]$ de la fibration de cohomologie de Milnor du point critique du germe $\mathfrak{f}$ définie par la formule

$$s_{\max}[\omega] = t^{\alpha(\omega)}(A^{\omega}_{0,\alpha(\omega)} + \ldots + (\ln t)^{n-1} A^{\omega}_{n-1,\alpha(\omega)}/(n-1)!).$$

Remarques. 1. Soit η une $(n-1)$-forme différentielle holomorphe sur X. Ses restrictions aux fibres de la fibration de Milnor définissent une section géométrique $s[\eta]$. On a par définition $s[\eta] = s[df \wedge \eta]$. Cette égalité définit l'ordre et la partie principale de η et de la section géométrique de η.

2. Si une forme définit une section géométrique nulle, on admet que son ordre est $+\infty$ et que sa partie principale est égale à la section nulle de la fibration de cohomologie.

Exemple. Soient f un polynôme quasi homogène et ω une forme quasi homogène de degré maximal. Alors l'intégrale de sa forme de Guelfand-Leray suivant les classes d'homologie d'une famille covariantement constante s'écrit Cte$\cdot t^{\alpha-1}$, où α est le rapport des degrés de quasi-homogénéité de ω et de f. Aussi la partie principale de ω est-elle égale à sa section géométrique, i.e.

$$s[\omega](t) = s_{\max}[\omega](t) = t^{\alpha-1}A^{\omega}_{0,\alpha-1}(t).$$

Formulons une propriété utile des ordres et des parties principales.

Lemme 4 (voir [354]). *Soient* $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ *des n-formes différentielles holomorphes sur* X. *Soit* $\delta_1, \ldots, \delta_\mu$ *une base de sections covariantement constantes de la fibration d'homologie de Milnor du point critique du germe* $\mathfrak{f}$. *Soit* ord *l'ordre du zéro pour* $t = 0$ *de la fonction*

$$\det{}^2 : t \mapsto \det{}^2\left(\int_{\delta_l(t)} \omega_j/df\right), \quad j, l = 1, \ldots, \mu.$$

Alors $\mathrm{ord}/2 \geqslant \alpha(\omega_1) + \ldots + \alpha(\omega_\mu)$; *l'égalité a lieu si et seulement si les parties principales des formes* $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ *sont des sections de la fibration de cohomologie de Milnor qui forment une famille libre.*

Démonstration. Evidente.

D. Ordre d'une forme et exposant du terme dominant du développement asymptotique d'une intégrale oscillante. Considérons une

intégrale oscillante complexe de phase f suivant une chaîne permise contenue au voisinage du point critique du germe f, i.e. l'intégrale $\int_{[\Gamma]} e^{\tau f}\omega$, où $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$ et ω est une n-forme différentielle holomorphe sur X (voir n° 11.1). D'après le théorème 11.1, l'intégrale se développe pour $\tau \to +\infty$ en série $\sum a_{k,\alpha}\tau^{\alpha}(\ln \tau)^k$. Désignons par $\beta(\omega, [\Gamma])$ le plus grand α qu'on rencontre dans cette série; autrement dit, $\beta(\omega, [\Gamma])$ est l'exposant du terme dominant de la série asymptotique.

Lemme 5. *Pour toute chaîne* $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$ *on a l'inégalité* $\beta(\omega, [\Gamma]) \leqslant -\alpha(\omega) - 1$, *où* $\alpha(\omega)$ *est l'ordre de la forme* ω. *Mieux, il existe un* $[\Gamma]$ *tel que* $\beta(\omega, [\Gamma]) = -\alpha(\omega) - 1$.

D é m o n s t r a t i o n. Voir les formules (4) à (6), p.p.245-246.

E. Indice d'oscillation complexe. Désignons par $\alpha_{\min}$ le plus petit des ordres des n-formes holomorphes sur X. Le nombre $-(1 + \alpha_{\min})$ est appelé *indice d'oscillation complexe* du point critique du germe f.

D'après le lemme 5, l'indice d'oscillation complexe est égal à la plus grande valeur de l'exposant du terme dominant du développement asymptotique de l'intégrale oscillante complexe de phase f étendue à une chaîne permise contenue au voisinage du point critique du germe f.

Exemple. Pour les points critiques des fonctions $x^{\mu+1}$, $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ l'indice d'oscillation complexe est égal à $-1/(\mu + 1)$ et à $-n/2$ respectivement.

Lemme 6. *Supposons que le germe* f *restreint au sous-espace réel* $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$ *ne prenne que des valeurs réelles. Alors l'indice d'oscillation du germe* $f|_{\mathbf{R}^n}$ *défini au* § 6 *est non supérieur à l'indice d'oscillation complexe du germe* f.

D é m o n s t r a t i o n. L'indice d'oscillation complexe est égal à la plus grande valeur possible de l'ordre de l'intégrale oscillante complexe de phase f pour tous $[\Gamma]$, ω. L'indice d'oscillation réel est égal à la plus grande valeur possible de l'ordre de l'intégrale oscillante complexe de phase f suivant un contour réel $[\Gamma_{\mathbf{R}}]$ pour ω quelconque (voir théorème 3 du § 11).

Comme on le voit dans l'exemple 1 du § 9, l'indice d'oscillation complexe peut être strictement supérieur à l'indice d'oscillation réel.

Définition. On appelle *indice de singularité complexe* d'un point critique du germe f le nombre $n/2 - (1 + \alpha_{\min})$ égal à l'indice d'oscillation complexe augmenté de $n/2$.

Exemple. Pour les points critiques des fonctions $x^{\mu+1}$, $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ l'indice de singularité complexe est égal à $1/2 - 1/(\mu + 1)$ et à 0 respectivement.

Deux points stablement équivalents ont même indice de singularité complexe, voir nº 13.3. E. L'indice de singularité complexe est non négatif, voir nº 13.3. C.

F. Ordre d'une forme et désingularisation du point critique du germe $\mathfrak{f}$. Conformément au théorème 3 du § 7, l'indice d'oscillation d'un point critique d'une fonction analytique réelle est égal au poids de la désingularisation de ce point. Formulons l'analogue analytique complexe de cette proposition.

Soit $\pi: Y \to X$ la désingularisation du point critique 0 d'une fonction $f: X \to S$ (où $f: X \to S$ est une spécialisation du germe $\mathfrak{f}$). Cela signifie que

1º Y est une variété analytique complexe non singulière de dimension n, et π une application holomorphe propre induisant un biholomorphisme entre $Y \setminus \pi^{-1}(0)$ et $X \setminus 0$;

2º $(f \circ \pi)^{-1}(0)$ est la réunion des diviseurs différentiables sur Y qui se rencontrent normalement (voir nºs 1 à 4 de la définition d'une désingularisation à la page 162).

La désingularisation existe en vertu du théorème de Hironaka [153].

Décomposons l'image réciproque du point critique de la fonction f en une réunion d'ensembles analytiques complexes non singuliers irréductibles $E_1, \ldots, E_N$ de dimension $(n - 1)$. A chacune de ces composantes irréductibles sont liés d'une façon bien définie deux entiers non négatifs : ce sont les multiplicités des zéros de la fonction $f \circ \pi$ et du jacobien de l'application π respectivement sur cette composante. Soient k, m ces nombres. Le nombre $-(m + 1)/k$ est appelé *poids de la composante* (cf. nº 7.3. A). Le maximum des poids des composantes $E_1, \ldots, E_N$ est appelé *poids de la désingularisation.*

Soit ω une n-forme différentielle holomorphe sur X. A la forme $\pi^*\omega$ sur Y et à une composante quelconque E_i, $i = 1, \ldots, N$, sont liés d'une façon bien définie deux entiers non négatifs: ce sont les multiplicités des zéros de la fonction f et de la forme $\pi^*\omega$ respectivement sur cette composante. Soient k, m ces nombres. Le nombre $-(m + 1)/k$ est appelé *poids de la composante par rapport à* ω. Le maximum des poids des composantes $E_1, \ldots, E_N$ est appelé *poids par rapport à ω de la désingularisation.*

On voit sans peine que le poids d'une désingularisation est égal à son poids par rapport à la forme $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Théorème 1 (voir [354]). 1. *L'indice d'oscillation complexe du point critique du germe $\mathfrak{f}$ est non supérieur au poids de la désingularisation*

du point critique. L'indice d'oscillation complexe est égal au poids de la désingularisation si ce dernier est non inférieur à -1.

2. *Soit* ω *une n-forme différentielle holomorphe sur* X. *Soit* $\alpha(\omega)$ *l'ordre de* ω. *Alors le nombre* $-(\alpha(\omega)+1)$ *est non supérieur au poids par rapport à* ω *de la désingularisation du point critique du germe* $\mathfrak{f}$. *Même plus, le nombre* $-(\alpha(\omega)+1)$ *est égal au poids par rapport à* ω *si ce dernier est non inférieur à* -1.

Remarque. Analogue au théorème 5 du § 7, le théorème 1 ci-dessus précise le théorème 7′ du § 10. Les assertions du théorème concernant les inégalités sont aussi démontrées dans [378].

Pour démontrer les inégalités dans les assertions du théorème, on doit relever une forme arbitraire ω sur Y et majorer moyennant k, m les intégrales de sa forme de Gelfand-Leray au voisinage d'un point quelconque de l'image réciproque du point critique du germe $\mathfrak{f}$.

Pour démontrer les égalités dans les assertions du théorème, il faut, pour une forme quelconque ω relativement à laquelle le poids de la désingularisation est non inférieur à -1, exhiber une famille continue d'homologie évanescente telle que les intégrales de la forme ω/df suivant les classes de cette famille aient l'ordre demandé. A cet effet, on détermine correctement la limite de la forme $\pi^*(\omega/df)$ sur chaque diviseur non compact $E_i \diagdown \left(\bigcup_{j\neq i} E_j\right) \cap E_i$, $i=1,\ldots,N$, ou, plus exactement, sur un revêtement convenable à $k(E_i)$ feuillets de ce diviseur non compact. Les formes limites se présentent comme des $(n-1)$-formes holomorphes sur les revêtements, méromorphes au voisinage des intersections des diviseurs deux à deux. Si le poids par rapport à ω est non inférieur à -1, les pôles de la forme limite sur un revêtement sont d'ordre non supérieur à 1. D'après le théorème de P. Deligne (voir [89, 139]), une telle forme engendre une classe de cohomologie non nulle. On choisit sur ce revêtement un cycle de dimension $(n-1)$ de telle façon que l'intégrale de la forme limite suivant ce cycle soit non nulle. Les translations de ce cycle du revêtement du diviseur dans les hypersurfaces de niveau de la fonction $f\circ\pi$ définissent la famille cherchée d'homologie évanescente. Voir [354], § 4.

G. Ordre de la forme et polyèdres de Newton. Reformulons les assertions du théorème 1 en termes de polyèdres de Newton du point critique du germe $\mathfrak{f}$ et de la forme ω.

Soit ω une n-forme différentielle holomorphe sur X. Définissons un nombre rationnel appelé éloignement des polyèdres de $\mathfrak{f}$ et de ω. Décomposons ω en $g\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$ et considérons le polyèdre de Newton $\Gamma(x_1\ldots x_n g)$ de la série de Taylor de g calculée au point critique du germe $\mathfrak{f}$ et multipliée par le produit de toutes les composantes. Considérons un second polyèdre de Newton: celui de la série de Taylor du point critique du germe $\mathfrak{f}$. On appelle *éloignement*

des polyèdres du germe $\mathfrak{f}$ *et de la forme* ω l'opposé de l'inverse du coefficient de plongement du premier polyèdre dans le second (voir n° 8.3 A, page 207).

Théorème 2 (voir [354], et aussi [378, 104]). *Supposons que la série de Taylor du point critique du germe* $\mathfrak{f}$ *a sa partie principale non* $\mathbb{C}$*-dégénérée.*

1. *L'indice d'oscillation complexe du point critique du germe* $\mathfrak{f}$ *est non supérieur à l'éloignement du polyèdre de Newton du point critique. L'indice d'oscillation complexe est égal à l'éloignement si le polyèdre de Newton est éloigné* (voir les définitions au § 6).

2. *Soit* ω *une n-forme différentielle holomorphe sur* X. *Soit* $\alpha(\omega)$ *l'ordre de* ω. *Alors le nombre* $-(\alpha(\omega)+1)$ *est non supérieur à l'éloignement des polyèdres du germe* $\mathfrak{f}$ *et de la forme* ω. *Mieux, le nombre* $-(\alpha(\omega)+1)$ *est égal à l'éloignement des polyèdres du germe et de la forme si l'éloignement est non inférieur à* -1.

Le théorème 2 se déduit du théorème 1 de la même façon que les théorèmes 3 et 4 du § 8 se déduisent du théorème 5 du § 7.

Exemple. Soient $\mathfrak{f} = x_1^6 + x_1^3x_2^2 + x_2^6$, $\omega = x_1x_2\cdot dx_1 \wedge dx_2$. Alors l'indice d'oscillation complexe du germe $\mathfrak{f}$ est égal à $-7/18$ et l'ordre de la forme ω est égal à $-7/9$.

Rapportons l'assertion de [375], cf. [303], renforçant le théorème 2 : le nombre $-(\alpha(\omega)+1)$ est égal à l'éloignement des polyèdres du germe et de la forme si l'éloignement ne peut pas être augmenté par adjonction à ω d'une forme du type $df \wedge d\eta$.

Les théorèmes 5, § 6 et 5, § 8 ont leurs analogues analytiques complexes, voir [354].

13.2. Filtration de Hodge et filtration par le poids dans les fibres de la fibration de cohomologie de Milnor du point critique.

A. Filtration de Hodge. Parmi les sections holomorphes de la fibration de cohomologie de Milnor, il y a une classe privilégiée de sections géométriques. Ce sont les sections engendrées par les formes de Guelfand-Leray des formes holomorphes de degré maximal. Les sections géométriques sont nombreuses (elles peuvent former une base de sections holomorphes de la fibration de cohomologie). Or, les sections géométriques présentent un comportement très particulier par rapport aux sections covariantement constantes quand le point de la base tend vers $t = 0$. Nous allons introduire une caractéristique des propriétés asymptotiques des sections géométriques : c'est la filtration de Hodge de la fibration de cohomologie de Milnor. La filtration de Hodge est une suite décroissante de sous-fibrations analytiques de la fibration de cohomologie de Milnor. Une classe de cohomologie de la fibration de Milnor (ou, de façon équivalente, un vecteur de la fibre de la fibration de cohomologie de Milnor) appartient à une k-ième sous-fibration si elle est une valeur de la

partie principale d'une section géométrique d'ordre non supérieur à $n - k - 1$.

Précisons la définition. Soit une suite de sous-fibrations analytiques $F^k(f^*): F^k \to S'$, $k \in \mathbf{Z}$, de la fibration de cohomologie du point critique du germe $\mathfrak{f}$. Cette suite est appelée *filtration de Hodge* de la fibration de cohomologie de Milnor $f^*: H^{n-1} \to S'$ du point critique de $\mathfrak{f}$. Les sous-fibrations seront définies par leurs sections. Supposons que les fibres F_t^k $(t \in S')$ soient des sous-espaces vectoriels engendrés par les valeurs des parties principales de sections géométriques d'ordre non supérieur à $n - k - 1$. S'il n'y a aucune section vérifiant cette condition, on pose $F_t^k = \{0\}$. Autrement dit, les F_t^k sont des sous-espaces sous-tendus par des vecteurs du type $s_{\max}[\omega](t)$, où ω est une n-forme différentielle holomorphe sur X d'ordre non supérieur à $n - k - 1$. Enumérons quelques conséquences évidentes de la définition.

Lemme 7. 1. *Pour tous $k \in \mathbf{Z}$, $t \in S'$ le sous-espace $F_t^k \subset H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ est la somme directe de ses intersections avec des sous-espaces de racines de l'opérateur de monodromie, i.e. la filtration de Hodge est invariante par la partie semi-simple de l'opérateur de monodromie.*

2. *Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $F^k(f^*): F^k \to S'$ est une sous-fibration analytique de la fibration de cohomologie de Milnor.*

3. *Les sous-fibrations de la filtration de Hodge forment une filtration décroissante, i.e. $F^{k+1} \subset F^k$ pour k quelconque.*

4. *Si $k \geqslant n$, alors les $F^k(f^*)$ sont des sous-filtrations de rang* 0.

5. *Il existe un k tel que F^k se confond avec H^{n-1}.*

D é m o n s t r a t i o n. Le p. 1 est une conséquence du p. 2 du lemme 1.

Démontrons le p. 2. Multiplier la forme par f revient à multiplier la section géométrique de la forme par t. Les sous-espaces F_t^k sont donc engendrés par les parties principales des sections géométriques dont les poids sont compris dans les limites $n - k - 2 < \alpha(\omega) \leqslant n - k - 1$. A présent le p. 2 découle du p. 2 du lemme 3.

Le p. 3 est évident. Le p. 4 est une conséquence du théorème 8 du § 10.

Pour démontrer le p. 5, on doit exhiber une collection de formes dont les parties principales forment une base de sections de la fibration de cohomologie de Milnor. D'après le théorème du discriminant, il existe sur X des n-formes holomorphes $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ dont les sections géométriques forment une base de sections de la fibration de cohomologie. Si les parties principales de ces formes forment une base de sections, le p. 5 est démontré, sinon les formes demandent à être corrigées. A cet effet, on prend une matrice $\mu \times \mu$ non dégénérée convenable Q de fonctions holomorphes sur S, on induit par l'application f une matrice $Q(f)$ de fonctions holomorphes sur X et l'on

considère les nouvelles formes $\omega_i' = \sum_j Q(f)_i^j \omega_j$, $j = 1, \ldots, \mu$. L'existence d'une matrice pour laquelle les parties principales forment une base de sections découle avec évidence du choix des formes $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$; voir [354].

Remarque. Du théorème de la structure de Hodge mixte formulé ci-dessous (voir aussi [354]) il ressort que F^0 se confond avec H^{n-1}.

Exemple 1. Soit $f = x^{\mu+1}$. La fibration de cohomologie de Milnor est une fibration de rang μ des classes d'homologie réduites de dimension 0 des fibres de la fibration de Milnor (dont chacune comprend $\mu + 1$ points). D'après le lemme 3 du § 11 on a $\{0\} = F^1 \subset F^0 = H^0$.

Exemple 2. Soit $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. La fibration de cohomologie de Milnor est de dimension 1. D'après l'exemple du n° 10.3 D, on a $\{0\} = F^{[n/2]+1} \subset F^{[n/2]} = H^{n-1}$, la sous-fibration $F^{[n/2]}(f^*)$ est engendrée par la partie principale de la forme $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

B. Filtration par le poids d'un opérateur linéaire (voir [137, 139, 310]). A un opérateur linéaire nilpotent (i.e. à un opérateur linéaire dont les valeurs propres sont toutes nulles) est liée une filtration croissante dans l'espace d'action de l'opérateur. Nous donnerons trois définitions équivalentes de cette filtration. La première est la moins invariante et la plus facile à comprendre. La dernière est la plus répandue et probablement la plus difficile à comprendre.

Soient H un espace vectoriel de dimension finie, $N: H \to H$ un opérateur linéaire nilpotent, k un entier. La suite de sous-espaces définie ci-dessous

$$\{0\} \subset \ldots \subset W_l \subset W_{l+1} \subset \ldots \subset H \tag{5}$$

est appelée *filtration par le poids de l'opérateur N d'indice central k.*

Définition 1. Considérons une base jordanienne quelconque de l'opérateur N. Chaque sous-espace de la filtration par le poids est engendré par un ensemble défini ci-après de vecteurs de la base jordanienne. Partageons en groupes les éléments de la base de telle façon que les vecteurs d'un même bloc jordanien soient dans le même groupe. Voici un groupe:

$$\square \to \square \to \ldots \to \square;$$

les carrés sont les vecteurs du groupe, les flèches représentent l'action de l'opérateur, le dernier vecteur passe en 0. Représentons maintenant les groupes les uns au-dessus des autres, en les disposant de façon symétrique par rapport à l'axe vertical et en laissant des blancs

larges d'un carré pour les flèches (fig. 79). Affectons chaque vecteur de base d'un nombre entier qui est sa distance (avec signe) à l'axe de symétrie (les nombres dans les carrés sur la figure). Soit $W_{k+l} \subset \subset H$ un sous-espace engendré par les vecteurs de la base d'indices non supérieurs à l (voir fig. 79).

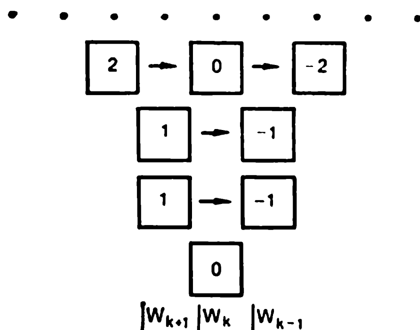


Fig. 79

Définition 2. Soit $h \in H$. Posons

$$l_+(h) = \min \{l \mid h \in \ker N^l\},$$
$$l_-(h) = \max \{l \mid h \in \operatorname{Im} N^l\}.$$

Imposons à W_{k+l} la condition

$$h \in W_{k+l} \Leftrightarrow l_+(h) - l_-(h) \leqslant l + 1.$$

Définition-lemme 3 (voir [310]). *Il existe une filtration et une seule* (5) *qui possède les propriétés suivantes:*

1° $N(W_l) \subset W_{l-2}$, $l \in \mathbf{Z}$. *Posons*

$$\operatorname{gr}_l W = W_l / W_{l-1}.$$

Conformément à 1°, N *induit l'application*

$$\operatorname{gr}_l W \to \operatorname{gr}_{l-2} W;$$

2° N^l: $\operatorname{gr}_{k+l} W \to \operatorname{gr}_{k-l} W$ *est un isomorphisme*, $l \in \mathbf{Z}$.

Lemme 8 (voir [310]). *Les définitions* 1, 2, 3 *sont équivalentes.*

C. Filtration par le poids de la fibration de cohomologie de Milnor. Définissons une suite de sous-fibrations analytiques

$$W_l(f^*): W_l \to S', \quad l \in \mathbf{Z}.$$

de la fibration de cohomologie de Milnor du point critique du germe f. Cette suite est appelée *filtration par le poids* de la fibration de cohomologie de Milnor du point critique du germe f.

Définissons d'abord les intersections des fibres des sous-fibrations $\{W_l(f^*)\}$ avec les sous-espaces de racines de l'opérateur de monodromie, puis mettons les fibres des $\{W_l(f^*)\}$ égales à la somme directe de leurs intersections avec les sous-espaces de racines.

Désignons par $H_\lambda^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ le sous-espace de racines de valeur propre λ de l'opérateur de monodromie dans $H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$. Soit N le logarithme de la partie unipotente de l'opérateur de monodromie. N est un opérateur nilpotent qui commute à l'opérateur de monodromie ; autrement dit, N laisse inchangés les sous-espaces de racines de ce dernier opérateur.

Soit $\lambda \neq 1$. Prenons alors comme filtration par le poids sur $H_\lambda^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ la filtration par le poids de N d'indice central $n-1$. Soit $\lambda = 1$. Nous prendrons alors comme filtration par le poids sur $H_1^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ la filtration par le poids de N d'indice central n. Posons la fibre au-dessus de t de la fibration $W_l(f^*)$ égale à

$$W_{l,t} = \bigoplus_\lambda W_l(H_\lambda^{n-1}(X_t, \mathbf{C})).$$

Enumérons quelques conséquences évidentes de la définition.

Lemme 9. 1. *La filtration par le poids est une suite croissante de sous-fibrations analytiques de la fibration de cohomologie de Milnor.*

2\. *La filtration par le poids est invariante par la connexion de Gauss-Manin (i.e. les dérivées covariantes des sections de chaque sous-fibration appartiennent à la même sous-fibration).*

3\. *La filtration par le poids est invariante par l'action de la partie semi-simple de l'opérateur de monodromie.*

4\. *On a pour tout $l \in \mathbf{Z}$ et pour tout point $t \in S'$*

$$N(W_{l,t}) \subset W_{l-2,t}.$$

Mieux, si $\lambda \neq 1$, alors

$$N^l : \mathrm{gr}_{n-1+l} W(H_\lambda^{n-1})_t \to \mathrm{gr}_{n-1-l} W(H_\lambda^{n-1})_t$$

est un isomorphisme, et si $\lambda = 1$, alors

$$N^l : \mathrm{gr}_{n+l} W(H_1^{n-1})_t \to \mathrm{gr}_{n-l} W(H_1^{n-1})_t$$

est un isomorphisme.

D é m o n s t r a t i o n. Evidente.

Formulons encore une propriété de la filtration par le poids. Rappelons qu'il existe dans les fibres de la fibration de cohomologie de Milnor une opération de passage au conjugué complexe invariante par la connexion de Gauss-Manin : l'espace $H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ est le complexifié de l'image naturelle dans $H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ de l'espace $H^{n-1}(X_t, \mathbf{R})$. Même plus, on trouve dans les fibres une structure d'entiers invari-

ante par la connexion de Gauss-Manin : c'est le réseau d'entiers dans $H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$, qui est l'image naturelle du groupe $H^{n-1}(X_t, \mathbf{Z})$ dans $H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$.

Lemme 10. *Pour tout $l \in \mathbf{Z}$ les fibres de la sous-fibration $W_l(f^*)$ sont invariantes par l'opération de passage au conjugué complexe. Mieux, toute fibre de la sous-fibration $W_l(f^*)$ se laisse définir par des équations à coefficients entiers en coordonnées liées à la base du réseau d'entiers.*

La démonstration découle avec évidence de la définition de la filtration par le poids.

Exemple 1. Soit $f = x^{\mu+1}$. Les valeurs propres de l'opérateur de monodromie sont $\exp(2\pi ik/(\mu + 1))$, $k = 1, \ldots, \mu$. Donc

$$\{0\} = W_{-1} \subset W_0 = H^0.$$

Exemple 2. Soit $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. L'unique valeur propre de l'opérateur de monodromie est $(-1)^n$, donc

$$\{0\} = W_{2[n/2]-1} \subset W_{2[n/2]} = H^{n-1}.$$

Exemple 3. Supposons que l'opérateur de monodromie en cohomologie évanescente au point critique d'une fonction holomorphe de n variables soit d'ordre fini (tel est par exemple le cas d'un point critique d'une fonction (semi-)quasi homogène). Alors

$$\{0\} = W_{n-2} \subset W_{n-1} \subset W_n = H^{n-1},$$

où

$$W_{n-1} = \bigoplus_{\lambda \neq 1} H_\lambda^{n-1}.$$

Remarques. 1. Nous avons indiqué, dans la définition de la filtration par le poids, que l'indice central de la filtration dépend de la valeur propre de l'opérateur de monodromie. Cette dépendance découle du théorème de la structure de Hodge mixte que nous formulerons un peu plus loin. On choisit l'indice central de telle façon que la filtration par le poids et la filtration de Hodge forment ensemble la structure de Hodge mixte.

2. D'après le théorème 12 du § 3, la taille de tout bloc de la forme jordanienne de l'opérateur de monodromie du point critique d'une fonction de n variables est non supérieure à n. On a donc *a priori*

$$\{0\} = W_{-1}(H_{\lambda\neq 1}^{n-1} \subset W_0(H_{\lambda\neq 1}^{n-1}) \subset \ldots \subset W_{2n-2}(H_{\lambda\neq 1}^{n-1}) = H_{\lambda\neq 1}^{n-1},$$

$$\{0\} = W_0(H_1^{n-1}) \subset W_1(H_1^{n-1}) \subset \ldots \subset W_{2n-1} = (H_1^{n-1}) = H_1^{n-1}.$$

Or, d'après le théorème de la structure de Hodge mixte que nous allons voir, la taille de tout bloc jordanien de valeur propre 1 est

non supérieure à $n - 1$. On a donc $W_1(H_1^{n-1}) = \{0\}$, $W_{2n-2}(H_1^{n-1}) = H_1^{n-1}$, $W_{2n-2} = H^{n-1}$.

D. Position relative de la filtration par le poids et de la filtration de Hodge (propriétés élémentaires).

Lemme 11. *Pour tous $k, l \in \mathbf{Z}$ l'intersection des espaces F^k, W_l et la projection sur la base forment ensemble une sous-filtration holomorphe*

$$F^k \cap W_l(f^*) : F^k \cap W_l \to S'$$

de la fibration de cohomologie de Milnor du point critique du germe $\mathfrak{f}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que toutes les fibres de la projection $F^k \cap W_l \to S'$ sont de même dimension. Puisque la sous-fibration $F^k(f^*)$ est engendrée par des parties principales de formes de poids donnés, il suffit de montrer que les valeurs de la partie principale d'une forme arbitraire ou bien appartiennent, ou bien n'appartiennent pas à W_l simultanément pour tous les points de la base (voir p. 2 du lemme 3). Montrons-le. D'après la formule (4) de la page 283, la valeur de la partie principale $s_{\max}[\omega](t)$ au point $t_\omega \in S'$ appartient à W_l si et seulement si le vecteur $A^{\omega}_{0,\alpha,\omega}(t)$ appartient à W_l. Ce vecteur appartient à W_l si et seulement si $A^{\omega}_{0,\alpha,\omega}$ est une section de la sous-fibration $W_l(f^*)$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour tout l, désignons par

$$\mathrm{gr}_l W(f^*) : \mathrm{gr}_l W \to S'$$

la fibration quotient des sous-fibrations $W_l(f^*)$, $W_{l-1}(f^*)$; ses fibres sont des espaces quotients

$$\mathrm{gr}_l W_t = W_{l,t}/W_{l,-1,t},$$

où $t \in S'$. La fibration $\mathrm{gr}_l W(f^*)$ admet une connexion induite de Gauss-Manin, d'après le p. 2 du lemme 9. On définit dans les fibres de $\mathrm{gr}\, W_l(f^*)$ une structure réelle et une structure entière (d'après le lemme 10), ainsi que l'action de la partie semi-simple de l'opérateur de monodromie (en vertu du p. 3 du lemme 9).

Remarque. L'opérateur de monodromie agit dans les fibres de la fibration $\mathrm{gr}_l W(f^*)$ comme sa partie semi-simple, voir pp. 3 et 4 du lemme 9.

Corollaire du lemme 11. *La projection de $F^k \cap W_l(f^*)$ dans $\mathrm{gr}_l W(f^*)$ définit une sous-fibration*

$$F^k \mathrm{gr}_l W(f^*) : F^k\, \mathrm{gr}_l W \to S'$$

qui a comme fibres des espaces quotients

$$F^k \operatorname{gr}_l W_t = (F_t^k \cap W_{l,t} + W_{l-1,t})/W_{l-1,t},$$

où $t \in S'$.

La sous-fibration $F^k \operatorname{gr}_l W\ (f^*) \subset \operatorname{gr}_l W\ (f^*)$ est invariante par l'action de la partie semi-simple de l'opérateur de monodromie (lemmes 7, 9) et invariante par la connexion de Gauss-Manin (p. 3 du lemme 3).

Considérons l'opérateur N, qui est logarithme de la partie unipotente de l'opérateur de monodromie. L'opérateur N définit un morphisme de fibrations $N: \operatorname{gr}_l W \to \operatorname{gr}_{l-2} W$ (i.e. une application linéaire fibre à fibre qui commute à la projection sur la base et qui laisse inchangée la classe de sections holomorphes).

Lemme 12. *Pour tous* $k, l \in \mathbf{Z}$ *on a*

$$N(F^k \operatorname{gr}_l W) \subset F^{k-1} \operatorname{gr}_{l-2} W.$$

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de montrer que si la n-forme différentielle holomorphe ω possède les propriétés suivantes:

a) elle est d'ordre non supérieur à $n - k - 1$;

b) sa partie principale est une section de la sous-fibration $W_l\ (f^*)$,

alors la projection de la section $Ns_{\max}[\omega]$ dans la fibration quotient $\operatorname{gr}_{l-2} W\ (f^*)$ est une section de la sous-fibration $F^{k-1} \operatorname{gr}_{l-2} W\ (f^*)$.

Remarquons qu'on a d'après le lemme 1

$$Ns_{\max}[\omega] = -2\pi i t^{\alpha} (A^{\omega}_{1,\alpha(\omega)} + \ldots + (\ln t)^{n-2} A^{\omega}_{n-1,\alpha(\omega)}/(n-2)!. \quad (6)$$

Il suffit donc d'exhiber deux formes et leur combinaison linéaire dont la partie principale possède les propriétés suivantes:

c) elle est une section de la sous-fibration $W_{l-2}\ (f^*)$;

d) sa projection dans $\operatorname{gr}_{l-2} W\ (f^*)$ est proportionnelle à la projection de la section $Ns_{\max}[\omega]$;

e) sa projection dans $\operatorname{gr}_{l-2} W\ (f^*)$ est une section de la sous-fibration $F^{k-1} \operatorname{gr}_{l-2} W\ (f^*)$.

La première forme est $f\omega$,

$$s_{\max}[f\omega] = t^{\alpha(\omega)+1} (A^{\omega}_{0,\alpha(\omega)} + \ldots + (\ln t)^{n-1} A^{\omega}_{n-1,\alpha(\omega)}/(n-1)!).$$

La seconde forme est une forme quelconque $\psi = df \wedge d\eta$, où $d\eta = \omega$. D'après la formule (3) de la page 231, on a

$$s_{\max}[\psi] = \int_0^t s_{\max}[\omega](u)\,du = t^{\alpha(\omega)+1} (A^{\omega}_{0,\alpha(\omega)}/(\alpha(\omega)+1) -$$

$$- A^{\omega}_{1,\alpha(\omega)}/(\alpha(\omega)+1)^2 + \ldots), \quad (7)$$

où sont omis les termes qui contiennent soit $A^{\omega}_{k,\alpha(\omega)}$ avec $k \geqslant 2$, soit $(\ln t)^k$ avec $k \geqslant 1$. La combinaison linéaire présentant les propriétés

demandées c) à e) est

$$f\omega - (\alpha(\omega) + 1)\psi.$$

En effet,

$$s_{\max}[f\omega - (\alpha(\omega) + 1)\psi] = t^{\alpha(\omega)+1}(A^{(\omega)}_{j,\alpha(\omega)}/(\alpha(\omega) + 1) + \ldots), \quad (8)$$

où sont omis les termes de la même nature. Les propriétés c) et d) ont lieu d'après le lemme 1. La combinaison linéaire étant d'ordre $\alpha(\omega) + 1$, on a la propriété e). Le lemme est démontré.

Remarque. Comme le montrent les formules (6) et (8), l'opération de passage de $s_{\max}[\omega]$ à $s_{\max}[f\omega - (\alpha(\omega) + 1)\psi]$ ressemble beaucoup à l'application à $s_{\max}[\omega]$ du logarithme de la partie unipotente de l'opérateur de monodromie. De plus, les formes $f\omega$ et $f\omega -$ $- (\alpha(\omega) + 1)\psi$ engendrent un seul et même élément dans $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$, où $\Omega^p(X)$ sont des p-formes holomorphes sur X. Ainsi donc, les formules (6) et (8) illustrent l'analogie entre l'action du logarithme de la partie unipotente de la monodromie en cohomologie et l'action de l'opérateur de multiplication par f dans $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$. Pour plus de détails, voir n° 14.3, E, ainsi que [353].

Formulons maintenant le théorème de la structure de Hodge mixte. L'assertion de ce théorème, ainsi que ses conséquences, seront discutées tout au long du § 14. Une définition détaillée de la structure de Hodge mixte sera donnée au n° 14.1.

Théorème 3 (de la structure de Hodge mixte ; voir [351, 352, 354]). *La filtration par le poids et la filtration de Hodge forment la structure de Hodge mixte dans les fibres de la fibration de cohomologie de Milnor du point critique, i.e. pour tous k, $l \in \mathbf{Z}$, $t \in S'$ on a*

$$\mathrm{gr}_l W_t = F^k \mathrm{gr}_l W_t \oplus \overline{F^{l-k+1} \mathrm{gr}_l W_t}, \quad (9)$$

où $\oplus$ est la somme directe et la barre désigne le conjugué complexe.

Remarque. C'est J. Steenbrink qui a défini la structure de Hodge mixte en cohomologie évanescente (cf. [334]). La filtration par le poids définie en C ci-dessus coïncide avec la filtration par le poids de Steenbrink. Quant à la filtration de Hodge définie en A, elle diffère en général de la filtration de Hodge au sens de Steenbrink. La filtration de Hodge de A et la filtration de Hodge au sens de Steenbrink se confondent sur les fibrations quotients de la filtration par le poids. Elles se laissent facilement exprimer l'une en fonction de l'autre : la sous-fibration de Hodge $F^k(f^*)$ de A est engendrée par les parties principales des formes d'ordres appartenant au demi-intervalle $(n - k - 2, n - k - 1]$; si $s_{\max}[\omega]$ est une partie principale de ce type, alors $(\Delta_{\partial/\partial t})^{n-k-1} s_{\max}[\omega]$ est une section de la sous-fibration de Hodge $F^k_{St}(f^*)$ au sens de Steenbrink. La définition de

la filtration de Hodge chez Steenbrink fait intervenir la désingularisation du point critique du germe $\mathfrak{f}$ et n'utilise pas les développements asymptotiques des intégrales de formes holomorphes; pour de plus amples détails, voir [334, 352, 354, 355].

Démonstration du théorème. Voir [352, 354] (le schéma de la démonstration est esquissé dans [352], les détails qui manquent et une démonstration indépendante pour le cas $n = 2$ sont donnés dans [354]). La démonstration s'appuie sur une théorie profonde et non triviale des déformations des structures de Hodge des cohomologies des variétés kählériennes compactes non singulières. Cette théorie est due à Griffiths, Schmid, Deligne (voir [137, 139, 310, 89]). On définit en cohomologie d'une variété kählérienne compacte non singulière une filtration naturelle, à savoir une structure de Hodge (voir [396, 69]). A chaque variété est associé un point dans l'espace classifiant de toutes les structures de Hodge. Si la variété dépend holomorphiquement des paramètres, on a une application holomorphe de l'espace des paramètres dans l'espace classifiant des structures de Hodge (voir [137, 139, 310]). Cette application est appelée *application de périodes*. Les applications de périodes ont des propriétés fort spéciales, déterminées par la courbure négative de l'espace classifiant des structures de Hodge. Si l'espace des paramètres d'une famille de variétés est un disque pointé, on peut, en observant le comportement asymptotique de l'application des périodes lorsque le paramètre de la famille tend vers un point déterminé du disque, cerner la dégénérescence des variétés non singulières de la famille pendant ce processus (voir [139, 310]). Cette théorie s'applique à la situation locale décrite dans le théorème 3 de la façon suivante. On prend comme représentant du germe $\mathfrak{f}$ un polynôme P pour lequel le point 0 est le seul point critique de valeur critique nulle. On considère les compactifiés Y_t dans CP^n des hypersurfaces de niveau du polynôme (t est la valeur du niveau). On peut choisir P de telle façon que pour petits $t \neq 0$ les hypersurfaces Y_t soient non singulières et que l'hypersurface Y_0 possède un point singulier unique en 0. La fibre X_t de la fibration de Milnor du point critique 0 de P est une partie de l'hypersurface Y_t. On peut chosir P de telle façon que le plongement $X_t \hookrightarrow Y_t$ induise l'épimorphisme $H^{n-1}(Y_t) \to H^{n-1}(X_t)$ (il faut alors que le polynôme soit d'un degré suffisamment élevé, voir [307]). Il existe une application naturelle (définie à l'homotopie près) $p: Y_t \to Y_0$ par laquelle le point singulier est l'image de la fibre X_t de la fibration de Milnor (fig. 80). En accord avec la suite exacte du couple $X_t \subset Y_t$, on a l'isomorphisme

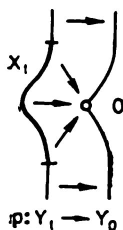


Fig. 80

$$\pi : H^{n-1}(Y_t)/p^*H^{n-1}(Y_0) \to H^{n-1}(X_t).$$

De la théorie des déformations des structures de Hodge il ressort qu'on a sur $H^{n-1}(Y_t)/p^*H^{n-1}(Y_0)$ deux filtrations naturelles, à savoir la filtration par le poids et la filtration de Hodge, qui possèdent les propriétés exprimées par la formule (9) (voir aussi [310, 76, 307]). On montre que l'isomorphisme π en fait nos filtrations par le poids et de Hodge (plus exactement, la filtration de Hodge définie en A devient filtration de Hodge au sens de Steenbrink, voir [352]). Cela démontre le théorème 3.

Remarque. Expliquons pourquoi dans la définition de la filtration par le poids (n° 13.2) l'indice central dépend de la valeur propre de l'opérateur du monodromie.

Dans l'espace $H^{n-1}(Y_t)$ agit l'opérateur de monodromie engendré par le parcours du paramètre t autour du point $t = 0$. Pour des raisons évidentes $p^*H^{n-1}(Y_0)$ appartient au sous-espace des vecteurs propres de valeur propre 1. On montre que $p^*H^{n-1}(Y_0)$ se confond avec ce sous-espace. La démonstration est fondée sur le théorème des cycles invariants (voir [76, 332]). On peut aussi déduire facilement cette assertion directement du théorème fondamental de Schmid [310] à l'aide du théorème du déterminant 1, § 12 (voir aussi la démonstration du lemme 2 dans [352]).

La filtration par le poids sur $H^{n-1}(Y_t)/p^*H^{n-1}(Y_0)$ mentionnée plus haut est induite par une filtration convenable sur $H^{n-1}(Y_t)$ (voir [307]). Cette filtration est précisément la filtration par le poids du logarithme de la partie unipotente de l'opérateur de monodromie d'indice central $n - 1$ (elle se définit de la même manière sur tous les sous-espaces de racines). Puisque le noyau de l'épimorphisme $H^{n-1}(Y_t) \twoheadrightarrow H^{n-1}(X_t)$ est un sous-espace de vecteurs invariants, la projection dans $H^{n-1}(Y_t)$ de la filtration pondérale indiquée sur $H^{n-1}(Y_t)$ se confond avec la filtration pondérale du n° 13.2.

E. Premières conséquences. Pour tous $k, l \in \mathbf{Z}$, $t \in S'$ le sous-espace de Hodge $F^k \operatorname{gr}_l W_t$ se décompose en somme directe de ses intersections avec les sous-espaces de racines de l'action de l'opérateur de monodromie sur $\operatorname{gr}_l W_t$: $F^k \operatorname{gr}_l W_t = \bigoplus_\lambda F^k \operatorname{gr}_l W_{t,\lambda}$, où λ sont les valeurs propres de l'opérateur de monodromie. L'opérateur de monodromie conservant la structure d'entiers de $\operatorname{gr}_l W_t$, le passage au conjugué complexe permute les espaces des racines répondant aux valeurs λ, $\bar{\lambda}$. On déduit ainsi de (9) le

Corollaire 1. *Pour toute valeur propre* λ *on a*

$$\operatorname{gr}_l W_{t,\lambda} = F^k \operatorname{gr}_l W_{t,\lambda} \oplus \overline{F^{l-k+1} \operatorname{gr}_l W_{t,\bar{\lambda}}}. \tag{10}$$

Corollaire 2 (voir [334]). *La taille de tout bloc de la forme jordanienne de l'opérateur de monodromie en cohomologie est non supérieure à n. De plus elle est non supérieure à n — 1 si la valeur propre du bloc est* 1.

Exemple. Si $n = 1$, l'opérateur de monodromie n'a aucune valeur propre égale à 1, et il existe dans l'espace de cohomologie évanescente une base de vecteurs propres de l'opérateur de monodromie (voir exemple p. 294).

Démonstration du corollaire 2. D'après le lemme 7, l'espace $F^k \operatorname{gr}_l W_t$ est de dimension 0 pour $k \geqslant n$. D'après la formule (10), l'espace $\operatorname{gr}_l W_{t,\lambda}$ est de dimension 0 pour $l \geqslant 2n - 1$, ce qu'il fallait démontrer (voir C ci-dessus).

Corollaire 3. *Pour tous k, $l \in \mathbf{Z}$, $t \in S'$ l'opérateur N induit les isomorphismes*

$$N^l : F^k \operatorname{gr}_{n-1+l} W_{t,\lambda} \xrightarrow{\sim} F^{k-l} \operatorname{gr}_{n-1-l} W_{t,\lambda}. \tag{11}$$

si $\lambda \neq 1$, *et*

$$N^l : F^k \operatorname{gr}_{n+l} M_{t,\lambda=1} \xrightarrow{\sim} F^{k-l} \operatorname{gr}_{n-l} W_{t,\lambda=1}, \tag{12}$$

si $\lambda = 1$.

Démonstration du corollaire 3. D'après le lemme 12, les images des premiers membres sont contenues dans les seconds. D'après le p. 4 du lemme 9 et la formule (10), les images des premiers membres ne peuvent être plus petites que celles des seconds.

13.3. Spectre du point critique.

A. Couples spectraux du point critique. Définissons une collection non ordonnée de μ couples de nombres caractérisant la position relative des filtrations pondérale et de Hodge.

Soit pour tous k, $l \in \mathbf{Z}$ la fibration quotient

$$\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W(f^*) = F^k \operatorname{gr}_l W(f^*)/F^{k+1} \operatorname{gr}_l W(f^*)$$

D'après le lemme 7, on a sur cette fibration une action induite de la partie semi-simple de l'opérateur de monodromie. Choisissons une fois pour toutes une fibre de cette fibration et associons à chaque valeur propre λ de l'action dans la fibre de la partie semi-simple un couple

$$\begin{aligned} &(n-1-l_k(\lambda),\ l), \quad \text{si } \lambda \neq 1, \\ &(n-1-l_k(\lambda),\ l-1) \quad \text{si } \lambda = 1; \end{aligned} \tag{13}$$

ici $l_k(\lambda)$ est tel que $\exp(2\pi i l_k(\lambda)) = \lambda$, $k \leqslant \operatorname{Re} l_k(\lambda) < k + 1$. Construite de cette façon (pour tous k, l, λ), la collection non ordonnée de μ couples de nombres est appelée *ensemble de couples spectraux du point critique du germe* $\mathfrak{f}$. La collection non ordonnée des μ premiers nombres des couples est appelée *ensemble de valeurs spectrales*, ou *spectre*, *du point critique*. Il est clair que ces ensembles ne dépendent pas du choix de la fibre des fibrations $\{\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W(f^*)\}$.

Expliquons pourquoi on associe à une valeur propre λ le nombre $n - 1 - l_k(\lambda)$ qui est une des valeurs du quotient par $2\pi i$ du logarithme de $1/\lambda$. Par définition de la filtration de Hodge, la fibration quotient $F^k(f^*)/F^{k+1}(f^*)$ est engendrée par les valeurs des parties principales de formes d'ordre $\leqslant n - 1 - k$. Soit ω une forme dont l'ordre est sur $(n - 2 - k, n - 1 - k]$ et dont la partie principale engendre une section non nulle dans $F^k(f^*)/F^{k+1}(f^*)$. D'après le lemme 1, cette section non nulle appartient au sous-espace de racines de valeur propre $\lambda = \exp(-2\pi i\alpha(\omega))$ de l'action de la partie semi-simple de l'opérateur de monodromie. Exprimons l'ordre de la forme ω en fonction de λ: il vient $n - 1 - l_k(\lambda) = n - 1 - k - l_0(\lambda) = \alpha(\omega)$. Ainsi donc, $n - 1 - l_k(\lambda)$ est le plus petit α pour lequel on a des formes d'ordre α dont les parties principales engendrent dans $F^k(f^*)/F^{k+1}(f^*)$ le sous-espace de racines de valeur propre λ de l'action de la partie semi-simple de l'opérateur de monodromie. Le nombre α intervient dans le spectre exactement autant de fois qu'il y a d'unités dans la différence des dimensions des espaces des parties principales des formes d'ordre α et des formes d'ordre $\alpha - 1$.

Les seconds nombres des couples spectraux indiquent les niveaux de la filtration pondérale auxquels on voit apparaître de nouvelles parties principales. Par exemple, pour $k = n - 1$ on a

$$F^{n-1}(f^*)/F^n(f^*) = F^{n-1}(f^*),$$

les nombres $n - 1 - l_{n-1}(\lambda)$ sont dans le demi-intervalle $(-1, 0]$. Si $\omega_1, \ldots, \omega_s$ sont des n-formes différentielles holomorphes d'ordres non positifs dont les parties principales forment une base de sections de la fibration $F^{n-1}(f^*)$, les ordres de ces formes constituent la partie du spectre appartenant à $(-1, 0]$.

Remarquons que le second nombre du couple caractéristique dépend de la valeur propre λ, voir (13).

Dans la définition de la filtration pondérale, nous avons augmenté d'une unité les indices sur le sous-espace de racines de valeur propre 1, afin de vérifier l'assertion du théorème 3. Dans (13), nous avons diminué l'indice d'une unité, voulant profiter du fait que les propositions relatives aux quantités de ce type sont d'une grande simplicité (voir par exemple ci-dessous les symétries b) et c), lemme 14, des couples spectraux).

Citons en conclusion une autre définition du spectre.

Lemme 13 (voir [354, 355]). *Soient $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ des n-formes différentielles holomorphes sur X. Supposons que*

1) *la somme des ordres de ces formes soit $\mu(n/2 - 1)$,*
2) *la fonction*

$$\det{}^2 : t \mapsto \det{}^2\left(\int_{\delta_l(t)} \omega_j/df\right), \quad j, l = 1, \ldots, \mu,$$

où $\delta_1, \ldots, \delta_\mu$ est une base de sections covariantement constantes de la fibration d'homologie de Milnor, s'annule pour $t = 0$ à l'ordre $\mu(n - 2)$. Alors les ordres $\alpha(\omega_1), \ldots, \alpha(\omega_\mu)$ de ces formes constituent le spectre du point critique 0 du germe $\mathfrak{f}$.

Démonstration. On l'obtient sans difficulté en confrontant le lemme 4, le théorème du déterminant 1 du § 12 et les définitions de la filtration de Hodge et du spectre.

Corollaire. *La somme des valeurs spectrales du point critique du germe $\mathfrak{f}$ est égale à $\mu(n/2 - 1)$.*

Notons que la démonstration du corollaire n'utilise pas le théorème de la structure de Hodge mixte.

Remarque. De la définition des couples spectraux, il découle avec évidence que la somme de tous les seconds nombres des couples spectraux est égale à $\mu(n - 1)$.

B. Nombres de Hodge. Par analogie aux couples spectraux, on définit les nombres de Hodge $h^{k,m}$, $h_\lambda^{k,m}$. Le nombre $h_\lambda^{k,m}$ désigne la dimension du sous-espace de racines de valeur propre λ de l'action, dans la fibre de $\mathrm{gr}^k F \mathrm{gr}_{k+m} W(f^*)$, de la partie semi-simple de l'opérateur de monodromie. Le nombre $h^{k,m}$ est le rang de la fibration $\mathrm{gr}^k F \mathrm{gr}_{k+m} W(f^*)$. Par définition, $h^{k,m} = \sum\limits_\lambda h_\lambda^{k,m}$. Les couples spectraux et les nombres de Hodge $h_\lambda^{k,m}$ se définissent mutuellement.

Exemple 1. Soit $\mathfrak{f} = x^{\mu+1}$. Alors $h^{0,0} = \mu$; $h_\lambda^{0,0} = 1$ pour $\lambda = \exp(2\pi ik/(\mu + 1))$, $k = 1, \ldots, \mu$; les couples spectraux sont $(-k/(\mu + 1), 0)$, où $k = 1, \ldots, \mu$.

Exemple 2. Soit $\mathfrak{f} = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Alors $h^{[n/2],[n/2]} = h_{(-1)^n}^{[n/2],[n/2]} = 1$; le couple spectral est $(n/2 - 1, n - 1)$.

C. Symétries.

Lemme 14 (voir [334, 354]). *Pour tous k, m on a les symétries*

a) $h_\lambda^{k,m} = h_{\bar\lambda}^{m,k}$;

b) $h_\lambda^{k,m} = h_\lambda^{n-1-m,n-1-k}$ si $\lambda \neq 1$;

c) $h_1^{k,m} = h_1^{n-m,n-k}$.

Démonstration. Le lemme se déduit du théorème 3 (voir n° 14.2 ci-après).

Reformulons ces symétries en termes de couples spectraux.

a) Le nombre de couples égaux à (α, l) est égal au nombre de couples égaux à $(2n - 3 - l - \alpha, l)$ (voir les exemples).

b) et c) Le nombre de couples égaux à (α, l) est égal au nombre de couples égaux à $(\alpha + l - n + 1, 2n - 2 - l)$.

Les relations a) à c) expriment la symétrie entre les dimensions des espaces des parties principales des formes d'un degré donné qui sont sections d'une fibration donnée de la filtration pondérale (plus exactement, la symétrie entre les accroissements des dimensions).

Combinant a) à c), nous obtenons le

Corollaire. 1. *Le spectre du point critique est symétrique par rapport au point* $n/2 - 1$.

2. *L'indice de singularité complexe* (voir n° 13.1 E) *est non négatif.*

En effet, l'indice de singularité complexe est égal à $n/2 - (1 + \alpha_{\min})$, où $\alpha_{\min}$ est la plus petite valeur spectrale.

Notons une propriété du spectre: *si le spectre du point critique est concentré au point* $n/2 - 1$, *i. e. se compose de plusieurs nombres* $n/2 - 1$, *le point critique est non dégénéré et le spectre se réduit à un nombre unique* $n/2 - 1$. Cette propriété est une conséquence directe du théorème 7 du § 3 sur la trace de l'opérateur de monodromie.

D. Spectre et polyèdre de Newton. Le spectre est lié à la géométrie du polyèdre de Newton de la série de Taylor du point critique si la partie principale de la série de Taylor est non C-dégénérée (voir [303, 375] et aussi [334, 15, 87]).

Définissons le spectre à l'aide du polyèdre de Newton pour $n = 2$. Dans ce cas le spectre est symétrique par rapport au point 0 et appartient à l'intervalle $(-1, 1)$; il suffit donc de décrire sa partie située dans $(-1, 0]$. Nous avons vu en A qu'il suffit pour cela d'exhiber des formes d'ordres non négatifs dont les parties principales engendrent une base de sections de la fibration $F^1(\mathfrak{f}^*)$ et de calculer les ordres de ces formes.

Considérons le polyèdre de Newton de la série de Taylor du point critique du germe $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$. On dit que x^m est un *monôme sous-diagramme* si le vecteur $m + (1, \ldots, 1)$ n'appartient pas à l'intérieur du polyèdre de Newton.

Exemple. Soit $\mathfrak{f} = x_1^6 + x_1^3 x_2^2 + x_2^5$. On voit sur la figure 81 les vecteurs $m + (1, 1)$ pour les monômes sous-diagramme x^m.

Associons à chaque monôme sous-diagramme x^m une forme $x^m\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, dite *forme sous-diagramme.* Supposons que la partie principale de la série de Taylor du point critique du germe $\mathfrak{f}$ soit non C-dégénérée. Alors l'ordre de chaque forme sous-diagramme est non positif et se calcule d'après le degré du monôme à l'aide du théorème 2 (l'ordre est égal à l'éloignement des polyèdres du germe $\mathfrak{f}$ et de la forme).

Dans notre exemple les formes sous-diagramme sont d'ordres $-3/5, -5/12, -3/12, -1/12, -2/5, -1/5, -1/5, 0, 0, 0$.

Théorème 4 (voir [354]). *Si la partie principale de la série de Taylor du point critique du germe* $\mathfrak{f} : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ *est non* **C***-dégénérée, alors les parties principales des formes sous-diagramme induisent une base de sections dans la fibration* F^{n-1} (f^*).

Corollaire. *Les ordres des formes sous-diagramme constituent la partie du spectre du point critique de* $\mathfrak{f}$ *appartenant à* $(-1, 0]$. *En particulier, pour* $n = 2$ *les ordres des formes sous-diagramme définissent complètement le spectre.*

Remarques. 1. Pour décrire le spectre dans le cas de $n = 2$, il est commode de noter non seulement les exposants des monômes sous-diagramme mais aussi ceux des monômes symétriques situés au-dessus

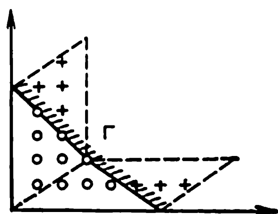


Fig. 81

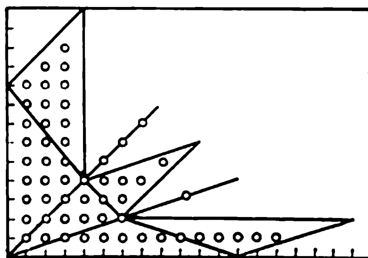


Fig. 82

du diagramme. Les éloignements des couples de polyèdres du germe $\mathfrak{f}$ (à partie principale non **C**-dégénérée) et des monômes notés forment le spectre du point critique de $\mathfrak{f}$. On a représenté sur la figure 82 les exposants, translatés de (1, 1), des monômes sous-diagramme, ainsi que des monômes correspondants au-dessus du diagramme pour $\mathfrak{f} = x_2^9 + x_1^4 x_2^4 + x_1^6 x_2^2 + x_1^{12}$.

2. Utilisant le corollaire du théorème 4, on arrive à décrire le spectre pour $n = 3$ aussi. La partie du spectre appartenant à $(-1, 0]$ est donnée par le corollaire. Sa partie située dans $[1, 2)$ est définie par la symétrie du spectre par rapport au nombre 1/2. Le reste du spectre appartient à $(0, 1)$. Chaque valeur spectrale est quotient par $2\pi i$ du logarithme d'une des valeurs propres de l'opérateur de monodromie. Pour décrire la partie du spectre de l'intervalle $(0, 1)$, on doit calculer d'après le polyèdre de Newton toutes les valeurs propres de l'opérateur de monodromie (voir théorème 13 du § 3 et [359]), choisir les valeurs propres auxquelles correspondent les valeurs spectrales appartenant à $(-1, 0] \cup [1, 2)$ et prendre les branches des logarithmes des valeurs propres restantes qui, divisées par $2\pi i$, tombent dans $(0, 1)$. Ces logarithmes divisés par $2\pi i$ forment le reste du spectre.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e. Les parties principales des formes sous-diagramme constituent une famille libre, puisque d'après le théorème 2 l'ordre de la combinaison linéaire des formes sous-diagramme est égal au plus petit ordre d'un terme. Les parties principales des formes sous-diagramme induisent une base de sections dans $F^{n-1}(f^*)$, car, d'après le théorème 2, toute forme située au-dessus du diagramme est d'ordre positif.

Décrivons le spectre d'un point critique de multiplicité finie d'un germe $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ de fonction quasi homogène. Soit $\mathfrak{f}$ de type $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et de poids 1. Soit $\{x^m \mid m \in I\}$ un ensemble de monômes qui se projettent dans la base sur $\mathbf{C}$ de l'algèbre locale $\mathbf{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Pour un $m \in I$, posons

$$l(m) = (m_1 + 1)\alpha_1 + \ldots + (m_n + 1)\alpha_n - 1.$$

Théorème 5 (voir [333] et aussi [354]). *Les valeurs $l(m)$, $m \in I$, forment le spectre du point critique du germe $\mathfrak{f}$ de fonction quasi homogène.*

Conformément à [354], le spectre du point critique du germe de fonction semi-quasi homogène se confond avec celui du point critique du germe de fonction quasi homogène correspondante.

Il est très facile d'indiquer les couples spectraux pour un germe semi-quasi homogène: tous les seconds nombres des couples spectraux sont $n - 1$ (voir l'exemple de la page 294).

Pour toute sous-fibration de Hodge $F^k(f^*)$, on indique des formes dont les parties principales induisent une base de sections dans cette sous-fibration. En effet, associons à un monôme x^m une forme

$$\omega_m = x^m\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Théorème 6 (voir [333, 354]). *Soit $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction semi-quasi homogène. Alors*

1) *pour tout $m \in I$ l'ordre de la forme ω_m est $l(m)$;*

2) *pour tout $k \in \mathbf{Z}$ les parties principales des formes $\{\omega_m \mid m \in I, l(m) \leqslant n - 1 - k\}$ constituent une base de sections dans la fibration de Hodge $F^k(f^*)$.*

Le tableau des spectres des points critiques simples, uni- et bimodaux pour $n = 3$ dressé par V. Goryunov [130] donne pour chaque point les nombres N et L_r; le spectre $\{\alpha_r\}$ est défini par $\alpha_r = (L_r/N) - 1$. En raison de la symétrie des spectres par rapport à la valeur 1/2, on n'en rapporte que la moitié (sauf pour ceux de A_μ, D_μ, $T_{p,q,t}$), i.e. pour $r \leqslant \mu/2$. Pour les noms des points critiques, nous renvoyons à la Première partie.

E. Spectre d'une somme directe de points critiques = somme des spectres translatée de 1. Soient $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ et $\mathfrak{g}: (\mathbf{C}^l, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ deux germes de fonctions holomorphes dans des points critiques de multiplicités finies respectives μ et η. Considérons la somme

Nom	N	$\{L_r\}$	Nom	N	$\{L_r\}$
A_μ	$\mu+1$	$\mu+1+k \quad 1 \leqslant k \leqslant \mu$	E_6	12	13 16 17
D_μ	$2\mu-2$	$3\mu-3 \quad 2\mu-1+2k$	E_7	18	19 23 25
		$0 \leqslant k \leqslant \mu-2$	E_8	30	31 37 41 43
P_8	3	3 4 4 4	Z_{12}	22	21 25 27 29 31 33
X_9	4	4 5 5 6	Z_{13}	18	17 20 22 23 25 26
J_{10}	6	6 7 8 8 9	W_{12}	20	19 23 24 27 28 29
Q_{10}	24	23 29 31 32 35	W_{13}	16	15 18 19 21 22 23
Q_{11}	18	17 21 23 24 25	E_{12}	42	41 47 53 55 59 61
Q_{12}	15	14 17 19 20 20 22	E_{13}	30	29 33 37 39 41 43
S_{11}	16	15 19 20 21 23	E_{14}	24	23 26 29 31 32 34 35
S_{12}	13	12 15 16 17 18 19	$T_{p,q,t}$	pqt	$pqt \quad 2pqt \quad (p+k_1)\,qt$
U_{12}	12	11 14 15 15 17 18			$(q+k_2)\,pt \quad (t+k_3)\,pq$
Z_{11}	30	29 35 37 41 45			$0<k_1<p \quad 0<k_2<q \quad 0<k_3<t$

$J_{3,p}$	$18(p+9)$	$17(p+9) \quad 23(p+9) \quad 25(p+9) \quad 9(2p+17+2k)$ $1 \leqslant k \leqslant (p+10)/2$
$Z_{1,p}$	$14(p+7)$	$13(p+7) \quad 17(p+7) \quad 19(p+7) \quad 21(p+7) \quad 7(2p+13+2k)$ $1 \leqslant k \leqslant (p+7)/2$
$W_{1,p}$	$12(p+6)$	$11(p+6) \quad 14(p+6) \quad 16(p+6) \quad 17(p+6) \quad 6(2p+11+2k)$ $1 \leqslant k \leqslant (p+7)/2$
$W^{\#}_{1,p}$	$12(p+12)$	$11(p+12) \quad 17(p+12) \quad 12(p+12+k) \quad 1 \leqslant k \leqslant (p+11)/2$
$Q_{2,p}$	$12(p+6)$	$11(p+6) \quad 15(p+6) \quad 16(p+6) \quad 17(p+6) \quad 6(2p+11+2k)$ $1 \leqslant k \leqslant (p+6)/2$
$S_{1,p}$	$10(p+5)$	$9(p+5) \quad 12(p+5) \quad 13(p+5) \quad 14(p+5) \quad 5(2p+9+2k)$ $1 \leqslant k \leqslant (p+6)/2$
$S^{\#}_{1,p}$	$10(p+10)$	$9(p+10) \quad 13(p+10) \quad 10(p+10+k) \quad 1 \leqslant k \leqslant (p+10)/2$
$U_{1,p}$	$9(p+9)$	$8(p+9) \quad 11(p+9) \quad 13(p+9) \quad 9(p+9+k) \quad 1 \leqslant k \leqslant (p+8)/2$

Q_{16}	21	19	22	25	26	28	28	29	31		
Q_{17}	30	27	31	35	37	39	40	41	43		
Q_{18}	48	43	49	55	59	61	64	65	67	71	
S_{16}	17	15	18	20	21	22	23	24	25		
S_{17}	24	21	25	28	29	31	32	33	35		
U_{16}	15	13	16	18	18	19	21	21	22		
W_{17}	20	18	21	23	24	26	27	28	29		
W_{18}	28	25	29	32	33	36	37	39	40	41	
Z_{17}	24	22	25	28	29	31	32	34	35		
Z_{18}	34	31	35	39	41	43	45	47	49	51	
Z_{19}	54	49	55	61	65	67	71	73	77	79	
E_{18}	30	28	31	34	37	38	40	41	43	44	
E_{19}	42	39	43	47	51	53	55	57	59	61	
E_{20}	66	61	67	73	79	83	85	89	91	95	97

directe de ces germes $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}: (\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^l, 0 \times 0) \to (\mathbf{C}, 0)$. Le germe $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}$ admet en 0×0 un point critique de multiplicité $\mu \cdot \eta$.

Théorème 7 (voir [354]). *Si* $\{\alpha_i\}$ *est le spectre du point critique de* $\mathfrak{f}$ *et* $\{\beta_j\}$ *le spectre du point critique de* $\mathfrak{g}$, *alors* $\{\alpha_i + \beta_j + 1\}$ *est le spectre du point critique du germe* $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}$ *(ici* $i = 1, \ldots, \mu$, $j = 1, \ldots, \eta$*).*

Corollaire 1. *Si* $\{\alpha_i\}$ *est le spectre du point critique du germe* $\mathfrak{f}$: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, *alors* $\{\alpha_i + 1/2\}$ *est le spectre du point critique du germe* $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}^2$: $(\mathbf{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$.

Corollaire 2. *Deux points critiques stablement équivalents ont même indice de singularité complexe.*

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e. Elle utilise des intégrales oscillantes complexes avec comme phases $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}$, ainsi que le théorème de Fubini pour de telles intégrales. Reprenons les notations du nº 11.3.

Nous avons indiqué au nº 11.3 une application du produit tensoriel de groupes des chaînes permises pour les points critiques de $\mathfrak{f}$ et de $\mathfrak{g}$ dans le groupe des chaînes permises pour le point critique de $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}$:

$$H_n (X^f, X^{-,f}; \mathbf{C}) \otimes H_l (X^g, X^{-,g}; \mathbf{C}) \to H_{n+l} (X^{f+g}, X^{-,f+g}; \mathbf{C}).$$

Lemme 15. *Cette application est un isomorphisme.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit h l'application en question. Soient des bases $\delta_1, \ldots, \delta_\mu \in H_n (X^f, X^{-,f})$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_\eta \in H_l (X^g, X^{-,g})$. Il suffit d'exhiber sur X^{f+g} des $(n + l)$-formes différentielles holomorphes $\psi_1, \ldots, \psi_{\mu\eta}$ au nombre de $\mu \cdot \eta$ telles que

$$\det \Big(\int_{h(\delta_i \otimes \gamma_j)} e^{\tau(f+g)} \psi_s \Big) \not\equiv 0.$$

D'après le théorème du déterminant, il existe sur X^f des n-formes $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ telles que

$$\det \Big(\int_{\delta_i} e^{\tau f} \omega_s \Big) \not\equiv 0$$

(voir lemme 2 du § 11). Il existe de même sur X^g des l-formes $\varphi_1, \ldots, \varphi_\eta$ telles que

$$\det \Big(\int_{\gamma_j} e^{\tau g} \varphi_s \Big) \not\equiv 0.$$

Comme $\{\psi_s\}$, on peut prendre des formes $\{\omega_i \wedge \varphi_j\}$ (voir le théorème de Fubini 4 du § 11). Le lemme est démontré.

On a construit au n° 11.1 un isomorphisme $H_{n-1}(X_t^f) \cong (X^f, X^{-,f})$ pour tout $t \in S^-$. D'après le lemme 15, cet isomorphisme induit l'isomorphisme $H_{n-1}(X_t^f) \otimes H_{l-1}(X_t^g) \cong (H_{n+l-1}(X_t^{f+g})$ pour tout $t \in S^-$. On voit sans peine que ce dernier isomorphisme se prolonge en un isomorphisme de fibrations d'homologie

$$\mathfrak{f}_* \otimes \mathfrak{g}_* \cong (\mathfrak{f} + \mathfrak{g})_* \tag{14}$$

(ici $_*$ désigne la fibration d'homologie de Milnor). A cet effet, au lieu du couple X^f, $X^{-,f}$ on considère des couples X^f, $X \cap f^{-1}(\{t \in \in S \mid \operatorname{Re}(e^{i\varphi}t) < 0\})$; des modifications analogues sont à apporter aux couples $(X^g, X^{-,g})$ et $(X^{f+g}, X^{-,f+g})$. Avec cet isomorphisme de fibrations, les produits tensoriels des sections covariantement constantes sont covariantement constants eux-mêmes, i.e. la connexion de Gauss-Manin dans la fibration $(\mathfrak{f} + \mathfrak{g})_*$ est isomorphe à $\nabla^f \otimes \otimes \operatorname{id}^g + \operatorname{id}^f \otimes \nabla^g$, donc au produit tensoriel des connexions de Gauss-Manin des fibrations $\mathfrak{f}_*$, $\mathfrak{g}_*$.

Si ω est une n-forme différentielle holomorphe sur X^f et φ une l-forme différentielle holomorphe sur X^g, alors $\omega \wedge \varphi$ est une $(n + l)$-forme différentielle holomorphe au voisinage du point $0 \times 0 \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^l$. Le lemme 15 permet de définir la section géométrique de $\omega \wedge \varphi$ au départ de celles de ω et de φ.

Lemme 16 (voir [354]). *Si*

$$s[\omega] = \sum t^\alpha (\ln t)^k A_{k,\alpha}^\omega / k!,$$
$$s[\varphi] = \sum t^\beta (\ln t)^s A_{s,\beta}^\varphi / s!,$$

on a

$$s[\omega \wedge \varphi] = \sum \sum \frac{\partial^{k+s}}{\partial \alpha^k \partial \beta^s} [t^{\alpha+\beta+1} \mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1)] A_{k,\alpha}^\omega \otimes \otimes A_{s,\beta}^\varphi / (k!s!),$$

où B *est la fonction bêta.*

Remarque. Les sections $A_{k,\alpha}^\omega \otimes A_{s,\beta}^\varphi$ sont assimilées à des sections de $(\mathfrak{f} + \mathfrak{g})_*$, en accord avec l'isomorphisme (14).

Le lemme 16 résulte du lemme 2 du § 11 et du théorème de Fubini.

Corollaire. *L'ordre de la forme* $\omega \wedge \varphi$ *est égal à la somme augmentée de* 1 *des ordres de* ω *et de* φ.

Pour démontrer le théorème 7, il suffit maintenant de profiter du lemme 13. Soient en effet $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ des n-formes holomorphes sur X^f qui, jointes à f, vérifient les conditions du lemme 13. Soient de même $\varphi_1, \ldots, \varphi_\eta$ des l-formes holomorphes sur X^g qui, jointes à g, vérifient les conditions du même lemme. On voit sans peine que les formes $\{\omega_i \wedge \varphi_j\}$, jointes à $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}$, vérifient elles aussi ces condi-

tions. Par conséquent, les ordres de ces formes (les quantités $\alpha(\omega_i) + \beta(\varphi_j) + 1$) constituent le spectre du point critique du germe $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}$.

Ce raisonnement, développé d'une manière correcte, permet de prouver une forme renforcée du théorème 7 : *si* $\{(\alpha_i, v_i)\}$ *sont les couples spectraux du germe* $\mathfrak{f}$ *et* $\{(\beta_j, u_j)\}$ *les couples spectraux du germe* $\mathfrak{g}$, *alors* $\{(\alpha_i + \beta_j + 1, v_i + u_j + 1)\}$ *sont les couples spectraux du germe* $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}$.

On trouve dans [354] des formules explicites qui, au moyen d'opérations du produit tensoriel et de la somme, établissent des rapports entre les filtrations par le poids et les filtrations de Hodge des fibrations de cohomologie de Milnor des points critiques des germes $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}$.

§ 14. Structure de Hodge mixte du point critique isolé d'une fonction holomorphe

La structure de Hodge mixte dans un espace vectoriel est engendrée par deux filtrations de l'espace qui vérifient les axiomes énumérés ci-dessous. Dans l'espace de cohomologie évanescente au point critique d'une fonction holomorphe il y a une structure de Hodge mixte naturelle. Les deux filtrations mentionnées sont en l'occurrence une filtration pondérale et une filtration de Hodge (voir § 13). La première se construit d'après la structure jordanienne de l'opérateur de monodromie et traduit le comportement des intégrales prises suivant des cycles évanescents quand on fait leur prolongement analytique autour de la valeur critique du paramètre. La seconde se bâtit en comparant les vitesses de convergence vers zéro des intégrales prises suivant les cycles évanescents quand le paramètre tend vers la valeur critique. Deux théories géométriques sont proposées pour étudier le comportement d'une fonction au voisinage d'un point critique : ce sont la théorie de Morse et la théorie de Picard-Lefschetz. La théorie de Morse étudie les transformations subies par l'hypersurface de niveau de la fonction quand le niveau tend vers la valeur critique. La théorie de Picard-Lefschetz suit les changements de l'hypersurface de niveau quand celui-ci tourne autour de la valeur critique de la fonction sur la droite complexe. Dans ce sens la théorie de la structure de Hodge mixte d'un point critique représente une synthèse des deux théories citées. La structure de Hodge mixte en cohomologie évanescente joue un rôle non négligeable dans la théorie locale des singularités.

Dans ce paragraphe nous discutons le rapport entre la structure de Hodge mixte et les autres caractéristiques du point critique.

14.1. Définition de la structure de Hodge mixte. La structure de Hodge mixte est une structure auxiliaire présente en cohomologie

d'une variété complexe et induite par la structure complexe de la variété.

Exemple. Soit une courbe complexe projective non singulière $X \subset CP^2$ de genre 1 définie dans une carte affine par l'équation $y^2 = P_3(x)$, où P_3 est un polynôme du troisième degré sans racines multiples.

Considérons ses cohomologies à coefficients complexes. Les espaces $H^0(X, \mathbf{C})$, $H^1(X, \mathbf{C})$ et $H^2(X, \mathbf{C})$ sont de dimensions 1, 2 et 1 respectivement. Il y a dans chaque espace un sous-espace réel, image du plongement naturel de la cohomologie à coefficients réels. Mieux, il y a dans chaque sous-espace réel un réseau d'entiers, image du plongement naturel de la cohomologie à coefficients entiers. Il existe toujours en cohomologie à coefficients complexes un sous-espace réel avec un réseau d'entiers.

Voyons maintenant de quelle façon se manifeste sur X la structure complexe. Soit sur X une 1-forme différentielle $\omega = dx/y$. On voit sans peine que ω est une 1-forme holomorphe régulière en tout point de X. Etant fermée, ω définit une classe de cohomologie $[\omega] \in H^1(X, \mathbf{C})$. Toute autre 1-forme holomorphe ω' est proportionnelle à ω (en effet, ω'/ω est une fonction holomorphe bornée, donc constante). La structure complexe définit une orientation sur la courbe. Pour cette orientation $i \int_X \omega \wedge \bar{\omega} > 0$. En particulier, cela signifie que la classe $[\omega]$ est non nulle. Ainsi donc, les 1-formes différentielles holomorphes sur X engendrent dans $H^1(X, \mathbf{C})$ un sous-espace F de dimension un, tel que $H^1(X, \mathbf{C}) = F \oplus \bar{F}$, où la barre symbolise la conjugaison complexe par rapport au sous-espace réel.

Un théorème standard de la théorie des courbes elliptiques dit (voir [249, 318]) : l'espace vectoriel H^1 muni des structures décrites (sous-espace réel avec un réseau d'entiers et sous-espace F) définit la courbe X.

Soient deux courbes X, X' de genre un et une application holomorphe $f: X \to X'$. Considérons l'application induite $f^*: H^1(X', \mathbf{C}) \to H^1(X, \mathbf{C})$. Il est évident que f^* fait passer le sous-espace réel et le réseau d'entiers en un sous-espace réel et un réseau d'entiers respectivement. Mieux, on a $f^*F \subset F$, car l'image réciproque d'une forme holomorphe est holomorphe. Cette remarque dénote la fonctorialité de la structure décrite en cohomologie et porte une information non triviale sur les applications holomorphes. Par exemple, s'il n'existe aucune application linéaire non nulle $(H^1(X', \mathbf{C}), F) \to (H^1(X, \mathbf{C}), F)$ laissant invariants le sous-espace réel et le réseau d'entiers, toute application holomorphe $X \to X'$ est une application dans un point.

On peut généraliser la construction du sous-espace F en cohomologie de dimension 1 d'une courbe de genre 1 à une variété complexe

projective non singulière X de dimension quelconque ([396, 69]). Pour un l entier non négatif quelconque, choisissons en plus d'un sous-espace réel avec un réseau d'entiers, dans l'espace de cohomologie $H^l(X, \mathbf{C})$ des sous-espaces $H^{l,0}, H^{l-1,1}, \ldots, H^{0,l}$, où $H^{k,l-k}$ est le sous-espace de toutes les classes de cohomologie de dimension l représentables par des formes différentielles fermées qui, en chaque écriture locale

$$\sum a_{i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_{l-r}} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_r} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_{l-r}},$$

admettent dans chaque terme exactement k différentielles holomorphes et exactement $l-k$ différentielles antiholomorphes, i.e. $r=k$ dans chaque terme. D'après le théorème de Hodge (voir [396, 69]) on a

$$H^l(X, \mathbf{C}) = \bigoplus_k H^{k, l-k}, \quad \overline{H^{k, l-k}} = H^{l-k, k}. \tag{1}$$

Comme dans le cas des courbes, les sous-espaces $H^{k,l-k}$ portent beaucoup d'informations sur les caractéristiques les plus diverses de la variété (voir [396, 69, 137, 89, 181]). Il est évident que les applications holomorphes de variétés laissent invariants les espaces $H^{k,l-k}$: si $f\colon X \to X'$ est une application holomorphe, on a $f^*(H^{k,l-k}) \subset \subset H^{k,l-k}$ pour tout k.

En étudiant le comportement de (1) vis-à-vis de la structure complexe sur X et en généralisant la construction à des variétés avec singularités, on s'est rendu compte qu'au lieu de la suite de sous-espaces $H^{l,0}, \ldots, H^{0,l}$, on devrait se préoccuper de la suite de sous-espaces

$$\{0\} \subset F^l \subset F^{l-1} \subset \ldots \subset F^0 = H^l(X, \mathbf{C}),$$

où $F^k = H^{l,0} \oplus H^{l-1,1} \oplus \ldots \oplus H^{k,l-k}$.

P. Deligne [89] a indiqué en cohomologie d'une variété algébrique quasi projective (ayant des singularités arbitraires) deux filtrations naturelles: une filtration de Hodge $\{F^k\}$ et une filtration par le poids $\{W_l\}$, et a montré que ces filtrations ont une propriété qui généralise (1) et qu'elles sont fonctorielles vis-à-vis d'applications algébriques de variétés. Deligne a donné à ces filtrations le nom de structure de Hodge mixte en cohomologie. Ce sont les propriétés de ces filtrations que nous avons mis à la base des définitions formelles qui vont suivre.

Remarque. Dans les exemples précédents les variétés sont non singulières et compactes. Pour une variété compacte non singulière la filtration par le poids est triviale: $\{0\} = W_{l-1} \subset W_l = H^l(X, \mathbf{C})$.

J. Steenbrink a défini la structure de Hodge mixte en cohomologie évanescente [334].

A. Structures de Hodge (voir [139]). Soit $H_{\mathbf{R}}$ un espace vectoriel de dimension finie sur **R** contenant un réseau $H_{\mathbf{Z}}$, et soit $H = H_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ son complexifié.

Définition. *Une structure de Hodge de poids l sur H est une décomposition en somme directe $H = \bigoplus_{k+m=l} H^{k,m}$, où $H^{k,m} = \overline{H^{m,k}}$ (la barre symbolise le passage au conjugué complexe). Les quantités $h^{k,m} = \dim_{\mathbf{C}} H^{k,m}$ sont appelées nombres de Hodge.*

Pour deux structures de Hodge quelconques H, H' de poids l, la somme directe $H \oplus H'$ porte une structure de Hodge évidente de poids l. De même, si H et H' ont des poids (peut-être différents) l et l', alors $H \otimes H'$, Hom (H, H'), $\Lambda^p H$, H^* héritent les structures de Hodge de poids respectifs $l + l'$, $l' - l$, pl, $-l$. En effet, $\lambda \in$ Hom (H, H') est de type (k, m) si $\lambda (H^{r,s}) \subset (H')^{k+r, m+s}$ pour r, s quelconques. En particulier, cette définition est applicable à $H^* =$ Hom $(H, \mathbf{C})$, où **C** porte une structure triviale de poids 0; on peut assimiler $H \otimes H'$ à Hom (H^*, H'), et $\otimes^p H$ induit une structure de Hodge sur son sous-espace $\Lambda^p H$.

Définition. Une application linéaire $\varphi : H \to H'$ d'espaces vectoriels munis de structures de Hodge est appelée *morphisme de type* (r, r) si elle est définie sur **Q** par rapport aux réseaux $H_{\mathbf{Z}}$, $H'_{\mathbf{Z}}$ et si $\varphi (H^{k,m}) \subset (H')^{k+r, m+r}$ pour k, m quelconques.

Remarque. Une application φ est définie sur **Q** par rapport aux réseaux $H_{\mathbf{Z}}$, $H'_{\mathbf{Z}}$ si sont rationnels les éléments de la matrice de φ dans les bases de vecteurs des réseaux.

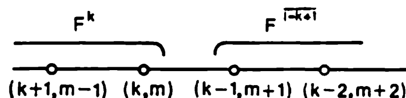


Fig. 83

A toute structure de Hodge $H = \bigoplus_{k+m=l} H^{k,m}$ de poids l est liée une *filtration de Hodge*

$$\{0\} \subset \ldots \subset F^{k+1} \subset F^k \subset F^{k-1} \subset \cdots \subset H,$$

où $F^k = \bigoplus_{i \geq k} H^{i, l-i}$ (fig. 83). La filtration de Hodge définit une structure de Hodge:

$$H^{k,m} = F^k \cap \overline{F^m}. \tag{2}$$

Réciproquement, une filtration décroissante $\{F^k\}$ est induite sur H par une structure de Hodge de poids l si et seulement si $F^k \oplus \overline{F^{l-k+1}} = H$ pour tout k.

En termes de cette nouvelle description, une application linéaire $\varphi: H \to H'$ définie sur Q est un morphisme de type (r, r) si et seulement si φ conserve la filtration de Hodge avec une translation de r de tous les indices: $\varphi(F^k) \subset F'^{k+r}$, k quelconque.

Considérons une structure de Hodge $H = \bigoplus_{k+m=l} H^{k,m}$ et une forme bilinéaire S sur H. Supposons que S prenne des valeurs rationnelles sur les couples de vecteurs du réseau H_Z. Supposons de plus que S est symétrique pour l pair et symétrique gauche pour l impair.

Définition. On dit que la structure de Hodge est *polarisée par* S si

$$S(H^{k,m}, H^{k',m'}) = 0 \quad \text{pour} \quad (k, m) \neq (m, k),$$
$$(\sqrt{-1})^{k-m} S(v, \bar{v}) > 0 \quad \text{pour} \quad v \in H^{k,m}, \quad v \neq 0.$$

Un exemple de structure de Hodge polarisée est donné par la structure de Hodge bilinéaire en cohomologie primitive d'une variété différentiable projective (voir [396], ch. V).

B. Structures de Hodge mixtes (voir [139]). Soient H, H_R, H_Z les mêmes qu'en A.

Définition. Une *structure de Hodge mixte* sur H se compose de deux filtrations:

$$\{0\} \subset \ldots \subset W_{l-1} \subset W_l \subset W_{l+1} \subset \ldots \subset H,$$

la *filtration par le poids* définie sur Q par rapport à H_Z, et

$$\{0\} \subset \ldots \subset F^{k+1} \subset F^k \subset F^{k-1} \subset \ldots \subset H,$$

la *filtration de Hodge*. On veut que pour l quelconque la filtration sur

$$\mathrm{gr}_l W = W_l / W_{l-1}$$

induite par la filtration de Hodge constitue sur $\mathrm{gr}_l W$ une structure de Hodge pure de poids l (la filtration induite est $F^k \mathrm{gr}_l W = (F^k \cap W_l + W_{l-1})/W_{l-1}$). Autrement dit, on veut que pour tous k, $l \in Z$ il y ait

$$\mathrm{gr}_l W = F^k \mathrm{gr}_l W \oplus \overline{F^{l-k+1} \mathrm{gr}_l W}.$$

(Comparer avec l'assertion du théorème 3 du § 13.)

La notion de structure de Hodge est un cas particulier de la notion de structure de Hodge mixte: si $(H, \{F^k\})$ est une structure de Hodge de poids l, alors, en prenant comme filtration par le poids $\{0\} = W_{l-1} \subset W_l = H$, on obtient la structure de Hodge mixte $(H, \{F^k\}, \{W_m\})$.

Définition. On appelle *morphisme de type* (r, r) de structures de Hodge mixtes $(H, \{F^k\}, \{W_l\})$ et $(H', \{F'^k\}, \{W'_l\})$ une application linéaire $\varphi: H \to H'$ définie sur Q par rapport aux réseaux H_Z, H'_Z

et telle que

$$\varphi(W_l) \subset W'_{l+2r}, \quad \varphi(F^k) \subset F'^{k+r}$$

pour l, k quelconques.

Un morphisme de type (r, r) induit une application

$$\varphi\colon \mathrm{gr}_l W \to \mathrm{gr}_{l+2r} W'$$

qui est un morphisme de type (r, r) de structures de Hodge pures de poids respectifs l et $l + 2r$.

Les opérations de somme directe, de produit tensoriel, de passage au conjugué complexe s'étendent de façon naturelle aux structures de Hodge mixtes.

Exemple. Soit $(H, \{F^k\}, \{W_l\})$ une structure de Hodge mixte. Définissons une structure de Hodge mixte sur l'espace dual H^*. Posons $H^*_{\mathbf{Z}} = \mathrm{Hom}\,(H_{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z})$, $(F^*)^k = \mathrm{ann}\, F^{1-k}$, $W^*_l = \mathrm{ann}\, W_{-l-1}$, où ann est l'annulateur.

14.2. Discussion de l'assertion du théorème 3 du § 13 de la structure de Hodge mixte.

A. Exemples. *Point critique d'un germe* $\mathfrak{f}\colon (\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ *de fonction holomorphe d'une variable.* Quitte à faire un changement de variable, on obtient $\mathfrak{f} = x^{\mu+1}$, où μ est la multiplicité du point critique. Soient $f\colon X \to S$ une spécialisation du germe, et $f^*\colon H \to S'$ la fibration de cohomologie de Milnor correspondante (p. 277). D'après les exemples des pages 291, 294, on a pour tout $t \in S'$

$$\{0\} = W_{-1,\,t} \subset W_{0,\,t} = \tilde{H}^0(X_t, \mathbf{C}),$$

$$\{0\} = F^1_t \subset F^0_t = \tilde{H}^0(X_t, \mathbf{C}).$$

L'unique espace quotient non trivial de la filtration par le poids est $\mathrm{gr}_0 W_t = \tilde{H}^0(X_t, \mathbf{C})$. La filtration de Hodge induit sur $\tilde{H}^0(X_t, \mathbf{C})$ une structure de Hodge pure de poids 0, à savoir $\tilde{H}^0(X_t, \mathbf{C}) = H^{0,0}_t$, où $H^{0,0}_t = \bar{F}^0_t \cap F^0_t$ (voir formule (1)). Le théorème 3 du § 13 pour $\mathfrak{f}$ est démontré.

Point critique non dégénéré du germe $\mathfrak{f} = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. D'après les exemples des pages 291, 294, on a pour tout $t \in S'$

$$\{0\} = W_{2[n/2]-1,\,t} \subset W_{2[n/2],\,t} = H^{n-1}(X_t, \mathbf{C}),$$

$$\{0\} = F_t^{[n/2]+1} \subset F_t^{[n/2]} = H^{n-1}(X_t, \mathbf{C}).$$

L'unique espace quotient non trivial de la filtration par le poids est $\mathrm{gr}_{2[n/2]} W_t = H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$. La filtration de Hodge induit sur $H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ une structure de Hodge pure de poids $2[n/2]$:

$H^{n-1}(X_t, \mathbf{C}) = H_t^{[n/2], [n/2]}$, où $H_t^{[n/2], [n/2]} = F_t^{[n/2]} \cap \overline{F_t^{[n/2]}}$ (voir formule (2)). Le théorème 3 du § 13 pour $\mathfrak{f}$ est démontré.

Point critique de multiplicité finie d'un germe $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ *de fonction holomorphe de deux variables.* C'est le premier cas non trivial. Reformulons les assertions du théorème de la structure de Hodge mixte pour ce cas. Soit $f: X \to S$ une spécialisation de $\mathfrak{f}$, et soit $t \in S'$. D'après le lemme 7 du § 13, la filtration de Hodge s'écrit

$$\{0\} \subset F_t^1 \subset F_t^0 \subset \ldots \subset H^1(X_t, \mathbf{C}).$$

D'après le corollaire 2 du n° 13.2, la taille de tout bloc de la forme jordanienne de l'opérateur de monodromie est non supérieure à 2, et le sous-espace de racines de valeur propre 1 de l'opérateur de monodromie est constitué de vecteurs propres. La filtration par le poids s'écrit donc

$$\{0\} \subset W_{0,t} \subset W_{1,t} \subset W_{2,t} = H^1(X_t, \mathbf{C}),$$

où $W_{1,t}$ est engendré par tous les vecteurs propres de l'opérateur de monodromie de valeurs propres autres que 1, et $W_{0,t}$ est engendré par les vecteurs propres des blocs de Jordan de taille 2.

Conformément au théorème de la structure de Hodge mixte, la filtration de Hodge induit, sur les espaces quotients de la filtration pondérale, des structures de Hodge pures, soit en l'occurrence

$$\mathrm{gr}_2 W_t = H_t^{1,1}, \tag{3}$$

$$\mathrm{gr}_1 W_t = H_t^{1,0} \oplus H_t^{0,1}, \quad \mathrm{gr}_0 W_t = H_t^{1,-1} \oplus H_t^{0,0} \oplus H_t^{-1,1}, \tag{4}$$

où $H^{k,m} = F^k \mathrm{gr}_{k+m} W \cap \overline{F^m \mathrm{gr}_{k+m} W}$. D'après le corollaire 3 du n° 13.2 E, les $H_t^{1,-1}$, $H_t^{-1,1}$ sont vides et

$$\mathrm{gr}_0 W_t = H_t^{0,0}. \tag{5}$$

Corollaire. *On a* $F_t^0 = H^1(X_t, \mathbf{C})$. *Autrement dit, toute classe de cohomologie évanescente appartenant à un sous-espace de racines de l'opérateur de monodromie est une valeur de la partie principale d'une 2-forme holomorphe sur X d'ordre plus petit que* 1.

Remarque. Pour un germe de fonction de n variables, on a $F_t^0 = H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$. La démonstration est analogue.

Les propositions (3) à (5) se laissent aisément traduire dans le langage des parties principales de 2-formes holomorphes sur X :

a) Tout vecteur propre de $W_{0,t}$ est la valeur de la partie principale d'une forme d'ordre $\alpha(\omega) \in (0, 1)$.

b) Si la forme est d'ordre non supérieur à 0, la valeur de sa partie principale en t n'appartient pas à $W_{0,t}$.

c) Tout vecteur propre de valeur propre 1 est la valeur de la partie principale d'une forme d'ordre 0.

d) Tout vecteur propre de $W_{0,t}$ est la valeur du coefficient $A^{(\omega)}_{1,\alpha(\omega)}$, où ω est une 2-forme holomorphe sur X d'ordre $\alpha(\omega) \in \in (-1, 0)$.

e) Soit $\mathcal{F}^1_t$ la projection dans $\mathrm{gr}_1 W_t$ du sous-espace de $W_{1,t}$ engendré par les valeurs prises en t par les partie principales des formes d'ordre plus petit que 0. Alors $\mathrm{gr}_1 W_t = \mathcal{F}^1_t \oplus \overline{\mathcal{F}^1_t}$.

On déduit facilement des propositions a) à e) qu'en particulier, toute section élémentaire d'ordre non négatif est section géométrique d'une 2-forme. Par exemple, si $A : t \mapsto A(t)$ est une section covariantement constante uniforme de la fibration de cohomologie de Milnor, il existe une 2-forme ω telle que $[\omega/df\,|_{X_t}] = A(t)$ pour t quelconque.

B. Symétrie des nombres de Hodge. Déduisons le lemme 14 du § 13 du théorème 3 du § 13. On a d'après ce théorème pour l quelconque

$$\mathrm{gr}_l W_t = \bigoplus_{k+m=l} H^{k,m}_t, \qquad H^{k,m} = \overline{H^{m,k}_t}. \tag{6}$$

L'opérateur de monodromie agissant sur $\mathrm{gr}_l W_t$ laisse invariantes la structure réelle et la filtration de Hodge induite. Aussi l'opérateur de monodromie conserve-t-il la décomposition (6).

Soit $H^{k,m}_\lambda$ le sous-espace de racines de valeur propre λ de l'action de la monodromie sur $H^{k,m}$. Par construction $F^k \mathrm{gr}_l W_t = = H^{k,l-k} \oplus H^{k+1,l-k-1} \oplus \ldots$ Donc $H^{k,l-k} \cong F^k \mathrm{gr}_l W_t / F^{k+1} \mathrm{gr}_l W_t$, $\dim H^{k,l-k} = h^{k,l-k}$, $\dim H^{k,l-k}_\lambda = h^{k,l-k}_\lambda$. L'assertion a) du lemme 14 du § 13 découle maintenant de (6).

D'après le corollaire 2 du nº 13.2 E, on a pour tous k, l

$$N^l (H^{k,n-1+l-k}_\lambda) = H^{k-l,n-1-k}_\lambda \quad \text{si } \lambda \neq 1.$$

$$N^l (H^{k,n+l-k}_1) = H^{k-l,n-k}_1.$$

D'où les assertions b) et c) du lemme 14 du § 13.

C. Fonctorialité de la structure de Hodge mixte en cohomologie évanescente. Soit $\mathfrak{f} : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe à point critique de multiplicité finie. Soit $\mathfrak{g} : (\mathbf{C}^n, 0) \to \to (\mathbf{C}^n, 0)$ un germe d'application holomorphe de multiplicité finie. Supposons que le germe $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g} : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ possède lui aussi un point critique de multiplicité finie. Le germe $\mathfrak{g}$ induit une application d'une hypersurface de niveau de $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}$ dans une hypersurface de même niveau de $\mathfrak{f}$. On voit sans peine que cette application définit une application linéaire g^* de cohomologie évanescente au point critique de $\mathfrak{f}$ en cohomologie évanescente au point critique de $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}$; plus exactement, elle définit un morphisme de fibration de cohomologie de Milnor du point critique de $\mathfrak{f}$ dans la fibration de cohomolo-

gie de Milnor du point critique de $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}$. D'après le théorème 3 du § 13, la filtration par le poids et la filtration de Hodge induisent une structure de Hodge mixte dans les fibres de ces fibrations de cohomologie.

Théorème 1 (voir [354]). *L'application g^* est un monomorphisme de type* (0, 0) *de structures de Hodge mixtes. En effet, g^* n'a pas de noyau et, pour tous k, l,*

$$g^* (F^k (f^*)) \subset F^k ((f \circ g)^*), \ g^* (W (f^*)) \subset W_l((f \circ g)^*).$$

D é m o n s t r a t i o n. Soient X_t^f, X_t^{fg} les fibres des fibrations de Milnor des germes $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}$ respectivement. Supposons qu'on a choisi les spécialisations des germes et le représentant g de $\mathfrak{g}$ de telle façon que $g (X_t^{fg}) \subset X_t^f$.

L'application g_*: $H_{n-1} (X_t^{fg}, \mathbf{C}) \to H_{n-1} (X_t^f, \mathbf{C})$ est épimorphe. En effet, si $[\sigma] \in H_{n-1} (X_t^f, \mathbf{C})$, σ est le représentant de la classe $[\sigma]$ et $\{g^{-1} (\sigma)\}$, l'image réciproque du cycle σ dans X_t^{fg} alors $g_* [\{g^{-1} (\sigma)\}] = k [\sigma]$, où k est la multiplicité de g.

Démontrons la fonctorialité de la filtration par le poids. Il est évident que l'application g^* envoie des sections covariantement constantes sur des sections covariantement constantes. De plus g^* commute à l'opérateur de monodromie. En accord avec la deuxième définition de filtration par le poids (n° 13.2 B), cela démontre la seconde inclusion du théorème.

Démontrons la fonctorialité de la filtration de Hodge. Soit ω une n-forme différentielle holomorphe sur X^f. Il est évident que l'ordre de $g^* (\omega)$ est égal à celui de ω. Mieux, la partie principale de $g^* (\omega)$ est égale à l'image de la partie principale de ω par le monomorphisme g^*. Cela démontre la première inclusion du théorème.

Remarque. Une autre preuve de la fonctorialité de la structure de Hodge mixte en cohomologie évanescente est fournie par les relations entre les spectres des points critiques des germes $\mathfrak{f} (x)$, $\mathfrak{g} (y)$, $\mathfrak{f} (x) + \mathfrak{g} (y)$, voir n° 13.3, D et aussi [354].

D. Traduction du théorème de la structure de Hodge mixte dans le langage des intégrales oscillantes complexes. Soit $\mathfrak{f}$: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe en son point critique de multiplicité finie. Considérons des intégrales oscillantes complexes de phase $\mathfrak{f}$ suivant des chaînes permises contenues au voisinage du point critique de $\mathfrak{g}$, i.e. des intégrales du type $\int_\Gamma e^{\tau f} \omega$, où $[\Gamma] \in H_n (X, X^-)$ et ω est une n-forme différentielle holomorphe sur X (voir n° 11.1).

Pour une amplitude donnée ω, intégrer $e^{\tau f} \omega$ suivant des chaînes permises revient à définir sur ces chaînes une fonction linéaire du

paramètre τ. Pour $\tau \to +\infty$ une telle fonction se développe en série asymptotique (théorème du § 11). La partie dominante de cette série asymptotique est appelée partie dominante de l'amplitude ω. Dans le texte qui suit, nous construirons au moyen des parties dominantes de toutes les amplitudes une filtration sur l'espace dual de H_n $(X, X^-;$ C). Elle est appelée filtration de Hodge. Ensuite nous construirons sur ce même espace dual, à l'aide de l'opérateur de monodromie, une seconde filtration, dite filtration par le poids.

Théorème 2. *Les filtrations par le poids et de Hodge définies ci-après induisent une structure de Hodge mixte sur l'espace dual de* H_n $(X, X^-;$ C).

Nous verrons sans peine un peu plus loin que le théorème 2 n'est qu'une reformulation (moyennant le lemme 2 du § 11) du théorème 3 du § 13.

Remarque. La filtration de Hodge que nous allons construire est fonction du paramètre τ. Le théorème 2 reste vrai pour toute valeur positive de τ.

Soit H^* le dual de l'espace H_{n-1} $(X, X^-;$ C). Il y a dans H^* deux structures naturelles: un sous-espace réel $H^*_{\mathbf{R}}$ et un réseau d'entiers $H^*_{\mathbf{Z}}$ (le réseau peut par exemple être formé de fonctions linéaires qui prennent des valeurs entières sur l'image naturelle du groupe H_{n-1} $(X, X^-;$ Z) dans H_{n-1} $(X, X^-;$ C).

Proposons-nous de définir la filtration de Hodge dans H^*.

Soit ω une n-forme holomorphe sur X. D'après le théorème 1 du § 11

$$\int_{[\ ]} e^{\tau f}\omega \approx \sum \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k B^{\omega}_{k,\alpha} [\ \ ],$$

où $B^{\omega}_{k,\alpha} \in H^*$. On appelle *poids* de la forme ω le plus grand α tel que le coefficient $B^{\omega}_{0,\alpha}$ soit non nul (voir la définition de l'ordre d'une forme au n° 13.1 C). Le poids sera noté $\beta(\omega)$.

Remarque. D'après la formule (6) de la page 246, la somme de l'ordre d'une forme et de son poids est égale à -1.

On appelle *partie dominante* d'une forme ω l'expression

$$\tau^{\beta(\omega)} (B^{\omega}_{0,\beta(\omega)} + \ldots + (\ln \tau)^{n-1} B^{\omega}_{n-1,\beta(\omega)}).$$

La partie dominante est un vecteur dans H^* qui dépend de τ.

Fixons un τ positif. Définissons dans H^* un sous-espace F^k_τ qui soit l'enveloppe linéaire des parties dominantes de toutes les formes de poids non inférieur à $k - n$ (avec τ fixé). S'il n'y a aucune partie dominante ayant un tel poids, on pose $F^k_\tau = \{0\}$. La filtration $\{F^k_\tau\}$, $k \in \mathbf{Z}$, est appelée *filtration de Hodge.*

Définissons la filtration pondérale dans H^*. Nous avons montré au nº 11.1 que $H_n(X, X^-; \mathbf{C}) \cong H_{n-1}(X_t, \mathbf{C})$, $t \in S^-$. On a donc $H^* \cong H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$. La filtration pondérale dans $H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ a été définie au nº 13.2. Prenons comme *filtration pondérale* dans H^* la filtration induite de la filtration analogue dans $H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$.

14.3. Tour d'horizon des résultats sur la structure de Hodge mixte.

A. Structure de Hodge mixte et forme d'intersection. Soit $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe en son point critique de multiplicité μ. Considérons la forme d'intersection S en homologie $H_{n-1}(X_t, \mathbf{R})$ de dimension $n-1$ évanescente au point critique. Soit μ_0 la dimension du noyau de S. Si n est pair, S est alternée et μ_0 son unique invariant réel. Si n est impair, S est symétrique et se laisse diagonaliser par une transformation linéaire réelle. Soient μ_+, μ_- les nombres de coefficients de diagonalisation positifs et négatifs. Les quantités μ_0, μ_+, μ_- épuisent tous les invariants réels de S.

Soient $h_\lambda^{k,m}$ les nombres de Hodge de la structure de Hodge mixte en cohomologie évanescente au point critique de $\mathfrak{f}$.

Théorème 3 (voir [334]). *On a*

$$\mu_0 = \sum_{k+m\leqslant n} h_1^{k,m} - \sum_{k+m\geqslant n+2} h_1^{k,m}.$$

Si n est impair, on a

$$\mu_+ = \sum_{\substack{k+m=n+1\\ m \text{ pair}}} h_1^{k,m} + 2\sum_{\substack{k+m\geqslant n+2\\ m \text{ pair}}} h_1^{k,m} + \sum_{\lambda\neq 1}\sum_{m \text{ pair}} h_\lambda^{k,m}$$

$$\mu_- = \sum_{\substack{k+m=n+1\\ m \text{ impair}}} h_1^{k,m} + 2\sum_{\substack{k+m\geqslant n+2\\ m \text{ impair}}} h_1^{k,m} + \sum_{\lambda\neq 1}\sum_{m \text{ impair}} h_\lambda^{k,m}.$$

Corollaire 1. *La forme S est non dégénérée si et seulement si* 1 *n'est pas une valeur propre de l'opérateur de monodromie.*

Corollaire 2. (voir [334]). *Si n est pair*, $\mu - \mu_0$ *est pair. Si* $n \equiv 3 \bmod 4$, *alors* $\mu - \mu_-$ *est pair. Si* $n \equiv 1 \bmod 4$, *alors* $\mu - \mu_+$ *est pair.*

Si $\mathfrak{f}$ est un germe de fonction quasi homogène, les nombres de Hodge $h_\lambda^{k,m}$ se laissent exprimer en termes de structure quasi homogène de l'algèbre locale du point critique (voir théorèmes 4 et 5 du § 13). Reformulons le théorème 3 pour ce cas précis.

Soit $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction quasi homogène de type $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et de poids 1. Supposons que 0 soit un point critique de multiplicité finie de $\mathfrak{f}$. Soit $\{x^m \mid m \in I\}$ un ensemble de monômes qui se projettent dans la base sur $\mathbf{C}$ de l'algèbre locale

$\mathbf{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Pour $m \in I$ posons $l(m) = (m_1 + 1)\alpha_1 + \ldots + (m_n + 1)\alpha_n - 1$.

Théorème 4 (voir [333]). *On a*

$$\mu_0 = \# \{m \in I \mid l(m) \in \mathbf{Z}\}.$$

Si n est impair, on a

$$\mu_+ = \# \{m \in I \mid l(m) \notin Z,\ [l(m)] \text{ impair}\},$$
$$\mu_- = \# \{m \in I \mid l(m) \notin Z,\ [l(m)] \text{ pair}\}.$$

Exemple 1. A_μ: $f = x_1^{\mu+1} + x_2^2 + x_3^2$, $\alpha = (1/(\mu+1), 1/2, 1/2)$, $I = \{(m_1, 0, 0) \mid m_1 = 0, \ldots, \mu - 1\}$, $l(m) = (m_1 + 1)/(\mu + 1)$. Pour tout $m \in I$ on a $l(m) \in (0, 1)$. La forme d'intersection est définie négative.

Exemple 2. $f = x_1^{a_1} + \ldots + x_n^{a_n}$. La forme d'intersection est non dégénérée si les $a_1, \ldots, a_n$ sont premiers entre eux deux à deux.

Soit f un germe de fonction quasi homogène. Formulons pour ce cas le théorème établissant un rapport entre la forme d'intersection et la multiplication dans une algèbre locale du point critique de f.

Soit X_t la fibre type de la fibration de Milnor du point critique du germe f de fonction quasi homogène. Considérons l'homomorphisme de Poincaré

$$\pi: H_{n-1}(X_t, \mathbf{C}) \to H^{n-1}(X_t, \mathbf{C}).$$

On voit sans peine que l'image par π se confond avec $\bigoplus_{\lambda \neq 1} H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})_\lambda$, où l'indice λ désigne le sous-espace de racines de valeur propre λ de l'opérateur de monodromie. Définissons la forme S^* sur l'image par π:

$$S^*(\cdot, \cdot) = S(\pi^{-1}(\cdot), \pi^{-1}(\cdot)).$$

Pour tout $m \in I$, posons $\omega_m = x^m dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. D'après le théorème 6 du § 13, les sections géométriques des formes ω_m, $m \in I$, induisent une base de sections dans la fibration de cohomologie de Milnor. Si $l(m) \notin \mathbf{Z}$, les valeurs de la section géométrique de ω_m appartiennent à l'image par l'homomorphisme de Poincaré. On dit que la forme ω_m est *primitive* si $l(m) \notin \mathbf{Z}$.

Soit J la classe de l'hessien $\det(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ dans l'algèbre locale $Q = \mathbf{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Une fonctionnelle linéaire $\alpha: Q \to \mathbf{C}$ est dite *permise*, ou *admissible*, si $\alpha(J) \neq 0$ et α est quasi homogène (i.e. nul sur les éléments de Q dont le degré de quasi-homogénéité est distinct du degré de l'élément de J).

Pour $m \in I$ posons $R(m) = l(m)(l(m) - 1) \ldots (l(m) - [(n-2)/2])$ si $n \geqslant 2$ et $R(m) = 1$ si $n = 1$.

Théorème 5 (voir [124, 367]). *Les valeurs des sections géométriques de deux formes primitives ω_m, $\omega_{m'}$ sont orthogonales par rapport à la forme S^* si la somme des ordres des formes (i.e. la quantité $l(m) + l(m')$) est non entière ou si elle est inférieure à $(n - 2)$. Il existe sur l'algèbre locale Q une fonctionnelle linéaire admissible α telle que pour deux formes primitives quelconques ω_m, $\omega_{m'}$ dont la somme des ordres est égale à $n - 2$ on a*

$$S^*(s[\omega_m], s[\omega_{m'}]) = \text{Cte}\cdot\alpha(x^m\cdot x^{m'})\, t^{n-2}/(R(m)\cdot R(m')),$$

où Cte $= 1$ *pour n impair et* Cte $= l(m) - l(m')$ *pour n pair; $s[\omega]$ est la section géométrique de ω; t est la coordonnée dans la base de la fibration de Milnor.*

La fonctionnelle α est explicitée dans [367].

Exemple. A_μ: $f = x_1^{\mu+1} + x_2^2 + x_3^2$; les formes $\omega_m = x_1^m dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$, $m = 0, \ldots, \mu - 1$, sont primitives;

$$S^*(s[\omega_m], s[\omega_{m'}]) = -4\pi^2 t\,(\mu + 1)/(m + 1)(\mu - m)$$

si $m + m' = \mu - 1$. Sur d'autres couples de formes ω_m, $\omega_{m'}$ la forme S^* est nulle.

Dans [337] la forme d'intersection est liée au résidu local.

B. Structure de Hodge mixte et déformations. Supposons que par suite d'une déformation d'une fonction holomorphe, son point critique se sépare en plusieurs points critiques plus simples.

Problème. Quels sont les rapports entre les structures de Hodge mixtes du point critique initial et des points critiques apparus à la suite de la décomposition du point initial?

Il doit visiblement exister des « lois de conservation » pour les décompositions de points critiques qu'on peut formuler en termes de structures de Hodge mixtes. De nombreux exemples nous portent à avancer l'hypothèse suivante.

Ordonnons le spectre du point critique: $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_\mu$.

Hypothèse (V. Arnold [18]). *Le spectre est semi-continu au sens suivant: si le point critique P est adjacent à un point critique P′ (plus simple), avec $\mu' < \mu$, alors $\alpha_k \leqslant \alpha'_k$.*

Remarques. 1. Même dans des cas simples et se prêtant à un calcul direct (tels que le cas quasi homogène ou le cas du point critique d'une fonction de deux variables à partie principale non dégénérée de la série de Taylor), cette hypothèse est une assertion arithmétique non triviale relative aux points entiers intérieurs à des polyèdres convexes.

2. V. Goryunov [130] a vérifié cette hypothèse pour les points critiques simples adjacents à des points simples, pour les points critiques unimodaux adjacents à des points unimodaux, pour les

points critiques bimodaux de rang 2 adjacents entre eux, voir [130] et le tableau des spectres à la page 306.

3. La symétrie du spectre par rapport au point $n/2 - 1$ démontre l'hypothèse pour le cas où le point critique P' est non dégénéré.

4. La symétrie du spectre par rapport au point $n/2 - 1$ et l'hypothèse conduisent à l'encadrement $\alpha_k \leqslant \alpha'_k \leqslant \alpha_{k+(\mu-\mu')}$. Par exemple, si le point critique composé donne par décomposition un point de Morse ($\mu = \mu' + 1$), le spectre du point P' divise le spectre du point P.

Le rapport entre les spectres des points P et P' est le même qu'entre les demi-axes d'un ellipsoïde dans $\mathbf{R}^{\mu}$ et les demi-axes de sa section par le sous-espace $\mathbf{R}^{\mu'}$.

5. L'hypothèse implique la semi-continuité des dimensions des espaces de la filtration de Hodge, à savoir la semi-continuité des nombres

$$h^r = \sum_{r \leqslant k} \sum_m h^{k,m}, \qquad h_r = \sum_{r > k} \sum_m h^{k,m}.$$

6. Dans le cas particulier du point critique d'une fonction de deux variables, cette semi-continuité se réduit à celle du genre g de la fibre type de la fibration de Milnor et à celle du « cogenre » $\mu - g$ (auquel cas la fibre type est une surface riemanienne dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est $1 - \mu$ et qui présente $\mu + 1 - 2g$ « trous »). La semi-continuité des deux quantités est évidente (celle du « cogenre » découle de la nature monomorphe du plongement de l'homologie évanescente au point critique simple dans l'homologie évanescente au point critique composé).

7. L'hypothèse avancée corrige et généralise l'hypothèse de semi-continuité de l'indice d'oscillation du point critique d'une fonction analytique réelle (voir n°s 6.6, 9.2, 13.1 D, 13.3 C, ainsi que [11, 12, 17]).

Considérons une déformation du point critique initial P à la suite de laquelle P ne se décompose pas, i.e. pour toute valeur du paramètre de déformation il existe exactement un point critique de multiplicité μ.

Théorème 6 (voir [351, 355]). *Le spectre est invariant par de telles déformations.*

Remarques. 1. L'assertion du théorème est une variante de l'assertion de l'hypothèse d'Arnold pour $\mu = \mu'$.

2. On montre dans [355] que les sous-espaces de la filtration par le poids et de celle de Hodge subissent une variation holomorphe avec la variation du paramètre de déformation.

3. Du théorème 6 il ressort que le plus petit ordre possible de l'intégrale d'une forme holomorphe suivant les classes d'une famille

covariantement constante d'homologie évanescente au point critique (i.e. la première valeur spectrale) est invariant par les déformations décrites ci-dessus. Cela signifie que si le plus petit ordre possible de l'intégrale change par la déformation donnée, celle-ci ne conserve non plus la multiplicité du point critique (i.e. il se produit une décomposition du point critique). Ce raisonnement conduit au théorème 7 qui suit.

Soit un germe de fonction holomorphe $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ en son point critique de multiplicité μ, et soit son déploiement $\mathfrak{F}: (\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k, 0 \times 0) \to (\mathbf{C}, 0)$. On appelle *strate* $\mu =$ Cte de $\mathfrak{F}$ un germe d'ensemble $(\Lambda, 0) \subset (\mathbf{C}^k, 0)$ composé de toutes les valeurs des paramètres λ pour lesquelles une fonction $\mathfrak{F}(\cdot, \lambda)$ admet un point critique de multiplicité μ de valeur critique 0.

Théorème 7 (voir [358, 372]). *La codimension de la strate* $\mu =$ $=$ Cte *dans la base du déploiement versel d'un germe de fonction holomorphe en son point critique de multiplicité finie est non inférieure au nombre des valeurs spectrales de la structure de Hodge mixte du point critique du germe plus petites que* $\alpha_1 + 1$ (α_1 *est la première valeur spectrale*).

Remarque. S'il s'agit du point critique d'une fonction semi-quasi homogène, la strate $\mu =$ Cte dans la base du déploiement versel a la codimension égale au nombre des valeurs spectrales invoquées dans le théorème 7. La majoration découle de [190], la minoration est donnée par le théorème 7, le majorant et le minorant de la codimension sont égaux. Il y a plus: dans le cas du point critique d'une fonction quasi homogène, le raisonnement précédant le théorème 7 permet d'exhiber explicitement la strate $\mu =$ Cte.

Théorème 8 (voir [358]). *Soit* $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ *un germe quasi homogène de type* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *et de poids* 1. *Soit* $\{x^m \mid m \in I\}$ *un ensemble de monômes qui se projettent dans la base sur* $\mathbf{C}$ *de l'algèbre locale* $\mathbf{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. *Considérons le représentant* $F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{m \in I} \lambda_m x^m$ *du déploiement versel de* $\mathfrak{f}$. *La strate* $\mu =$ Cte *se définit alors par les équations* $\{\lambda_m = 0 \mid m \in I, (\alpha, m) < 1\}$.

On trouve dans [118] la démonstration du théorème 8 pour les germes homogènes.

L'hypothèse d'Arnold fût prouvée récemment.

Soient $\mathfrak{f} \mid: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe en son point critique isolé, et $\mathfrak{F}: (\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^l, 0 \times 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ son déploiement.

Définition [362]. On dit que $U \subset \mathbf{R}$ est l'*ensemble de semi-continuité* de $\mathfrak{F}$ si U possède la propriété suivante. Pour un λ assez petit,

$\lambda \in \mathbf{C}^l$, soient $x^1, \ldots, x^s \in \mathbf{C}^n$ les points critiques de même valeur critique d'une fonction $\mathfrak{F}(\cdot, \lambda)$; alors on trouve dans U au moins autant de valeurs spectrales du point critique initial de $\mathfrak{f}$ que de valeurs spectrales des points critiques $x^1, \ldots, x^s$ pour la totalité de ces points.

Hypothèse de semi-continuité de la densité du spectre (voir [361]). Tout intervalle $(\alpha, \alpha + 1)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, est ensemble de semi-continuité pour toute déformation.

Remarque. On devrait peut-être considérer le demi-intervalle $(\alpha, \alpha + 1]$ au lieu de l'intervalle $(\alpha, \alpha + 1)$ dans l'énoncé de l'hypothèse.

Il est clair que cette hypothèse conduit à celle d'Arnold.

Propositions sur la semi-continuité:

(I) *L'hypothèse de semi-continuité de la densité du spectre est vérifiée pour les déploiements des germes de fonctions de une ou de deux variables* (voir [364, 365]).

(II) *Tout intervalle* $(\alpha, \alpha + 1)$, $\alpha \in (-2, -1)$, *et le demi-intervalle* $(-1, 0]$ *sont des ensembles de semi-continuité pour les déploiements des germes de fonctions d'autant de variables que l'on veut* (voir [364, 365]).

(III) *Pour tout* $\alpha \in \mathbf{R}$ *irrationnel, l'ensemble* $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (\alpha + 2k, \alpha + 2k + 1)$ *est ensemble de semi-continuité pour les déploiements des germes de fonctions d'autant de variables que l'on veut* (voir [362]).

(IV) *Soit* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *un polynôme quasi homogène de type* $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ *et de poids* 1 *ayant un point critique isolé à l'origine. On appelle déformation inférieure de* f *tout polynôme*

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_j \varphi_j,$$

où les $\{\varphi_j\}$ *sont des monômes de poids quasi homogène inférieur à* 1. *Alors les déformations inférieures du polynôme vérifient l'hypothèse de semi-continuité de la densité du spectre* (voir [361]).

Corollaires. 1° *L'indice d'oscillation complexe du point critique d'un germe de fonction de une, deux ou de trois variables est semi-continu supérieurement par les déploiements* (voir [363]).

2° *On dit que le point critique d'un germe de fonction d'autant de variables que l'on veut est suffisamment dégénéré si son indice d'oscillation complexe est dans* $(-1, 0]$. *Alors l'indice d'oscillation complexe d'un point critique suffisamment dégénéré est semi-continu supérieurement par les déploiements du germe* (voir [363]).

Le critère de dégénérescence suffisante est formulé dans [363] ainsi qu'au n° 13.1 G. Enfin, dans [336], la démonstration de l'hypothèse d'Arnold fut achevée.

(V) *Tout intervalle* $(\alpha, \alpha + 1]$ *est ensemble de semi-continuité* [336].

La proposition (IV) apporte du nouveau à la question suivante. Soit $Y \subset \mathbf{C}P^n$ une hypersurface algébrique de degré d dont tous les points singuliers (simples, doubles) sont non dégénérés. Quel est le nombre maximal $N_n(d)$ de points singuliers non dégénérés que puisse porter une hypersurface de degré d?

La réponse exhaustive à cette question est connue seulement pour $n = 1$ et 2. On a $N_1(d) = [d/2]$ et $N_2(d) = d(d-1)/2$, le maximum ayant lieu sur une courbe se décomposant en un ensemble de droites génériques. Les cas non triviaux commencent à partir de $n = 3$.

Majorations. Le premier résultat est dû à A. B. Basset (1906, [38]):

$$N_3(d) \leqslant (d(d-1)^2 - 5 - \sqrt{d(d-1)(3d-14)+25})/2,$$

le majorant tendant vers $d^3/2$ pour $d \to \infty$. D'autres auteurs (voir [39, 56, 331, 126]) ont amélioré cette majoration et l'ont généralisée au cas de $n > 3$, mais le majorant présentait toujours le comportement asymptotique $d^n/2$ pour $d \to \infty$. La proposition (IV) ci-dessus fournit une majoration suivant une autre loi asymptotique.

On appelle *nombre d'Arnold* $A_n(d)$ le nombre des points entiers $(k_1, \ldots, k_n)$ strictement intérieurs au cube $(0, d)^n$ tels que $(n-2)d^n/2 + 1 < \sum k_i \leqslant nd/2$. Par exemple, pour $n = 3$ on a $A_3(d) = 23d^3/48 +$ (les termes de plus bas degré en d).

Proposition sur la majoration (voir [361]). *Soit* $Y \subset \mathbf{C}P^n$ *une hypersurface algébrique de degré d dont tous les points singuliers sont isolés. Alors le nombre de ses points singuliers non dégénérés est non supérieur à* $A_n(d)$. *Si* $n = 3$, *le nombre total des points singuliers est non supérieur à* $A_3(d)$.

Pour un n donné le nombre d'Arnold $A_n(d)$ s'écrit $a_n d^n +$ (les termes de plus bas degré en d). On montre sans peine que $a_n \sim \sim \sqrt{6/\pi n}$ pour $n \to \infty$.

Dans le cas de surfaces de $\mathbf{C}P^3$, Miyaoka a récemment démontré la meilleure majoration, connue à ce jour, du nombre de points singuliers non dégénérés, son comportement asymptotique est $4d^3/9$.

Proposition (voir [247]). *Soit* $Y \subset \mathbf{C}P^3$ *une surface de degré d dont les seules singularités sont des points rationnels doubles (i. e. des points de types* A_μ, D_μ, E_6, E_7, E_8). *Alors leur nombre n'est pas supérieur à* $4d(d-1)^2/9$.

Nous donnons ci-bas une table de majorations pour d petits et $n = 3$ tirée pour l'essentiel de [247].

Stagnaro déduit ses estimations en supposant la position des points singuliers sur la surface, générique. Par conséquent, l'égalité

d	$N_3(d)$	$A_3(d)$	Miyaoka	Basset	Stagnaro	Bruce
4	16	16	16	16	16	17
5	31	31	36	34	32	32
6	$\geqslant 64$	68	66	66	64	73
7	$\geqslant 90$	104	112	114	111	108
8	$\geqslant 160$	180	174	224	178	193
9	$\geqslant 160$	246	256	270	267	256
10	$\geqslant 325$	375	360	384	380	401
11	$\geqslant 300$	480	488	535	521	500
12	$\geqslant 576$	676	645	696	693	721

N_3 (6) $= 64$ n'est pas prouvée. Tout récemment Stagnaro a publié le résultat N_3 (6) $= 66$. L'égalité N_3 (4) $= 16$ est démontrée par Kummer (1864), N_3 (5) $= 31$ par Beauville (1980 [39]). L'inégalité N_3 (6) $\geqslant 64$ appartient à Catanese-Ceresa [37] et à Stagnaro [331], l'inégalité N_3 (7) $\geqslant 90$ est due à Stagnaro [331]; N_3 (8) $\geqslant 160$ à Kreis [39] et Gallarati [38]; les inégalités N_3 (9) $\geqslant 160$, N_3 (10) $\geqslant$ $\geqslant 325$, N_3 (11) $\geqslant 300$, N_3 (12) $\geqslant 576$ à Kreis [39].

Minorations. S. Chmutov a proposé une méthode qui fournit semble-t-il la meilleure minoration du nombre N_n (d) pour d grand. Il a proposé de prendre comme hypersurface à grand nombre de points singuliers une hypersurface d'équation affine $\sum_{j=1}^{n} T_d\,(x_j) = 0$ pour n pair et $\sum_{j=1}^{n} T_d\,(x_j) = 1$ pour n impair. Ici T_d est un polynôme de Tchébychev de degré d ayant deux valeurs critiques: ± 1. Le nombre C_n (d) des points singuliers de l'hypersurface de Chmutov s'écrit $c_n d^n +$ (les termes de plus bas degré en d). Par exemple $c_3 = 3/8$. Pour $n \to \infty$ on a $c_n \sim \sqrt{2/(\pi n)}$.

Le cas $d = 3$. A_n (3) $\sim 2^n\sqrt{8\pi n}$ pour $n \to \infty$ (A. Givental). En partant de l'idée de Chmutov, A. Givental a pu construire des exemples d'hypersurfaces cubiques à grand nombre de points singuliers. Soit G (x, y) un polynôme de degré 3 à deux valeurs critiques: ± 1, portant l'une trois points critiques et l'autre, un point. On a alors pour le nombre g_n de points singuliers d'une hypersurface cubique d'équation $\sum_{j=1}^{n/2} (-1)^j G\,(x_j, y_j) = 0$ de n variables (pour n pair) le comportement asymptotique $g_n \sim 2^n\sqrt{16/3\pi n}$ pour $n \to \infty$.

Les majorations et les exemples de Givental pour $d = 3$ et n petits sont donnés dans la table suivante.

n	2	3	4	5	6	7	8	9
A_n (3)	3	4	10	15	35	56	126	196
Givental	3	4	10	15	33	54	118	189

L'égalité N_5 (3) appartient à Togliatti (1936 [346]). Citons encore une application de la proposition sur la majoration.

Proposition [365]. *Soit $Y \subset \mathbf{C}P^2$ une courbe algébrique de degré d ne présentant que des points singuliers isolés. Soit n_1 le nombre de ses points singuliers non dégénérés, n_2, celui de ses points de rebroussement, B (d) le nombre de points entiers (k_1, k_2) strictement intérieurs au carré $(0, d)^2$ tels que* $[d/6] + 1 < k_1 + k_2 \leqslant 7d/6$. *Alors* $n_1 + 2n_2 \leqslant B$ (d).

Notons que B $(d) \sim 23d^2/36$ pour $d \to \infty$. Citons enfin l'article de Chmutov [74] consacré aux majorations du nombre de points singuliers d'une fonction, situés à ses deux niveaux.

C. Singularités réelles. Nous allons décrire l'utilité de la structure de Hodge mixte en cohomologie évanescente pour l'estimation des caractéristiques réelles de fonctions réelles. Il s'agit notamment de l'étude de la topologie des variétés algébriques réelles en géométrie algébrique.

Soit une courbe algébrique réelle non singulière de degré m située sur le plan projectif réel. Les composantes connexes de la courbe (variétés de dimension un difféomorphes au cercle) sont appelées *ovales*. La question de position relative des ovales d'une courbe algébrique réelle est un des problèmes de géométrie classique (voir le seizième problème de Hilbert).

Les courbes planes du second degré furent étudiées encore en Grèce ancienne; Descartes et Newton étudièrent les courbes de degrés 3 et 4. La topologie des courbes de plus haut degré fut un problème autrement ardu : l'étude complète des courbes non singulières de degré 6 ne fut achevée que vers 1969, et toutes les positions relatives possibles des ovales d'une courbe de degré 8 restent inconnues encore aujourd'hui (voir [26, 141, 386]).

En plus de la description de la situation des ovales sur les courbes de bas degré, on connaît différentes assertions relatives aux intervalles de variation possible des diverses caractéristiques numériques des courbes algébriques d'un degré donné (voir [26]). Une assertion de ce type est l'inégalité de I. Petrovski qui suit. Nous en discuterons les généralisations.

Chaque ovale d'une courbe de degré pair partage le plan projectif en deux parties dont l'une est difféomorphe au cercle et s'appelle *intérieur* de l'ovale, et l'autre est difféomorphe à la bande de Moebius. On dit que l'ovale est *positif* (ou *pair*) s'il est intérieur à un nombre pair d'autres ovales, et *négatif* (ou *impair*) s'il est intérieur à un nombre impair d'ovales. Notations: p = nombre d'ovales positifs, k = nombre d'ovales négatifs.

I. Petrovski a démontré en 1938 [246], pour les courbes de degré pair $d = 2l$, l'égalité

$$|2(p-k)-1| \leqslant 3l^2 - 3l + 1;$$

on trouve également dans [246] une généralisation de cette inégalité aux courbes de degré impair. En 1949 I. Petrovski et O. Oleïnik ont démontré [272] des inégalités analogues pour les hypersurfaces algébriques réelles différentiables dans l'espace de dimension quelconque.

Considérons en effet une hypersurface projective réelle non singulière $A \subset \mathbf{R}P^{n-1}$ de degré d définie par un polynôme homogène f de n variables. Si d est pair, on note B_+ et B_- les parties de $\mathbf{R}P^{n-1}$ définies par les conditions $f \geqslant 0$, $f \leqslant 0$ respectivement.

On appelle *nombre de Petrovski* le nombre des points entiers strictement intérieurs au cube $(0, d)^n$ et situés sur l'hyperplan qui passe par le centre du cube normalement à sa grande diagonale. Notation:

$$\Pi_n(d) = \{\# k = (k_1, \ldots, k_n) \mid 0 < k_s < d, \ \sum k_s = dn/2\}.$$

Les inégalités de Petrovski-Oleïnik sont:

$$|\chi(A) - 1| \leqslant \Pi_n(d) \text{ si } n \text{ est pair;}$$

$$|\chi(B_+) - \chi(B_-)| \leqslant \Pi_n(d) \text{ si } n \text{ est impair et } d \text{ pair.}$$

Ici χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré. En particulier, la première inégalité donne une estimation pour $n = 4$ de la caractéristique d'Euler-Poincaré des surfaces algébriques dans l'espace projectif réel tridimensionnel; la seconde inégalité se confond pour $n = 3$ avec l'inégalité de Petrovski.

V. Arnold a proposé une forme unique pour les inégalités de Petrovski-Oleïnik:

Théorème 8 (voir [15]). *La quantité figurant dans le premier membre de l'inégalité de Petrovski-Oleinik est égale tant pour n pair que pour n impair à* |ind|, *où* ind *est l'indice du point singulier* $0 \in \mathbf{R}^n$ *du gradient dans* $\mathbf{R}^n$ *du polynôme* f, *définissant l'hypersurface.*

Théorème 9 (voir [15]). *La quantité figurant dans le second membre de l'inégalité de Petrovski-Oleïnik est égale, pour l'hypersurface donnée par un polynôme homogène* f, *au nombre de Hodge* $h^{n/2,\,n/2}_{\lambda=1}$ *de la structure de Hodge mixte en cohomologie évanescente au point critique*

$0 \in \mathbf{R}^n$ *du polynôme f (regardé comme une fonction sur* $\mathbf{C}^n$ *pour n pair, et au nombre de Hodge* $h_{\lambda=1}^{(n+1)/2, (n+1)/2}$ *de la structure de Hodge mixte en cohomologie évanescente au point critique* $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ *du polynôme* $f(x) + y^2$ *si n est impair et d est pair.*

Ainsi donc, les inégalités de Petrovski-Oleïnik prennent une forme d'expression unique : le module de l'indice du point singulier dans $\mathbf{R}^n$ du gradient d'un polynôme à coefficients réels est majoré par un nombre de Hodge correspondant de la structure de Hodge mixte en cohomologie évanescente au point critique du polynôme regardé comme une fonction dans l'espace complexe.

Sous cette forme les inégalités de Petrovski-Oleïnik sont généralisées au cas du point critique de multiplicité finie d'une fonction différentiable.

Soit $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe en son point critique de multiplicité finie. Supposons que, restreint au sous-espace réel $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$, le germe $\mathfrak{f}$ ne prenne que des valeurs réelles. Considérons sur $\mathbf{R}^n$, au voisinage de son origine, le champ de vecteurs grad $\mathfrak{f}\,|_{\mathbf{R}^n}$. Soit ind l'indice de son point singulier 0.

Théorème 10 (voir [15, 367]). *Si* $n = 2k$ *est pair, on a*

$$|\mathrm{ind}| \leqslant h_{\lambda=1}^{k,k},$$

où $h_{\lambda=1}^{k,k}$ *est le nombre de Hodge de la structure de Hodge mixte en cohomologie évanescente au point critique de* $\mathfrak{f}$. *Si* $n = 2k - 1$ *est impair, on a*

$$|\mathrm{ind}| \leqslant h_{\lambda=1}^{k,k},$$

où $h_{\lambda=1}^{k,k}$ *est le nombre de Hodge de la structure de Hodge mixte en cohomologie évanescente au point critique* $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ *du germe* $\mathfrak{f}(x) + \mathfrak{z}^2$ *de fonction de* $n + 1$ *variables.*

Remarques. 1. Pour $n = 2$ il découle du théorème que le module de l'indice du point singulier 0 de multiplicité finie du gradient d'une fonction réelle de deux variables ayant un polyèdre de Newton donné est non supérieur au nombre des points entiers intérieurs sur le diagramme de Newton (voir [15], et aussi n° 13.3 D).

2. Comme pour les inégalités de Petrovski-Oleïnik, on peut exprimer l'indice en fonction des caractéristiques d'Euler-Poincaré des variétés de niveau locales du germe $\mathfrak{f}\,|_{R^n}$. Soit en effet X_t la fibre de la fibration de Milnor du point critique du germe $\mathfrak{f}$. Soit $\mathbf{R}X_t$ sa partie réelle $X_t \cap \mathbf{R}^n$. Soit $\tilde{\chi}_+$ (resp. $\tilde{\chi}_-$) la caractéristique d'Euler-Poincaré réduite (diminuée de 1) de la variété $\mathbf{R}X_t$ pour t positif (resp. pour t négatif). On démontre sans peine (voir par exemple [15)] le

Lemme 1. *L'indice du point singulier* 0 *du champ de vecteurs* grad $\mathfrak{f}\,|_{\mathbf{R}^n}$ *est lié aux caractéristiques d'Euler-Poincaré réduites des variétés de niveau locales réelles du germe* $\mathfrak{f}\,|_{\mathbf{R}^n}$ *par les relations suivantes*:

$$\operatorname{ind} = -\bar{\chi}_- = \begin{cases} -\tilde{\chi}_+ & \text{pour } n \text{ pair}, \\ \tilde{\chi}_+ & \text{pour } n \text{ impair}. \end{cases}$$

3. La quantité $h^{k,k}_{\lambda=1}$ intervenant dans le théorème admet — indépendamment de la parité de n — une expression unique en fonction du spectre du point critique de $\mathfrak{f}$: c'est le nombre des couples spectraux égaux à $(n/2 - 1, n - 1)$. Pour $n = 2k$ cela est évident, et pour $n = 2k - 1$ on utilise le corollaire du théorème 7 du § 13. Notons que $(n/2 - 1, n - 1)$ est le centre de symétrie de la collection des couples spectraux.

4. Le prototype des inégalités du théorème, en plus des inégalités de Petrovski-Oleïnik, est l'inégalité suivante due à V. Kharlamov [181]:

$$|\chi(A) - 1| \leqslant h^{k,k} - 1,$$

où A est une variété projective réelle non singulière quelconque de dimension $2k$ et $h^{k,k}$ le nombre de Hodge de la structure de Hodge pure en cohomologie du complexifié de A.

D'autres restrictions imposées à la situation de la variété algébrique réelle ont été proposées dans les travaux de V. Arnold, O. Viro, D. Gudkov, V. Zvonilov, V. Nikulin, O. Oleïnik, I. Petrovski, G. Polotovski, V. Rokhlin, R. Thom, V. Kharlamov cités en fin du livre.

5. La majoration qui fait l'objet du théorème 10 peut servir d'exemple du schéma de raisonnement suivant en géométrie réelle (voir [15]). Pour majorer un invariant de type topologique réel, on cherche un invariant convenable d'un objet complexe qui majore le premier. Les invariants des objets complexes sont constants pour presque tous les membres de la famille complexe irréductible (car les cas non dégénérés correspondent à une hypersurface complexe dans l'espace des paramètres de la famille, et le complémentaire d'une telle hypersurface est connexe). C'est la raison pour laquelle on calcule les invariants de l'objet complexe en termes de données discrètes du problème (le degré, le polyèdre de Newton, etc.). La recherche d'une majoration des invariants de type topologique réel implique donc à résoudre deux problèmes distincts: chercher l'invariant majorant d'un objet complexe et calculer cet invariant au moyen de données discrètes.

6. Formulons un problème non résolu [15]: on demande des majorations non améliorables (exprimées au moyen des nombres de

Hodge (?)) des nombres de Betti individuels dans le cas d'une variété de niveau locale d'une fonction différentiable réelle au voisinage de son point critique dégénéré, en particulier du nombre b_0. Il serait peut-être plus facile de majorer les nombres b_0, $b_0 - b_1$, $b_0 - b_1 + b_2$, . . ., ainsi que des combinaisons de nombres de Morse types locaux M_0, $M_0 - M_1$, $M_0 - M_1 + M_2$, . . ., où M_i est le nombre des points critiques non dégénérés d'indice i confluents au point critique initial pour une morsification de ce dernier.

Indiquons, enfin, les transformations subies par les surfaces de niveau d'une fonction de trois variables au voisinage de son point critique simple ou unimodal.

On sait bien qu'au voisinage de son point critique non dégénéré toute fonction se présente comme une forme quadratique, à condition de choisir des coordonnées convenables. Il y a donc deux éventualités, en fonction de la signature de la forme quadratique : les surfaces de niveau sont soit des sphères et des ensembles vides (suivant la valeur du niveau), soit des hyperboloïdes à une et à deux nappes. Il se trouve qu'au voisinage d'un point critique simple ou unimodal d'une fonction de trois variables, les surfaces de niveau subissent exactement dix transformations, ou bifurcations, différentes que nous allons décrire.

Toute bifurcation des surfaces de niveau au voisinage d'un point critique de valeur critique 0 est un couple de surfaces de petit niveau positif et de petit niveau négatif qui appartiennent à une boule de petit rayon centrée en le point critique. On obtient un tel couple de surfaces en prenant une petite sphère centrée au point critique et en la partageant, au moyen de la surface de niveau nul, en deux parties : le lieu des valeurs positives est un ensemble difféomorphe à la surface de petit niveau positif, le lieu des valeurs négatives est un ensemble difféomorphe à la surface de petit niveau négatif, et le lieu des valeurs nulles est une variété différentiable de dimension 1 (réunion des « ovales ») ; voir [245].

Une telle partition de la sphère se laisse aisément décrire par un graphe aux sommets affectés de signes + ou —. Etant donnée une partition, ses domaines connexes sont les sommets du graphe (affectés du signe qui correspond à celui de la fonction sur l'ensemble représenté) ; deux sommets sont liés par une arête s'il s'agit de domaines contigus. La sphère étant simplement connexe, le graphe en question est un arbre. Par exemple, pour la fonction $x^2 + y^2 - z^2$ le graphe présente trois sommets liés par deux segments ; les sommets extrêmes ont le signe —.

S'agissant d'une fonction de deux variables (resp. d'une variable) sa bifurcation au voisinage du point critique se définit par la partition d'un petit cercle de petit rayon (resp. d'un couple de points) en deux domaines, lieux des valeurs positives et des valeurs négatives de la fonction. Une telle partition se définit par les nombres de com-

posantes connexes de chaque domaine : un couple de nombres (b_0^+, b_0^-), appelé dans le texte qui suit le *type de bifurcation.*

Dans le théorème suivant les noms des points critiques sont les mêmes qu'au § 17 de la Première partie. Les lettres sont munies d'indices supérieurs $+$, $-$ ou $\pm$. Il y a autant de signes en indice qu'il y a de signes $\pm$ dans la formule correspondante du § 17 de la Première partie ; parfois il y a un signe de plus : c'est celui du paramètre a dans la formule. L'ordre des indices de la notation coïncide avec l'ordre des signes dans la formule. On suppose vérifiées les restrictions consenties au § 17, et de plus $p, q, r > 2$ dans $T_{p,q,r}$.

Théorème (S. Orevkov [262]). 1. *Les points critiques des fonctions d'une variable admettent trois types de bifurcation :*

type (2, 0) (*le minimum*): A_{2k+1}^+;

type (0, 2) (*le maximum*): A_{2k+1}^-;

type (1, 1): A_{2k}.

2. *Les points critiques simples et unimodaux de 2-jet nul des fonctions de deux variables admettent les types de bifurcation suivants sur les surfaces de niveau :*

type (1, 0): X_9^{++} *pour* $a > -2$, X_{9+2k}^{+++}, $Y_{2r,2s}^{+++}$, $\tilde{Y}_r^+$;

type (0, 1): X_9^{--} *pour* $a < 2$, X_{9+2k}^{---}, $Y_{2r,2s}^{---}$, $\tilde{Y}_r^-$;

type (1, 1): D_{2k}^+, E_6, E_8, J_{10}^+ *pour* $a^2 < 4$, J_{10+2k}^{++}, J_{10+2k}^{--}, $X_{9+2k+1}^{++\pm}$, $X_{9+2k+1}^{--\pm}$, $Y_{2r,2s+1}^{++\pm}$, $Y_{2r,2s+1}^{--\pm}$;

type (2, 2): $D_{2++1}^{\pm}$, E_7, X_9^{+-}, X_9^{-+}, $J_{10+2k+1}^{\pm}$, $X_{9+2k}^{+\pm-}$, $X_{9+2k}^{-\pm+}$, $Y_{2r,2s}^{\pm+-}$, $Y_{2r,2s}^{\pm-+}$, $Y_{2r+1,2s+1}^{\pm\pm\pm}$;

type (3, 3): D_{2k}^-, J_{10}^-, J_{10}^+ *pour* $a^2 > 4$, J_{10+2k}^{+-}, J_{10+2k}^{-+}, $X_{9+2k+1}^{+-\pm}$, $X_{9+2k+1}^{-+\pm}$, $Y_{2r,2s+1}^{+-\pm}$, $Y_{2r,2s+1}^{-+\pm}$;

type (4, 4)): X_9^{++} *pour* $a < -2$, X_9^{--} *pour* $a > 2$, X_{9+2k}^{-+-}, X_{9+2k}^{+-+}, $Y_{2r,2s}^{+--}$, $Y_{2r,2s}^{-++}$.

3. *Les points critiques unimodaux des fonctions de trois variables admettent des bifurcations sur les surfaces de niveau de types et de graphes indiqués sur la figure* 84 :

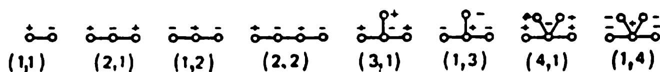


Fig. 84

type (1, 1): P_8^{+} *pour* $a^2 < 4$, P_{8+2k}^{++}, P_{8+2k}^{--}, $R_{2l,2m}^{+-}$, $R_{2l,2m}^{-+}$, $R_{2l+1,2m+1}^{++}$, $R_{2l+1,2m+1}^{--}$, $\tilde{R}_m^{++}$, $\tilde{R}_{2m+1}^{+-}$, $T_{2p,2q,2r+1}^{+-\pm}$, $T_{2p+1,2q+1,2r+1}^{\pm\pm\pm\pm}$ *(nombre pair de signes positifs)*, $\tilde{T}_{2p+1,m}^{+}$, E_{12}, E_{14}, W_{12}, Q_{10}, Q_{12}, S_{12}, $U_{12}^{+\pm}$;

type (2, 1): P_{8+2k+1}^{++}, P_{8+2k+1}^{--}, $R_{2l,2m+1}^{-\pm}$, $T_{2p,2q,2r}^{+--}$, $T_{2p,2q+1,2r+1}^{-\pm\pm}$, $\tilde{T}_{2p,m}^{+}$, E_{13}^{-}, $Z_{13}^{\pm-}$, $W_{13}^{\pm-}$, Q_{11}^{+}, S_{11}^{-}, Z_{11}^{-};

type (1, 2): P_{8+2k+1}^{+-}, P_{8+2k+1}^{-+}, $R_{2l,2m+1}^{+\pm}$, $T_{2p,2q,2r}^{++-}$, $T_{2p,2q+1,2r+1}^{+\pm\pm}$, $\tilde{T}_{2p,m}^{-}$, E_{13}^{+}, $Z_{13}^{\pm+}$, $W_{13}^{\pm+}$, Q_{11}^{-}, S_{11}^{+}, Z_{11}^{+};

type (2, 2): P_8^{+} *pour* $a^2 > 4$, P_{8+2k}^{+-}, P_{8+2k}^{-+}, $R_{2l+1,2m+1}^{+-}$, $R_{2l+1,2m+1}^{-+}$, $\tilde{R}_{2m+1}^{-+}$, $\tilde{R}_m^{--}$, $T_{2p+1,2q+1,2r+1}^{\pm\pm\pm\pm}$ *(nombre impair de signes positifs)*, $\tilde{T}_{2p+1,m}^{-}$;

type (3, 1): $R_{2l,2m}^{--}$, $\tilde{R}_{2m}^{+--}$, $\tilde{R}_{2m}^{-+-}$, $T_{2p,2q,2r+1}^{--\pm}$, Z_{12}^{-}, U_{12}^{--};

type (1, 3): $R_{2l,2m}^{++}$, $\tilde{R}_{2m}^{+-+}$, $\tilde{R}_{2m}^{-++}$, $T_{2p,2q,2r+1}^{++\pm}$, Z_{12}^{-}, U_{12}^{-+};

type (4, 1): $T_{2p,2q,2r}^{---}$;

type (1, 4): $T_{2p,2q,2r}^{+++}$.

Corollaire. *Pour les points critiques énumérés à l'alinéa* 3 *du théorème le graphe de la bifurcation est défini par son type.*

Remarques. 1 (S. Orevkov [263]). Le théorème permet de décrire les transformations des hypersurfaces de niveau au voisinage des points critiques dont chacun est somme directe des points énumérés dans le théorème. En effet, si la somme directe a deux termes dont l'un est fonction de m et l'autre de k variables, le domaine des valeurs positives (négatives) de la somme sur la sphère S^{m+k-1} correspond à l'ensemble $(M_{\pm}^{m-1} \times D^k) \cup (D^m \times M_{\pm}^{k-1})$ par l'homéomorphisme $(S^{m-1} \times D^k) \cup (D^m \times S^{k-1}) \to S^{m+k-1}$, où $M_{\pm}$ est l'ensemble des valeurs positives (négatives) prises par le terme en question de la somme directe sur la sphère correspondante. En particulier, quand on ajoute le carré d'une nouvelle variable (i.e. quand on passe à un point stablement équivalent), le nouveau domaine des valeurs négatives sur la sphère se déduit de l'ancien par multiplication par l'intervalle, et le nouveau domaine des valeurs positives sur la sphère est obtenu en recollant deux exemplaires de la boule suivant l'ancien domaine des valeurs positives sur la sphère qui constitue le bord de cette boule.

2. Sur les surfaces de niveau d'une fonction de trois variables, au voisinage de son point critique simple ou unimodal, dix types de bifurcations sont possibles : en plus des huit types de la figure 84, ce sont le type (1, 0) (le minimum) et le type (0, 1) (le maximum). Cette assertion découle du théorème et de la remarque précédente.

D. Polynôme de Bernstein. Soit $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ une forme quadratique. On a l'identité

$$\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(\partial/\partial x_i)^2\right)Q(x)^\lambda = \lambda\left(\lambda+\frac{n}{2}-1\right)Q(x)^{\lambda-1}.$$

I. Gelfand et G. Shilov l'ont utilisée dans [121] pour définir le degré complexe d'une forme quadratique considérée comme une distribution. Cette identité a motivé le théorème suivant dû à I. Bernstein.

Soit $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe. Soit λ une variable indépendante. Considérons un ensemble de sommes finies du type

$$\sum_{k,\, l\geqslant 0} \mathfrak{a}_{k,\, l}(x)\,\lambda^l \mathfrak{f}(x)^{\lambda-k}, \text{ où } \mathfrak{a}_{k,\, l}\colon (\mathbf{C}^n,\ 0)\to\mathbf{C}$$

sont des germes de fonctions holomorphes et $\mathfrak{f}^{\lambda-k}$ des symboles formels. Soient $P(x, \lambda, \partial/\partial x)$ des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes en x et polynomiaux en λ :

$$P(x,\ \lambda,\ \partial/\partial x) = \sum_{k,\, \alpha\geqslant 0} \mathfrak{b}_{k,\, \alpha}(x)\,\lambda^k\,(\partial/\partial x)^\alpha.$$

Ces opérateurs agissent sur l'ensemble précédent si l'on pose $\partial/\partial x_i \mathfrak{f}^{\lambda-k} = (\lambda - k)\,\partial\mathfrak{f}/\partial x_i \mathfrak{f}^{\lambda-k-1}$.

Théorème 11. *Il existe un polynôme* $B(\lambda)$ *et un opérateur différentiel* $P(x, \lambda, \partial/\partial x)$ *tels que*

$$P(x,\ \lambda,\ \partial/\partial x)\,\mathfrak{f}^\lambda = B(\lambda)\,\mathfrak{f}^{\lambda-1}.$$

I. Bernstein a démontré ce théorème [43] pour le cas où $\mathfrak{f}$ est un polynôme ; J. E. Björk l'a étendu au cas général [49].

On voit sans peine que l'ensemble des $B(\lambda)$ vérifiant (7) forme un idéal dans $\mathbf{C}[\lambda]$. Le générateur unitaire b de cet idéal est appelé *polynôme de Bernstein* du germe $\mathfrak{f}$. Il est évident que $b(0) = 0$ (il suffit de poser $\lambda = 0$ dans (7)). Mettons $b(\lambda) = \lambda\tilde{b}(\lambda)$. Le polynôme $\tilde{b}(\lambda)$ est appelé *polynôme de Bernstein réduit*.

La démonstration du théorème 11 s'appuie en particulier sur le cas d'application suivant.

Supposons que le germe $\mathfrak{f}$ ne prenne sur le sous-espace réel $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$ que des valeurs positives. Fixons un représentant f de $\mathfrak{f}$ et dé-

finissons sur le voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$ deux fonctions $f_\pm$:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } f(x) \geqslant 0, \\ 0 & \text{pour } f(x) < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) & \text{pour } f(x) < 0. \end{cases}$$

Soit φ : $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable à support contenu dans un voisinage suffisamment restreint de l'origine. Posons

$$I_\pm(\lambda, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} (f_\pm(x))^\lambda \varphi(x)\, dx,$$

où $\lambda \in \mathbf{C}$ est un paramètre complexe, $\operatorname{Re} \lambda > 0$. On peut considérer les intégrales $I_\pm$ comme des distributions du paramètre λ sur l'espace des fonctions $\{\varphi\}$. Les intégrales $I_\pm$ sont bien définies pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$ et dépendent de façon holomorphe de λ.

Théorème 12. *Les intégrales $I_\pm$ admettent des prolongements analytiques sur* C *en tant que fonctions méromorphes du paramètre λ ayant leurs pôles sur des progressions arithmétiques*

$$\lambda_l, \lambda_l - 1, \lambda_l - 2, \ldots,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont des racines du polynôme de Bernstein du germe $\mathfrak{f}$.

Démonstration. On a

$$b(\lambda) \int_{\mathbf{R}^n} f_\pm^{\lambda-1} \varphi\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} [P f_\pm^\lambda] \cdot \varphi\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} f_\pm^\lambda [P^* \varphi]\, x;$$

ici b est le polynôme de Bernstein, P un opérateur différentiel qui, joint à b, vérifie (7), $P^* = \sum (-1)^{|\alpha|} \lambda^k (\partial/\partial x)\, b_{k,\alpha}(x)$ l'adjoint de P. Ces égalités permettent de prolonger analytiquement les intégrales $I_\pm$ du demi-plan $\operatorname{Re} \lambda > 0$ au demi-plan $\operatorname{Re} \lambda > -1$, etc.

B. Malgrange [227, 228] a établi un rapport entre les racines du polynôme de Bernstein et les valeurs propres de l'opérateur de monodromie en cohomologie évanescente au point critique du germe $\mathfrak{f}$.

Supposons que le germe $\mathfrak{f}$: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ ait un point critique de multiplicité finie μ. A chaque valeur propre λ de l'opérateur de monodromie associons la progression arithmétique $L(\lambda)$ de tous les α tels que $\exp(2\pi i \alpha) = \lambda$.

Théorème 13 (voir [228]). *Les racines du polynôme de Bernstein du germe $\mathfrak{f}$ appartiennent à la réunion de toutes les progressions arithmétiques construites. Chaque racine est plus petite que* 1.

Corollaire. *Les racines sont des nombres rationnels.*

M. Kashiwara a prouvé dans [174] la rationalité des racines du polynôme de Bernstein d'un germe dont le point critique n'est pas obligatoirement de multiplicité finie.

Dans [360] on définit une filtration dans les fibres de la fibration de cohomologie de Milnor d'un point critique de multiplicité finie et on exprime les racines du polynôme de Bernstein en termes d'action de l'opérateur de monodromie sur les espaces de cette filtration. Des relations évidentes entre cette filtration et celle de Hodge conduisent à de nouvelles inégalités entre racines du polynôme de Bernstein.

Définissons cette nouvelle filtration que nous appellerons *troisième* (après la filtration par le poids et celle de Hodge). La troisième filtration en cohomologie $H^{n-1}(X(t))$ de la fibre de la fibration de Milnor sera notée $\{G_t^k\}$.

Prenons une n-forme différentielle holomorphe quelconque ω sur X et développons sa section géométrique en série suivant les sections covariantement constantes:

$$s[\omega] = \sum_{p,\alpha} t^\alpha (\ln t)^p A^\omega_{p,\alpha}/p!;$$

voir n° 13.1. Mettons le sous-espace G_t^k égal à l'enveloppe linéaire de toutes les valeurs en t des sections $A^\omega_{p,\alpha}$, $\alpha \leqslant n-1-k$, $p = 0, 1, \ldots, n-1$, de toutes les formes ω.

De la définition il découle facilement que la troisième filtration est décroissante:

$$\ldots \subset G_t^{k+1} \subset G_t^k \subset \ldots$$

Ses termes sont invariants par l'opérateur de monodromie. Pour k quelconque le sous-espace G_t^k contient le sous-espace F_t^k de la filtration de Hodge.

Théorème 14 (voir [360]). *Soit, pour k quelconque, Q_k le plus petit polynôme de l'action de l'opérateur de monodromie sur G_t^k/G_t^{k+1}. A chaque racine λ du polynôme Q_k associons une quantité $l_k(\lambda) + 1 - n$, où $l_k(\lambda)$ est tel que* $\exp(2\pi i l_k(\lambda)) = \lambda$, $k \leqslant l_k(\lambda) < k+1$. *Considérons la réunion de toutes les quantités de ce type (elles sont notées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$) pour tous k. Alors $[(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\ldots] \in \mathbf{C}[s]$ est le polynôme de Bernstein réduit.*

Corollaire. *Si f est un germe de polynôme quasi homogène, les racines du polynôme de Bernstein réduit de f s'obtiennent en multipliant le spectre du point critique de f par -1.* (Démonstration: la troisième filtration coïncide en l'occurrence avec la filtration de Hodge).

Puisque tout terme de la filtration de Hodge est inclus dans un terme de la troisième filtration, on a le

Théorème 15 (voir [351, 354]). 1. *Toute racine k-uple du polynôme de Bernstein réduit est plus grande que $k - n$.*

2. *Si* $\alpha \in [p, p+1)$ (*p entier*) *est une racine k-uple du polynôme de Bernstein réduit, la progression arithmétique* L $(\exp(-2\pi i\alpha))$ *possède sur l'intervalle* $(-n+k-p, 1)$ *au moins k racines (comptées avec leurs multiplicités) du polynôme de Bernstein réduit.*

3. *Le polynôme de Bernstein réduit* $\tilde{b}(s)$ *est divisible par* $(s-\alpha)^n$ *si et seulement si* $\alpha > 0$ *et la forme jordanienne de l'opérateur de monodromie a un bloc de taille n de valeur propre* $\exp(2\pi i\alpha)$. *Pour* α *entier* $\tilde{b}(s)$ *est divisible par* $(s-\alpha)^{n-1}$ *si et seulement si* $\alpha = 0$ *et la forme jordanienne de l'opérateur de monodromie a un bloc de taille* $n-1$ *de valeur propre* 1.

Le théorème dit que la plupart des racines du polynôme de Bernstein réduit se situent à droite du point $s = 1 - n/2$ (voir les symétries du spectre au nº 13.3).

Les racines du polynôme de Bernstein peuvent varier quand on déforme le point critique du germe dans la strate $\mu = \text{Cte}$.

Exemple (voir [306]). Soit $f(x, y) = ax^5 + y^6 + x^4y$, où a est un paramètre, $a \in \mathbf{C}$. Pour $a = 0$ le polynôme de Bernstein réduit a comme racines $\{l/24\}$, où $l = -15, -11, -10, -7, -6, -5, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15$. Pour $a \neq 0$ les racines sont $\{l/24\}$, où $l = -7, -6, -5, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15$.

Dans cet exemple les racines font un « saut » vers le bas quand $a \to 0$. Selon un théorème prouvé dans [360] ce phénomène est typique; plus, dans ce théorème est expliqué, en termes de la troisième filtration, le caractère de variation des racines du polynôme de Bernstein lors des déformations du point critique le long de la strate $\mu = \text{Cte}$.

Citons quelques articles traitant du polynôme de Bernstein: [275, 276, 397 à 399, 42, 352 à 357, 383 à 385].

E. Structure de Hodge mixte et algèbre locale du point critique. Soient $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe en son point critique de multiplicité μ, et $f: X \to S$ une spécialisation de $\mathfrak{f}$. Nous considérons ici des n-formes différentielles holomorphes sur X aux formes divisibles par df près, i.e. les classes d'équivalence $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$, où $\Omega^p(X)$ est un espace de p-formes différentielles holomorphes sur X. A chaque classe d'équivalence on associe une section d'une fibration particulière construite à partir de la filtration par le poids et de la filtration de Hodge de la fibration de cohomologie de Milnor du point critique du germe. Cette section est appelée *coefficient original de la classe d'équivalence*. La correspondance associant le coefficient original à la classe d'équivalence établit une relation entre l'espace $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ et la cohomologie évanescente au point critique du germe. Nous citerons un exemple où cette relation est mise à profit.

Remarque. Les formes de $\Omega^n(X)$ s'écrivent $h\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, et les formes de $df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ s'écrivent

$$\sum (-1)^k h_k \partial f/\partial x_k \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

Si donc X est assez petit (ce qui est toujours supposé), alors $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ est un espace vectoriel de dimension μ sur $\mathbf{C}$ (tout comme l'algèbre locale $\mathbf{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$).

Décrivons la construction du coefficient original. Fixons une classe d'équivalence et considérons la borne supérieure des ordres des formes appartenant à cette classe. La borne supérieure est appelée *nombre de Hodge* de la classe d'équivalence.

Théorème 16 (voir [354], § 9). *Le nombre de Hodge d'une classe est égal à* $+\infty$ *si et seulement si la classe est celle de la forme nulle (i.e. si elle se confond avec* $df \wedge \Omega^{n-1}(X)$).

Supposons que la classe considérée ne contienne pas la forme nulle. De toutes les formes d'ordre maximal de la classe, retenons celles dont la partie principale est une section de la sous-fibration de la filtration par le poids ayant le plus petit indice. Cet indice minimal sera appelé *nombre de poids* de la classe.

Soient α, l le nombre de Hodge et le nombre de poids de la classe respectivement. La partie principale de toute forme différentielle de la classe vérifiant les deux conditions indiquées plus haut se projette en une section de la fibration $\mathrm{gr}^k F\, \mathrm{gr}_l W\,(f^*)$, où $k = n - 1 + [-\alpha]$ (voir la définition de $\mathrm{gr}^k F \mathrm{gr}_l\, W\,(f^*)$ à la page 330).

Théorème 17 (voir [354], § 9). *Cette section ne dépend pas de la forme de la classe vérifiant les deux conditions formulées plus haut, et est une section non nulle.*

Cette section de la fibration $\mathrm{gr}^k F\, \mathrm{gr}_l W\,(f^*)$ est appelée *coefficient original* de la classe d'équivalence. Une forme dont l'ordre est égal au nombre de Hodge de la classe et dont la partie principale est une section de la sous-fibration de la filtration par le poids d'indice égal au nombre de poids de la classe, est appelée *forme originale* (cf. [353, 354]).

Soit $\omega \in \Omega^n(X)$ une forme d'ordre α. Supposons que la partie principale de ω soit section de la sous-fibration d'indice l et ne soit pas section de la sous-fibration d'indice $l - 1$ de la filtration par le poids. Alors la partie principale de ω se projette en section de $\mathrm{gr}^k F\, \mathrm{gr}_l W\,(f^*)$, où $k = n - 1 + [-\alpha]$.

Théorème 18 (voir [354], § 9). *Si la section de* $\mathrm{gr}^k F\, \mathrm{gr}_l W\,(f^*)$ *induite par la partie principale de* ω *est non nulle, alors* ω *est une forme originale dans sa classe d'équivalence.*

Les nombres de Hodge et les nombres de poids des classes d'équivalence induisent des structures auxiliaires sur $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$.

Définition. On appelle *vecteur spectral* de la classe $[\omega] \in \Omega^n/df \wedge \wedge \Omega^{n-1}(X)$ le couple ordonné $V[\omega] = (\alpha[\omega], l[\omega])$, où $\alpha[\omega]$ est le nombre de Hodge et $l[\omega]$ le nombre de poids de la classe $[\omega]$. Si $[\omega]$ est la classe de la forme nulle, on pose $V[\omega] = (+\infty, -\infty)$.

Arrangeons les vecteurs dans l'ordre lexicographique: posons $V > V'$ si $\alpha > \alpha'$ ou si $\alpha = \alpha'$ et $l < l'$. Par exemple, $(1/3, 0) < < (1/2, 1) < (1/2, 0)$.

Il est évident que le vecteur spectral reste inchangé quand on multiplie la classe d'équivalence par un nombre non nul; le vecteur spectral d'une somme de classes est non inférieur au minimum des vecteurs spectraux des termes.

Pour tout vecteur $V \in \mathbf{R}^2$, désignons par FW_V (resp. $FW_{>V}$) l'ensemble de toutes les classes dans $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ ayant le vecteur spectral non inférieur à V (resp. supérieur à V). Il est évident que $FW_V \supset FW_{>V}$ et que chacun de ces sous-ensembles est un espace vectoriel complexe.

La filtration $\{FW_V\}_{V \in \mathbf{R}^2}$ sera appelée *filtration de Hodge-poids* de l'espace $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$. Posons

$$\mathrm{gr}_V FW = FW_V/FW_{>V}.$$

On appelle *espace gradué* de la filtration de Hodge-poids un espace complexe de dimension μ

$$\mathrm{gr}\, FW = \bigoplus_{V \in \mathbf{R}^2} \mathrm{gr}_V\, FW.$$

Les théorèmes 16 à 18 établissent un isomorphisme entre l'espace $\mathrm{gr}\, FW$ et l'espace choisi des sections de dimension μ (espace des coefficients originaux) de la fibration de dimension μ:

$$\mathrm{gr}\, F\, \mathrm{gr}\, W(f^*) = \bigoplus_{k, l} \mathrm{gr}^k F\, \mathrm{gr}_l\, W(f^*).$$

Cet isomorphisme associe à tout élément de $\mathrm{gr}_V FW$ son coefficient original.

Voici un bilan informel des constructions précédentes: après passage au quotient par les filtrations de Hodge et par le poids, les espaces de cohomologie évanescente au point critique du germe $\mathfrak{f}$ et $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ sont canoniquement isomorphes. L'isomorphisme est établi en passant de la classe d'équivalence des formes au coefficient original de la classe.

Remarques. 1. A l'aide de cet isomorphisme, on peut définir les couples spectraux de la structure de Hodge mixte en cohomologie évanescente en termes de filtration de Hodge-poids sur $\Omega^n(X)/df \wedge \wedge \Omega^{n-1}(X)$. En effet, prenons le couple $(\alpha, l) \in \mathbf{R}^2$ exactement autant de fois qu'il y a d'unités dans la dimension de $\mathrm{gr}_{(\alpha, l)} FW$ si $\alpha \notin \mathbf{Z}$ et dans celle de $\mathrm{gr}_{(\alpha, l+1)} FW$ si $\alpha \in \mathbf{Z}$. La réunion des couples de ce type se confond avec l'ensemble de tous les couples spectraux.

2. Chaque fibrat iongr$^h F$ gr$_l W(f^*)$ est munie de la connexion de Gauss-Manin. L'opérateur de monodromie de la connexion n'a pas de blocs jordaniens. D'une façon générale, un coefficient original arbitraire n'est pas une section covariantement constante de la connexion, mais les directions définies par les valeurs du coefficient sont invariantes par la connexion.

3. Les coefficients originaux permettent de munir gr FW d'une structure de Hodge mixte.

Citons à présent un exemple de proposition dont la démonstration utilise l'isomorphisme indiqué plus haut:

Théorème 19 (voir [353]). *Soit* N: $H^{n-1}(X, \mathbf{C}) \to H^{n-1}(X, \mathbf{C})$ *le logarithme de la partie unipotente de l'opérateur de monodromie. Soit* $\{\mathfrak{f}\}$: $\mathbf{C}\{x\}/(\partial f/\partial x) \to \mathbf{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$ *l'opérateur de multiplication par* $\mathfrak{f}$. *On a alors pour tout* $j \geqslant 0$

$$\dim (\ker(\{\mathfrak{f}\}^j)) \leqslant \dim (\ker(N^j)),$$

où dim (ker ( )) *est la dimension du noyau de l'opérateur.*

Corollaire [307]. *Si l'opérateur* $\{\mathfrak{f}\}$ *n'a pas de blocs jordaniens de taille* j *ou plus, l'opérateur de monodromie n'en a pas, lui, non plus.*

Par exemple, dans le cas quasi homogène, $\{\mathfrak{f}\}$ est l'opérateur nul, aussi l'opérateur de monodromie est-il diagonalisable.

Esquisse de démonstration. La structure jordanienne de l'opérateur $\{\mathfrak{f}\}$ se confond avec celle de l'opérateur de multiplication par $\mathfrak{f}$ dans $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$. On montre que l'opérateur de multiplication par $\mathfrak{f}$ fait passer $FW_{(\alpha, l)}$ en $FW_{(\alpha+1, l-2)}$ pour tous (α, l) (voir la démonstration du lemme 12 du § 13). Aussi $\{\mathfrak{f}\}$ induit-il un opérateur gr $\{\mathfrak{f}\}$: gr $FW \to$ gr FW qui fait passer gr$_{(\alpha, l)}FW$ en gr$_{(\alpha+1, l-2)}FW$ pour tous (α, l). Il est évident que la structure jordanienne de l'opérateur $\{\mathfrak{f}\}$ et celle de l'opérateur gr$\{\mathfrak{f}\}$ vérifient l'inégalité

$$\dim (\ker(\{\mathfrak{f}\}^j)) \leqslant \dim (\ker((\mathrm{gr}\{\mathfrak{f}\})^j))$$

pour tout $j \geqslant 0$.

Ensuite on utilise le théorème 3 du § 13 de la structure de Hodge mixte pour montrer que l'isomorphisme de l'espace gr FW à l'espace des coefficients originaux fait passer l'opérateur gr$\{\mathfrak{f}\}$ à l'opérateur N multiplié par un certain nombre non nul sur chaque terme de l'espace gr FW. Le théorème est démontré.

Remarque. On démontre dans [354] la proposition suivante. Convenons d'appeler *longueur du spectre* du point critique d'un germe $\mathfrak{f}$ la différence entre la plus petite et la plus grande valeurs spectrales. Si j est plus grand que la longueur du spectre, on a $\{\mathfrak{f}\}^j = 0$, i.e. $\mathfrak{f}^j \in \mathbf{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Puisque le spectre est situé dans l'intervalle $(-1, n-1)$, on a toujours $\mathfrak{f}^n \in (\partial f/\partial x)$ (voir [51, 215]).

§ 15. Application de périodes et forme d'intersection

Soient une fibration différentiable et une forme différentielle sur son espace total, fermée sur les fibres. On a alors l'application des périodes de la forme: une application multiforme de la base de la fibration dans les classes d'homologie de la fibre. A tout point de la base est associée la classe d'homologie de la forme dans la fibre située au-dessus du point, classe transportée dans la cohomologie de la fibre donnée. Le chemin de transport n'est pas unique, d'où non-univocité de l'application.

Soit ω la forme. Choisissons une base $\delta_1^0, \ldots, \delta_\mu^0$ d'homologie dans la fibre donnée, en dimension égale à celle de ω. Etendons par continuité la base aux fibres voisines et construisons une famille multiforme $\delta_1, \ldots, \delta_\mu$ de bases d'homologie des fibres de la fibration, famille qui dépend continûment du point de la base de la fibration. La base d'homologie $\delta_1^0, \ldots, \delta_\mu^0$ définit des coordonnées dans la cohomologie de la fibre choisie. L'application de périodes s'écrit dans ces coordonnées

$$\lambda \mapsto \left(\int_{\delta_1(\lambda)} \omega, \ldots, \int_{\delta_\mu(\lambda)} \omega \right),$$

où λ est le point de la base de la fibration.

L'application de périodes permet de transporter sur la base de la fibration les structures présentes dans l'espace de cohomologie. Par exemple, l'indice d'intersection des classes de cohomologie de dimension moyenne devient en cohomologie de la fibre une forme bilinéaire sur le fibré tangent de la base (si la forme différentielle a une dimension moyenne elle-même).

Dans ce paragraphe nous considérons les applications de périodes dans la fibration de Milnor associée à un déploiement versel du point critique d'une fonction. Dans ce cas la dimension de la base est égale à celle de la cohomologie moyenne de la fibre. Il se trouve que l'application de périodes est non dégénérée pour presque toute forme différentielle et est indépendante au sens naturel de la forme différentielle qui l'engendre. Cela signifie que les constructions liées à l'application de périodes sont définies par la fibration et, en fin de compte, par le point critique.

Nous étudions, dans ce paragraphe, la forme bilinéaire qui est induite sur la base de la fibration (i.e. sur le complémentaire du discriminant) par l'indice d'intersection. On montre que, sous certaines conditions, la forme bilinéaire admet un prolongement analytique sur la base tout entière du déploiement versel.

En certains cas cette forme bilinéaire est une structure symplectique. Il se trouve que les strates de la base du déploiement versel possèdent dans cette structure symplectique des propriétés lagran-

giennes spéciales qui traduisent le type de la décomposition du point critique en points plus simples. Certaines strates donnent des exemples importants de variétés lagrangiennes avec singularités.

§ 15.1. Constructions.

A. Définitions. Soit $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe en son point critique de multiplicité μ. Définissons la fibration dans laquelle nous étudierons les applications de périodes. Cette fibration est celle des hypersurfaces de niveau nul des fonctions qui forment le déploiement versel minimal du germe.

A cette effet, fixons un représentant du déploiement versel du germe f. Ce représentant s'écrit

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 + \lambda_2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda_\mu\varphi_\mu(x),$$

où les fonctions $\varphi_1 \equiv 1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$ engendrent une base sur $\mathbf{C}$ de l'algèbre locale $\mathbf{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Choisissons une boule suffisamment petite $B = \{x \in \mathbf{C}^n \mid |x| < \rho\}$. En fonction de ρ, choisissons une boule suffisamment petite $\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{C}^\mu \mid |\lambda| < \delta\}$. Soit Σ l'hypersurface de tous les $\lambda \in \Lambda$ pour lesquels l'ensemble local de niveau nul $X_\lambda = \{x \in B \mid F(x, \lambda) = 0\}$ est singulier. L'hypersurface Σ est appelée *discriminant*.

Les variétés $\{X_\lambda\}$ forment une fibration localement triviale sur le complémentaire $\Lambda \setminus \Sigma$ du discriminant.

Remarque. Cette fibration se distingue de la fibration de Milnor du déploiement F (voir n° 10.3). On obtient cette fibration à partir de la fibration de Milnor de F en faisant la restriction de cette dernière à l'ensemble des valeurs nulles de F.

La fibration sur $\Lambda \setminus \Sigma$ sera appelée *fibration de Milnor centrale.*

Soit Ω^p l'espace des p-formes holomorphes sur $B \times \Lambda$. Soit une $(n-1)$-forme arbitraire $\omega \in \Omega^{n-1}$. La restriction de ω à une fibre quelconque de la fibration de Milnor centrale est une forme fermée. On appelle *application des périodes* de ω la section

$$P_\omega: \lambda \mapsto [\omega|_{X_\lambda}] \in H^{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$$

de la fibration de cohomologie de dimension $(n-1)$ associée à la fibration de Milnor centrale. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on appelle *k-ième application des périodes associée* de la forme ω la section

$$P_\omega^k = (\nabla_{\partial/\partial\lambda_1})^k P_\omega$$

de la même fibration (ici $\nabla_{\partial/\partial\lambda_1}$ est la dérivation en connexion de Gauss-Manin suivant le champ de vecteurs $\partial/\partial\lambda_1$; rappelons que λ_1 est le terme constant du déploiement versel).

Remarques. 1. Soit $\delta_1(\lambda), \ldots, \delta_\mu(\lambda)$ une base dans $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{Z})$ dépendant continûment de λ. On a par rapport à cette base

$$P^k_\omega(\lambda) = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\right)^k \left(\int_{\delta_1(\lambda)} \omega, \ldots, \int_{\delta_\mu(\lambda)} \omega\right).$$

On dit que l'application P^k_ω est:

non dégénérée si les vecteurs $v_i(\lambda) = (\nabla_{\partial/\partial\lambda_i} P^k_\omega)|_\lambda$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, \mu$, forment une famille libre pour tous $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$ suffisamment proches de l'origine de Λ (i.e. si l'application P^k_ω écrite en coordonnées dans la base covariantement constante définit une application multiforme dans $\mathbf{C}^\mu$ de jacobien non nul pour tous $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$ suffisamment proches de l'origine);

infinitésimalement non dégénérée (inf. non dégénérée) si le déterminant de la matrice formée des coordonnées des vecteurs $\{v_i\}$ dans la base covariantement constante s'annule sur l'axe des λ_1 passant par l'origine de Λ à l'ordre $\mu(n - 2k - 2)/2$ quand $\lambda_1 \to 0$.

2. Les coordonnées des vecteurs $\{v_i\}$ dans la base covariantement constante sont multiformes, mais le carré du déterminant de la matrice formée des coordonnées est une fonction holomorphe uniforme dans $\Lambda \setminus \Sigma$ qui est méromorphe dans Λ (voir théorème 2 du § 12).

On montre que la propriété de P^k_ω d'être inf. non dégénérée est définie par le jet fini de la forme ω au point $0 \times 0 \in B \times \Lambda$ (voir formules (3) et (4) de la page 231, ainsi que le lemme 3 du § 12).

On dit que la propriété d'être inf. non dégénérées des k-ièmes applications de périodes associées est *générique* pour k donné si les jets définissant les applications inf. non dégénérées forment dans l'espace des jets d'un ordre suffisamment élevé le complémentaire du sous-ensemble analytique propre.

B. Non-dégénérescence et stabilité.

Théorème 1 (voir [373], [354, § 10]). *Si, pour toute forme $\omega \in \Omega^{n-1}$ et pour tout $k \geqslant 0$, la k-ième application des périodes de ω associée est inf. non dégénérée, elle est non dégénérée.*

D é m o n s t r a t i o n. Comme dans le théorème 2 du § 12, montrons que le carré du déterminant de la matrice formée des coordonnées des vecteurs $\{v_i\}$ dans la base covariantement constante s'annule à un ordre non inférieur à $(n - 2k - 2)$ en tout point non singulier du discriminant. Comme dans le corollaire 1 du théorème 2 du § 12, faisons la conclusion que le carré du déterminant ne s'annule pas sur $\Lambda \setminus \Sigma$ dans un voisinage assez petit de l'origine de Λ. Cela signifie que la matrice jacobienne de P^k_ω au voisinage de l'origine de Λ est non dégénérée.

Théorème 2 (voir [373], [354, § 10]). *Pour $k = 0$ la propriété de inf. non-dégénérescence est générique. Si la forme d'intersection dans*

$H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$, $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$, *est non dégénérée, la propriété indiquée est générique pour tout* $k \geqslant 0$.

Remarques. 1. On démontre dans [373] la proposition générale suivante : si, parmi les valeurs spectrales du point critique du germe $\mathfrak{f}$, il n'y a pas d'entiers plus petits que k, la propriété de inf. non-dégénérescence est générique pour ce k. Le théorème 2 découle de cette proposition et du théorème 3 du § 14.

2. Notons une conséquence du lemme 3 du § 12 : si, pour k donné, $k \geqslant 0$, il existe une application de périodes inf. non dégénérée P^k_ω, la propriété de inf. non-dégénérescence est générique pour ce k.

Introduisons la notion d'applications de périodes équivalentes. Voici une définition informelle : on dit que deux applications de périodes sont équivalentes s'il existe un difféomorphisme du couple Λ, Σ tel que la première application soit la composée du difféomorphisme et de la seconde application. L'application de périodes n'étant pas univoque, la définition citée demande à être précisée. Ajoutons que nous ne considérons pas les difféomorphismes de Λ tout entier mais seulement ceux d'un voisinage de l'origine de Λ.

Définition. On dit que deux applications P^k_ω, P^k_η sont *équivalentes* s'il existe un voisinage U de l'origine de Λ et une application continue $H: U \times [0, 1]$ tels que :

a) $H(\cdot, 0)$ est une application identique ;

b) $H(\cdot, s)$ est pour tout $s \in [0, 1]$ une application holomorphe de jacobien non nul ;

c) pour tout $s \in [0, 1]$ le point $H(\lambda, s)$ appartient à Σ si et seulement si $\lambda \in \Sigma$;

d) $U \cap H(U, 1)$ contient l'origine ;

e) pour tout $\lambda \in U \setminus (U \cap \Sigma)$ le vecteur $P^k_\omega(\lambda)$ transporté par parallélisme en connexion de Gauss-Manin le long d'une courbe $H(\lambda, \cdot)$ dans le point $H(\lambda, 1)$ est égal à la valeur de la section P^k_η dans ce point.

Théorème 3 (voir [373]). 1. *Toute k-ième application de périodes associée inf. non dégénérée* P^k_ω *est stable, i.e. toute k-ième application de périodes associée* P^k_η *est équivalente à* P^k_ω *pour tout* η *proche de* ω.

2. *Si* $\mathfrak{f}$ *est un germe quasi homogène, toutes les k-ièmes applications de périodes associées inf. non dégénérées sont équivalentes.*

Démonstration. Supposons que la forme ω dépende d'un paramètre et que, ce paramètre étant nul, la k-ième application de périodes associée correspondante soit inf. non dégénérée. Montrons que toutes les k-ièmes applications de périodes associées correspondantes sont équivalentes pour n'importe quelles petites valeurs du paramètre. A cet effet, construisons au voisinage de l'origine de Λ un champ de vecteurs holomorphe de telle façon que, pour toute

valeur du paramètre, il soit tangent à Σ et que son flux induise en même temps l'équivalence exigée de toutes les applications pour des petites valeurs du paramètre. On construit d'abord le champ sur $\Lambda \setminus \Sigma$, puis on s'assure qu'il admet un prolongement holomorphe sur Σ et enfin que ce prolongement holomorphe est tangent à Σ.

On voit sans peine que le champ en question existe sur $\Lambda \setminus \Sigma$ et qu'il est unique. En effet, considérons les k-ièmes applications associées comme des applications multiformes en cohomologie d'une fibre donnée. Chaque courbe de flux du champ à construire doit relier les points qui ont les mêmes images par les k-ièmes applications de périodes associées de la famille à un paramètre considérée. Puisque, pour des petites valeurs du paramètre, ces applications au voisinage de chaque point sont des difféomorphismes en cohomologie de la fibre donnée, on peut mener par tout point de $\Lambda \setminus \Sigma$ — et ce d'une façon unique — une courbe paramétrée de points qui ont même image.

Revenons à l'assertion que le champ construit admet un prolongement holomorphe sur Σ et que ce prolongement est tangent à Σ. Il suffit de vérifier cette assertion au voisinage des points non singuliers du discriminant, car, si tel est le cas, l'assertion est vraie aussi en tout point du discriminant d'après le théorème canonique de désingularisation en codimension 2. La vérification se fait à l'aide de formules explicites analogues à celles du lemme 2 du § 12 (et à l'aide des formules du lemme si $k = 0$), voir [373].

La seconde partie du théorème résulte de la première et d'un théorème de V. Zakalyukin [403] d'après lequel, pour un germe $\mathfrak{f}$ quasi homogène, tout champ de vecteurs sur Λ tangent au discriminant s'annule à l'origine.

C. Forme d'intersection dans la fibration cotangente. A toute application de périodes non dégénérée P_ω^k répond un isomorphisme naturel de fibrations

$$T_*(\Lambda \setminus \Sigma) \to H^{n-1}$$

et l'isomorphisme adjoint

$$H_{n-1} \to T^*(\Lambda \setminus \Sigma).$$

Ici T_* et T^* sont les fibrations tangente et cotangente respectivement, et H_{n-1}, H^{n-1} les fibrations centrales de Milnor d'homologie et de cohomologie respectivement.

Remarque. Ici et dans le texte qui suit, on suppose que les isomorphismes sont définis seulement au voisinage de l'origine de coordonnées de Λ (voir la définition de la non-dégénérescence).

On a dans les fibres de la fibration d'homologie un couplage bilinéaire : l'indice d'intersection des cycles de dimension moyenne dans

X_λ. Ainsi donc, l'application de périodes non dégénérée P^k_ω définit une *forme d'intersection* Φ^k_ω sur la fibration cotangente $T^*(\Lambda \setminus \Sigma)$.

Théorème 4 (voir [373]). *La forme Φ^k_ω est holomorphe dans $\Lambda \setminus \Sigma$. Si P^k_ω est inf. non dégénérée et $k \geqslant [(n-1)/2]$, la forme Φ^k_ω admet un prolongement holomorphe sur $T^*\Lambda$.*

Démonstration. La première assertion du théorème est évidente, car Φ^k_ω est induite d'une forme constante par une application holomorphe. Quant à la seconde assertion, il suffit de la vérifier au voisinage des points non singuliers du discriminant. Au voisinage de tels points la matrice jacobienne de la k-ième application de périodes associée s'écrit explicitement au moyen des formules du lemme 2 du § 12. La forme Φ^k_ω est induite d'une forme constante par la matrice inverse de l'adjointe de la matrice jacobienne. Le théorème est donc vérifié si les développements en série (analogues à ceux du lemme 2 du § 12) des coordonnées de la matrice inverse ne contiennent que des puissances non négatives des paramètres. On vérifie immédiatement qu'il en est ainsi pour les k indiqués, voir [373].

Théorème 5 (voir [373]). *La forme d'intersection Φ^k_ω pour P^k_ω inf. non dégénérée est stable, i.e. les formes Φ^k_η pour tous η proches de ω passent en Φ^k_ω par un difféomorphisme holomorphe convenable du couple Λ, Σ dans lui-même. Si f est un germe quasi homogène, alors la forme Φ^k_ω pour P^k_ω inf. non dégénérée est définie sans ambiguïté au difféomorphisme près du couple Λ, Σ dans lui-même.*

Le théorème 5 est une conséquence directe du théorème 3.

D. Application nucléaire. Décrivons l'objet induit de la forme d'intersection en homologie évanescente dans la fibration tangente $T_*(\Lambda \setminus \Sigma)$ par l'application de périodes associée non dégénérée.

Soit $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$. La forme d'intersection S dans $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$ définit l'application linéaire

$$\pi: H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C}) \to H^{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C}).$$

Le noyau de π se confond avec celui de S. Sur l'image Im de π est bien définie une forme bilinéaire non dégénérée S^* :

$$S^*(\alpha, \beta) = S(\pi^{-1}(\alpha), \pi^{-1}(\beta)).$$

Soit P^k_ω une application de périodes associée non dégénérée. L'isomorphisme $dP^k_\omega: T_*(\Lambda \setminus \Sigma) \to H^{n-1}$ induit dans la fibration tangente à $\Lambda \setminus \Sigma$ une distribution Im^k_ω: $\lambda \mapsto \mathrm{Im}^k_\omega(\lambda)$, où le sous-espace $\mathrm{Im}^k_\omega(\lambda) \subset T_{*,\lambda}(\lambda \setminus \Sigma)$ est isomorphe au sous-espace $\mathrm{Im}(\lambda) \subset$

$\subset H^{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$. La codimension de cette distribution est égale à la dimension du noyau de la forme d'intersection dans $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$.

Sur les plans de la distribution Im_ω^k est bien définie une *forme d'intersection bilinéaire* non dégénérée Ψ_ω^k induite de S^*.

Il se trouve que Im_ω^k est intégrable; mieux, ses variétés intégrales sont les fibres d'une application holomorphe de $\Lambda \setminus \Sigma$ dans un espace vectoriel complexe. Cette application est définie par la construction géométrique suivante.

Considérons l'espace vectoriel complexe de dimension finie Ker de toutes les sections covariantement constantes uniformes d'une fibration d'homologie de Milnor centrale. On voit sans peine que, pour obtenir n'importe quelle section de Ker, on peut procéder comme suit. On choisit dans la fibre de la fibration d'homologie de Milnor centrale une classe d'homologie convenable appartenant au noyau de la forme d'intersection et on étend cette classe à une section covariantement constante. En particulier, la dimension de Ker est égale à la dimension du noyau de la forme d'intersection dans les fibres de la fibration d'homologie.

Associons à Ker un espace vectoriel complexe de fonctions $\{h_\gamma\}_{\gamma \in \mathrm{Ker}}$ sur $\Lambda \setminus \Sigma$, où la fonction h_γ est définie par

$$h_\gamma(\lambda) = \langle P_\omega^k(\lambda),\ \gamma(\lambda)\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\right)^k \int_{\gamma(\lambda)} \omega.$$

Définissons une application holomorphe

$$K_\omega^k : \Lambda \setminus \Sigma \to \mathrm{Ker}^*,$$

où Ker^* est le dual de Ker. Pour $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$, posons la valeur de $K_\omega^k(\lambda)$ égale à une fonction linéaire sur Ker qui est égale à $h_\gamma(\lambda)$ sur le vecteur $\gamma \in \mathrm{Ker}$. L'application K_ω^k est appelée *application nucléaire* associée à la forme ω.

Remarque. Proposons une construction équivalente de l'application nucléaire. On a dans la fibration de cohomologie centrale H^{n-1} une sous-fibration Im dont les fibres sont des sous-espaces $\{\mathrm{Im}(\lambda)\}$. Cette sous-fibration est invariante par la connexion de Gauss-Manin, si bien que cette dernière est définie sur la fibration quotient H^{n-1}/Im. On voit sans peine que la monodromie de la connexion sur la fibration quotient est triviale. L'application de périodes P_ω^k est une section de H^{n-1}. La section P_ω^k induit une section de la fibration quotient. Transportant les valeurs de la section de la fibration quotient sur la fibre choisie de la fibration quotient, on obtient une application de la base de $\Lambda \setminus \Sigma$ dans l'espace des sections covariantement constantes de H^{n-1}/Im. Cette application est précisément l'application nucléaire.

Théorème 6.1. *Pour tous $k \geqslant 0$, $\omega \in \Omega^{n-1}$, l'application nucléaire K^k_ω est holomorphe sur $\Lambda \setminus \Sigma$ et méromorphe sur Λ. Si $k = 0$, l'application nucléaire admet un prolongement holomorphe sur Λ.*

2\. *Si l'application de périodes P^k_ω est non dégénérée, l'application nucléaire est de rang maximal sur $\Lambda \setminus \Sigma$ au voisinage de l'origine. De plus, les plans tangents aux fibres de l'application nucléaire se confondent avec les plans de la distribution Im^k_λ.*

D é m o n s t r a t i o n. Le p. 1 du théorème est une conséquence directe des théorèmes 4 et 7 du § 10. La première assertion du p. 2 découle immédiatement du fait que l'application de périodes est non dégénérée. Pour démontrer la seconde assertion, il suffit de remarquer qu'un vecteur $\xi \in T_{*,\lambda}(\Lambda \setminus \Sigma)$ appartient à $\mathrm{Im}^k_\omega(\lambda)$ si et seulement si l'on a $\langle dP^k_\omega(\xi), \alpha\rangle = 0$ pour toute classe d'homologie $\alpha \in H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$ appartenant au noyau de la forme d'intersection, i.e. si et seulement si $\langle dh_\gamma, \xi\rangle = 0$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Ker}$. Le théorème est démontré.

Corollaire du théorème 3. *L'application nucléaire K^k_ω et la forme d'intersection Ψ^k_ω sur ses fibres correspondant à l'application P^k_ω inf. non dégénérée sont stables. Autrement dit, tout couple K^k_η, Ψ^k_η passe en K^k_ω, Ψ^k_ω pour tout η proche de ω par un difféomorphisme holomorphe convenable du couple Λ, Σ dans lui-même. Si $\mathfrak{f}$ est un germe quasi homogène, le couple K^k_ω, Ψ^k_ω pour P^k_ω inf. non dégénérée est défini de façon invariante, au difféomorphisme près du couple Λ, Σ dans lui-même.*

Si le nombre d'arguments n de $\mathfrak{f}$ est égal à 2, le théorème 3 du § 13 de la structure de Hodge mixte permet de prouver que l'application nucléaire $K^{k=0}_\omega$ admet un prolongement non dégénéré sur Λ.

Théorème 7. *Soient $n = 2$, $k = 0$. Supposons que l'application de périodes P_ω soit non dégénérée. Alors l'application nucléaire K^0_ω admet un prolongement holomorphe sur Σ en une application de rang maximal.*

D é m o n s t r a t i o n. On doit vérifier que les différentielles des fonctions $\{h_\gamma\}_{\gamma \in \mathrm{Ker}}$ à l'origine de Λ forment un espace de dimension égale à celle du noyau de la forme d'intersection en homologie. A cet effet, il suffit de vérifier la même chose sur l'axe des λ_1 passant par l'origine de Λ. Soit $\gamma \in \mathrm{Ker}$; il vient

$$dh_\gamma = \sum \langle \nabla_{\partial/\partial\lambda_j} P_\omega, \gamma\rangle \, d\lambda_j.$$

Au-dessus de l'axe des λ_1 la section $\nabla_{\partial/\partial\lambda_j} P_\omega$ est section géométrique d'une 2-forme convenable (voir formules (3), (4), p. 231). A présent le théorème résulte facilement de l'assertion c) du nº 14.2 A, ainsi que de la inf. non-dégénérescence de P_ω (voir aussi le lemme 2.4 dans [354]).

Considérons en dehors du discriminant une fibre quelconque de l'application nucléaire K_ω^k répondant à une application de périodes non dégénérée P_ω^k. On définit dans la fibration tangente à la fibre une forme d'intersection non dégénérée Ψ_ω^k. *Si le nombre d'arguments n de $\mathfrak{f}$ est pair, la forme d'intersection Ψ_ω^k est une structure holomorphe symplectique.* En effet, cette forme est non dégénérée, alternée et induite d'une forme constante par une application holomorphe; en particulier, c'est une forme fermée. *Pour n impair la forme d'intersection Ψ_ω^k est une métrique holomorphe (complexe) sur la fibre de courbure nulle* (dans une connexion qui laisse invariante la métrique et qui est induite de la connexion de Gauss-Manin).

E. Forme d'intersection non dégénérée. Considérons plus en détails le cas où la forme d'intersection dans $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$ est non dégénérée. Dans ce cas la forme d'intersection pour une application P_ω^k non dégénérée est définie sur la fibration tangente $T_*(\Lambda \setminus \Sigma)$ tout entière.

Théorème 8 (voir [373]). 1. *Pour n pair et $k = n/2 - 1$, la forme d'intersection Ψ_ω^k qui répond à une application de périodes P_ω^k inf. non dégénérée se prolonge en une structure symplectique sur Λ.*

2. *Si, pour n impair et $k = (n-1)/2$, la forme Ψ_ω^k répond à une application de périodes P_ω^k inf. non dégénérée, alors l'isomorphisme $T^*(\Lambda\setminus\Sigma) \to T_*(\Lambda\setminus\Sigma)$ défini par cette forme induit un isomorphisme des $\mathbf{C}\{\lambda\}$-modules de germes à l'origine de Λ des 1-formes différentielles et des champs de vecteurs tangents à Σ.*

Pour la démonstration du théorème, il suffit de vérifier ses assertions au voisinage des points non singuliers du discriminant, voir [373].

15.2. Exemples. A. Soient $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe quasi homogène, $\varphi_1 \equiv 1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$ une collection de monômes se projetant en une base sur $\mathbf{C}$ de l'algèbre locale $\mathbf{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$,

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 + \lambda_2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda_\mu\varphi_\mu(x),$$
$$\omega = x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_\mu.$$

Alors P_ω est une application de périodes inf. non dégénérée. En effet, d'après les formules (3), (4) de la page 231, les sections $\{\nabla_{\partial/\partial\lambda_j} P_\omega\}$, $j = 1, \ldots, \mu$, sont représentées au-dessus de l'axe des λ_1 passant par l'origine par les formes $\{-\varphi_j\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n/df\}$. L'assertion découle maintenant du théorème 6 du § 13.

B. (Voir [14, 373].) Soient $f = x^{\mu+1}$, $\mu \geqslant 1$, et $F(x, \lambda) = x^{\mu+1} + \lambda_2 x^{\mu-1} + \ldots + \lambda_{\mu+1}$. C'est à dessein que nous avons changé la numérotation des paramètres de déformation adoptée plus haut: dans notre exemple l'indice i du paramètre λ_i est proportionnel à son

degré quasi homogène. Prenons un $\omega = x$. Nous allons donner la formule des composantes $g_{k,l}$, k, $l = 2, \ldots, \mu + 1$, de la forme d'intersection Φ_ω^0 dans la fibration cotangente. Posons $\lambda_0 = 1$, $\lambda_i = 0$ pour $i = 1$, $i < 0$ ou $i > \mu + 1$. Alors

$$g_{k,l} = \sum_{\substack{i \geq \max(k,l) \\ i+j=k+l-2}} (i-j)\lambda_i\lambda_j + \left[1 - \min(k, l) + \frac{(k-1)(l-1)}{\mu+1}\right]\lambda_{k-1}\lambda_{l-1}.$$

C. Pour des germes simples de fonctions d'un nombre impair de variables appartenant aux classes D_μ et E_6, on trouve dans [122], p. 14, les formules de la métrique $\Phi_\omega^{(n-1)/2}$ sur la fibration cotangente répondant à une forme quasi homogène

$$\mathrm{Cte}\cdot x_1\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

D. Citons quelques exemples de structures symplectiques $\Psi_\omega^{n/2-1}$ sur les bases des déploiements versels. De tels exemples sont connus pour des germes de fonctions de deux variables à points critiques simples.

Parmi les points critiques simples de fonctions d'un nombre pair de variables, les points A_{2k}, $k \geqslant 1$, E_6 et E_8 ont les formes d'intersection non dégénérées en cohomologie évanescente; les formes d'intersection des points critiques D_{2k+1}, $k \geqslant 2$, et E_7 ont le noyau de dimension un; les formes d'intersection des points D_{2k}, $k \geqslant 2$, ont le noyau de dimension deux.

Nous décrirons le calcul de la structure symplectique Ψ_ω^0 pour les germes de fonctions de deux variables ayant les points critiques A_{2k}, $k \geqslant 1$, E_6 et E_8, après quoi nous citerons les résultats des calculs pour des points critiques de faible multiplicité. Soit

$$F = f(x, y) + \lambda_1 + \varphi_2(x, y)\lambda_2 + \ldots + \varphi_\mu(x, y)\lambda_\mu$$

un déploiement versel quasi homogène du germe $f: (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ dont le point critique est A_{2k}, E_6 ou E_8. Soit $\omega = y\, dx$. D'après l'exemple A, la forme ω engendre une application de périodes inf. non dégénérée P_ω. D'après le théorème 8, la forme d'intersection Ψ_ω répondant à une telle application est une structure symplectique sur Λ. La forme Ψ_ω s'écrit

$$\sum_{k<l} g_{k,l}\, d\lambda_k \wedge d\lambda_l,$$

où

$$g_{k,l}(\lambda) = \langle \nabla_{\partial/\partial\lambda_k}\omega|_\lambda, \nabla_{\partial/\partial\lambda_l}\omega|_\lambda \rangle,$$

$\langle , \rangle$ est la forme d'intersection dans $H^1(X_\lambda, \mathbf{C})$. Nous assimilerons chaque coefficient $g_{k,l}(\lambda)$ au résidu d'une expression convenable sur la courbe algébrique

$$Y_\lambda = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid F(x, y, \lambda) = 0\}.$$

Lemme 1. *Pour tout $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$ le plongement naturel de la fibre X_λ de la fibration de Milnor dans la courbe algébrique Y_λ induit un isomorphisme de (co)homologies.*

D é m o n s t r a t i o n. Elle résulte du fait que pour un germe $\mathfrak{f}$ simple quasi homogène, le degré quasi homogène des fonctions $\{\varphi_j\}$ est plus petit que le degré quasi homogène de $\mathfrak{f}$.

D'après le lemme 1, on peut calculer le coefficient $g_{k,l}(\lambda)$ comme indice d'intersection des classes de cohomologie sur Y_λ isomorphes aux classes $\nabla_{\partial/\partial\lambda_k}\omega|_\lambda$, $\nabla_{\partial/\partial\lambda_l}\omega|_\lambda$.

Conformément aux formules (3), (4) de la page 231, on peut représenter les classes indiquées par les formes $\omega_k = \varphi_k\, dx \wedge dy/d_{x,y}F$ et $\omega_l = \varphi_l\, dx \wedge dy/d_{x,y}F$ respectivement. Pour calculer l'indice d'intersection dans $H^1(Y_\lambda, \mathbf{C})$ des classes de cohomologie des formes ω_k, ω_l, on modifie l'une d'elles d'une différentielle de la fonction de telle façon que la forme devienne à support compact, puis on fait le produit des formes et l'on prend l'intégrale du produit suivant Y_λ:

$$g_{k,l}(\lambda) = \int\limits_{Y_\lambda} (\omega_k - d\alpha) \wedge \omega_l = -\int\limits_{Y_\lambda} d\alpha \wedge \omega_l$$

(la seconde égalité est vérifiée, puisque les formes ω_k, ω_l sont holomorphes).

A l'aide de la formule de Stokes, nous déduisons la règle de calcul du coefficient $g_{k,l}(\lambda)$: *sur la courbe Y_λ, au voisinage de son seul point à l'infini, écrivons la forme ω_k comme différentielle d'une fonction holomorphe: $\omega_k = d\alpha$. Alors*

$$g_{k,l}(\lambda) = 2\pi i \operatorname{Res}_\infty [\alpha\omega_l],$$

où $\operatorname{Res}_\infty$ *est le résidu au point à l'infini.*

Voici maintenant les réponses:

a) Soient $\mathfrak{f} = -y^2 + x^3$ un germe de type A_2, et $F = f + \lambda_1 x + \lambda_2$. Alors

$$\Psi_\omega = \mathrm{Cte} \cdot d\lambda_1 \wedge d\lambda_2.$$ 1179 3

b) Soient $\mathfrak{f} = -y^2 + x^5$ un germe de type A_4, et $F = f + \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x + \lambda_4$. Alors

$$\Psi_\omega = \mathrm{Cte}\, [d\lambda_1 \wedge d\lambda_4 + 3d\lambda_2 \wedge d\lambda_3 + \lambda_1\, d\lambda_1 \wedge d\lambda_2].$$

c) Soient $\mathfrak{f} = -y^2 + x^7$ un germe de type A_6, et $F = f + \lambda_1 x^5 + \lambda_2 x^4 + \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^2 + \lambda_5 x + \lambda_6$. Alors

$$\Psi_\omega = \mathrm{Cte}\, [3d\lambda_1 \wedge d\lambda_6 - 9\lambda_1\, d\lambda_1 \wedge d\lambda_4 + 6\lambda_2\, d\lambda_1 \wedge d\lambda_3 + (\lambda_3 + 3\lambda_1^2)\, d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 + 5d\lambda_2 \wedge d\lambda_5 + 5\lambda_1\, d\lambda_2 \wedge d\lambda_3 + 15d\lambda_3 \wedge d\lambda_4].$$

d) Soient $\mathfrak{f} = -y^3 + x^4$ un germe de type E_6, et $F = -y^3 + x^4 + \lambda_1 x^2 y + \lambda_2 xy + \lambda_3 y + \lambda_4 x^2 + \lambda_5 x + \lambda_6$. Alors

$$\Psi_\omega = \mathrm{Cte}\,[-3d\lambda_1 \wedge d\lambda_6 + [(5/9)\,\lambda_1^3 - 27\lambda_4]\, d\lambda_1 \wedge d\lambda_4 + 2\lambda_1^2\, d\lambda_1 \wedge d\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2\, d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 - (15/2)\, d\lambda_2 \wedge d\lambda_5 + 15 d\lambda_3 \wedge d\lambda_4].$$

E. Soient $\mathfrak{f}: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe en son point critique de multiplicité μ, F un représentant du déploiement versel, $\omega \in \Omega^{n-1}$ une forme qui définit l'application de P_ω^k non dégénérée pour un k donné. Supposons que la forme d'intersection sur $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$ soit non dégénérée, ce qui implique l'existence d'une forme Ψ_ω^k non dégénérée définie sur $T_*(\Lambda \setminus \Sigma)$. Supposons que $\mathfrak{f}$, F, ω soient réels sur les parties réelles des domaines de définition. Voyons à quel point la forme Ψ_ω^k est réelle sur la partie réelle de son domaine de définition, i.e. sur $T_*(\mathbf{R}^\mu \cap (\Lambda \setminus \Sigma))$.

Théorème 9. *Sous les hypothèses consenties, la forme d'intersection Ψ_ω^k sur $T_*(\mathbf{R}^\mu \cap (\Lambda \setminus \Sigma))$ ne prend que des valeurs réelles si n est impair et ne prend que des valeurs imaginaires pures si n est pair.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{f}\,|_{\mathbf{R}^n}$, $F|_{(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^\mu) \cap (B \times \Lambda)}$, $\omega|_{T_*((\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^\mu) \cap (B \times \Lambda))}$ réels. Supposons que λ appartienne à $\mathbf{R}^\mu \cap (\Lambda \setminus \Sigma)$. L'image de $T_\lambda(\mathbf{R}^\mu)$ par l'application dP_ω^k est un sous-espace réel $(H_\mathbf{R})$ de dimension μ dans $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$. On demande de savoir les valeurs prises par la forme d'intersection sur les couples de vecteurs dans $H_\mathbf{R}$. Décrivons $H_\mathbf{R}$.

Assimilons $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbf{R})$ à un sous-espace de $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$. Sur chacun de ces espaces opère une involution induite par le passage au conjugué complexe $(x, \lambda) \mapsto (\bar{x}, \bar{\lambda})$, où $(x, \lambda) \in X_\lambda$. Décomposons $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbf{R})$ en somme directe de sous-espaces formés de classes de cohomologie invariantes et anti-invariantes respectivement :

$$H^{n-1}(X_\lambda, \mathbf{R}) = I \oplus A.$$

Lemme 2. *On a $H_\mathbf{R} = I \oplus iA$, où $i^2 = -1$.*

Démonstration. Facile, car les représentants sur X_λ des classes de cohomologie $\{\nabla_{\partial/\partial\lambda_j} P_\omega^k\}$ sont des formes holomorphes qui sont réelles sur la partie réelle de la variété X_λ.

Terminons la démonstration du théorème. L'involution σ du passage au conjugué complexe change l'orientation sur X_λ si n est pair et conserve l'orientation si n est impair. On a donc $\langle\cdot, \cdot\rangle = -\langle\sigma\cdot, \sigma\cdot\rangle$ pour n pair, et $\langle\cdot, \cdot\rangle = \langle\sigma\cdot, \sigma\cdot\rangle$ pour n impair. Il ressort clairement de ces formules que pour n pair la restriction de la forme d'intersection à chacun des sous-espaces I, A est égale à 0, et pour n impair

les classes de cohomologie des différents sous-espaces I, A sont disjointes. Le théorème est démontré.

F. Citons quelques exemples d'applications nucléaires K_ω^k.

Soient $f = -y^2 + x^4$ un germe de type A_3,

$$F = -y^2 + x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3, \quad \omega = y\, dx.$$

Alors le noyau de la forme d'intersection dans $H_1(X_\lambda, \mathbf{C})$ est de dimension un, $K_\omega^0 = \mathrm{Cte}\cdot\lambda_2$.

Soient $f = -y^2 + x^6$ un germe de type A_5,

$$F = -y^2 + x^6 + \lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5, \quad \omega = y\, dx.$$

Le noyau de la forme d'intersection est de dimension un, $K_\omega^0 = \mathrm{Cte}\cdot(\lambda_3 - \lambda_1^2/4)$.

Soient $f = -y^2 + x^8$ un germe de type A_7, et F, ω analogues à ceux de E. Alors $K_\omega^0 = \mathrm{Cte}\cdot(\lambda_4 - \lambda_2\lambda_1/2)$.

Soient $f = -y^3 + x^3$ un germe de type D_4,

$$F = -y^3 + x^3 + \lambda_1 xy + \lambda_2 y + \lambda_3 x + \lambda_4, \quad \omega = y\, dx.$$

Le noyau de la forme d'intersection est de dimension deux. A une transformation linéaire de l'image près, l'application nucléaire K_ω^0 s'écrit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \mapsto (\lambda_2, \lambda_3)$.

Donnons quelques exemples d'images par les applications de périodes.

Exemple. Soit une famille de courbes algébriques complexes non singulières définies par l'équation $y^2 = x^{\mu+1} + \lambda_\mu x^{\mu-1} + \ldots + \lambda_1$ et dépendant des paramètres λ. Considérons sur une courbe une suite de cycles de base d'homologie de dimension un $\gamma_1(\lambda), \ldots, \gamma_\mu(\lambda)$ dépendant continûment de paramètres. Soit une application des périodes de la forme $\omega = y\, dx$ associant au point λ une suite d'« aires » des cycles de base: $\lambda \mapsto \left(\int_{\gamma_1(\lambda)} \omega, \ldots, \int_{\gamma_\mu(\lambda)} \omega\right)$

Théorème [370]. *L'image par l'application de périodes est* $\mathbf{C}^\mu \setminus 0$ (*par exemple, contient les vecteurs à coordonnées réelles*). *Il y a plus, chaque vecteur non nul se réalise comme vecteur des intégrales sur l'ensemble infini des valeurs des paramètres si* $\mu > 1$.

On montre dans [370] que l'image par l'application de périodes d'une forme générique est un voisinage pointé de zéro pour le déploiement versel de tout germe simple de fonction d'un nombre pair de variables; dans le cas d'un germe simple de fonction d'un nombre impair de variables, l'adhérence de l'image par l'application de périodes est un voisinage de zéro. Il y a tout lieu de penser que ces assertions sont vraies pour n'importe quels germes.

Exemple. Soient une famille de courbes non singulières $y^2 = x^3 + \lambda_2 x + \lambda_1$ et une application de périodes de la forme $\eta = dx/y$: $\lambda \mapsto \left(\int_{\gamma_1(\lambda)} \eta, \int_{\gamma_2(\lambda)} \eta \right)$ (la première application associée à l'application des périodes de la forme $y\,dx$). L'image par cette application est le sous-ensemble de $\mathbf{C}^2$ composé de vecteurs (z_1, z_2) tels que $\operatorname{Im}(z_1/z_2) > 0$.

Problème: décrire les images par les applications de périodes associées.

15.3. La restriction de la structure symplectique dans la base du déploiement versel à une strate du discriminant contient de l'information sur les dégénérescences au-dessus de la strate. Supposons que le nombre de n variables du germe f soit pair et que la forme d'intersection dans $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$ soit non dégénérée (en particulier μ est pair). Dans ce cas la forme d'intersection $\Psi_\omega^{n/2-1}$ (pour une application de périodes $P_\omega^{n/2-1}$ inf. non dégénérée) définit une structure symplectique sur Λ. Partageons le discriminant Σ en strates d'après les types de dégénérescence de niveau nul de X_λ.

Principe. *Les types de dégénérescence de niveau nul sont traduits par les propriétés lagrangiennes des strates du discriminant vis-à-vis de la structure symplectique* $\Psi_\omega^{n/2-1}$ (voir [373]).

Illustrons ce principe au moyen d'exemples.

Supposons qu'au point $\lambda \in \Sigma$ corresponde une variété X_λ admettant exactement $\mu/2$ points singuliers non dégénérés. Les cycles évanescents en ces points sont disjoints et engendrent donc, dans l'espace d'homologie de la fibre non singulière, un sous-espace lagrangien. Il se trouve que de tels λ engendrent dans Λ une sous-variété lagrangienne par rapport à la structure symplectique $\Psi_\omega^{n/2-1}$. Plus exactement, posons $\Sigma_0 = \{\lambda \in \Sigma \mid X \text{ admet } \mu/2 \text{ points singuliers tous non dégénérés}\}$.

Théorème 10 (voir [373]). Σ_0 *est une sous-variété lagrangienne dans l'espace symplectique* $(\Lambda, \Psi_\omega^{n/2-1})$.

Exemples. 1. Parmi les points critiques des germes de fonctions de deux variables, seuls ont la forme d'intersection non dégénérée les points dont les germes de courbe de niveau critique sont irréductibles. Il est facile alors de s'assurer, en déformant la courbe de niveau critique, que la variété Σ_0 est non vide.

2. Pour les germes de type A_{2k}, la variété Σ_0 est isomorphe, dans l'espace B^{2k+1} des polynômes de la forme

$$x^{2k+1} + \lambda_1 x^{2k-1} + \ldots + \lambda_{2k-1},$$

à la sous-variété des polynômes à k racines de multiplicité 2. On montre qu'une autre sous-variété du même espace, notamment celle des polynômes à racine de multiplicité $k+1$, est lagrangienne dans une structure symplectique distincte de la première (dans l'espace vectoriel de formes binaires de degré impair il y a exactement une (à un facteur près) 2-forme extérieure SL_2-invariante non nulle: ceci est précisément la seconde structure symplectique, voir [123]).

Théorème 11 (voir [373]). *Deux variétés algébriques affines dans* B^{2k+1}

$$\Sigma_1 = \{P_{2k+1} \in B^{2k+1} \mid P_{2k+1} = (x-a)^{k+1} P_k, \quad a \in \mathbf{C}, \quad P_k \in B^k\}$$

et

$$\Sigma_2 = \{P_{2k+1} \in B^{2k+1} \mid P_{2k+1} = (x-a) P_k^2, \quad a \in \mathbf{C}, \quad P_k \in B^k\}$$

sont isomorphes.

On démontre le théorème 11 en exhibant une formule explicite de l'automorphisme de B^{2k+1} par lequel une variété passe dans l'autre.

Démonstration du théorème 10. D'après un théorème de B. Teissier [341], Σ_0 est une intersection transversale de $\mu/2$ feuilles non singulières du discriminant Σ et, à ce titre, est une variété non singulière de dimension $\mu/2$.

Soit W le voisinage d'un point $\lambda^0 \in \Sigma_0$ dans la variété Σ_0. Posons $\mathbf{R}_+ = \{t \in R \mid t \geqslant 0\}$, $U = R_+ \times W = \{\lambda = \lambda^1 + te \mid \lambda^1 \in W, t \in R_+, e_1$ est le vecteur unité de l'axe des λ_1 dans $\Lambda\}$ (ce qui revient à fixer une structure linéaire dans Λ).

Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\mu/2}$ des cycles évanescents pour $t \to 0$. Alors le plan $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_{\mu/2} \rangle$ dans $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$, $\lambda \in U \setminus W$, est lagrangien. Complétons $\{\gamma_i\}$ par des cycles $\{\delta_i\}$ de manière à obtenir une base symplectique dans $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$. D'après le lemme 2 du § 12

$$\int_{\gamma_i} \omega = t^{n/2} \varphi_i, \qquad \int_{\delta_i} \omega = t^{n/2} \ln t \varphi_i' + \varphi_i'',$$

où $\varphi_i, \varphi_i', \varphi_i''$ sont des fonctions analytiques des coordonnées (t, λ^1) sur U. Par conséquent, l'application de périodes $P_\omega^{n/2-1}$ définit une famille p_t d'applications holomorphes de W dans $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$ qui dépend continûment du paramètre $t \in R_+$, et de plus $p_0(W)|_{\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_{\mu/2} \rangle} \equiv 0$. Cette dernière identité signifie que la restriction dans $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$ d'une forme d'intersection $\langle , \rangle$ à $p_0(W)$ est nulle. Puisque la forme $\Psi_\omega^{n/2-1}$ est analytique dans Λ, il vient

$$\Psi_\omega^{n/2-1}|_W = \lim_{t\to 0} \Psi_\omega^{n/2-1}|_{W+te_1} = \lim_{t\to 0} p_t^* \langle \cdot, \cdot \rangle = p_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle = 0.$$

Le théorème est démontré.

Formulons un théorème qui généralise le théorème 10 et qui se démontre d'une façon analogue.

Soient $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_k : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ des germes de fonctions holomorphes à points critiques de multiplicité finie. Choisissons sur la base Λ du déploiement versel d'un germe $\mathfrak{f} : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ une sous-variété non singulière $\Sigma_{f_1, \ldots, f_k}$ qui réunit tous les points $\lambda \in \Sigma$ pour lesquels $F(\cdot, \lambda)$ admet k points critiques $x_1(\lambda), \ldots, x_k(\lambda)$ équivalents à ceux des germes $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_k$ respectivement.

Soit $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$ un point suffisamment proche de $\lambda_0 \in \Sigma_{f_1, \ldots, f_k}$. Alors les cycles dans $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$ évanescents en un point $x_i(\lambda_0)$ engendrent un sous-espace L_i dans $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$. Les sous-espaces $\{L_i\}$ ont les propriétés suivantes:

a) la restriction dans $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$ d'une forme d'intersection $\langle , \rangle$ à L_i est isomorphe à la forme d'intersection en homologie évanescente au point critique du germe $\mathfrak{f}_i$;

b) la somme L des sous-espaces $\{L_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, est directe;

c) $\langle L_i, L_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$;

d) L_i est invariant par la monodromie locale du point λ_0.

Supposons que n soit pair et que les valeurs spectrales des germes $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_k$ appartiennent à $(n/2 - 2, n/2)$. (Tel est par exemple le cas des germes stablement équivalents à des germes de fonctions de deux variables.)

Théorème 12. *Soient n pair et $\Psi_\omega^{n/2-1}$ la forme répondant à une application de périodes $P_\omega^{n/2-1}$ inf. non dégénérée. Alors:*

1. (Voir [373].) *La restriction de la structure symplectique $\Psi_\omega^{n/2-1}$ au sous-espace $T_{\lambda_0}(\Sigma_{f_1, \ldots, f_k})$ se laisse induire d'une forme d'intersection dans $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$ par une application linéaire convenable dans l'annulateur d'un sous-espace $L \subset H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$.*

2. *Si de plus les points critiques de tous les germes $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_k$ sont tous simples, alors la restriction de $\Psi_\omega^{n/2-1}$ à $T_{\lambda_0}(\Sigma_{f_1, \ldots, f_k})$ est isomorphe à la restriction d'une forme d'intersection dans $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$ à l'annulateur d'un sous-espace $L \subset H_{n-1}(X_\lambda, \mathbf{C})$.*

Corollaire du p. 1 du théorème 12. *On a*

$$\dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Ker}(\Psi_\omega^{n/2-1} \mid T_{\lambda_0}(\Sigma_{f_1, \ldots, f_k})) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Ker}(\langle , \rangle_{f_i}),$$

où $\langle , \rangle_{f_i}$ est la forme d'intersection en homologie évanescente au point critique du germe $\mathfrak{f}_i$.

Addendum. Alors que ce livre était sous presse, de nombreux nouveaux résultats ont été obtenus. Nous nous bornerons à signaler

la démonstration des hypothèses de la semi-continuité du spectre ([361, 362, 365, 336]), la théorie des queues d'aronde déployées, la découverte de la relation des variétés lagrangiennes et legendriennes à singularités avec les structures symplectiques et de contact de variétés de formes binaires et de polynômes ([125, 19]), l'inclusion en théorie des singularités des groupes des réflexions H_3 et H_4 ([225, 324, 371]), la classification des projections de surfaces génériques de dimension 2 d'un espace de dimension 3 sur un plan ([20, 280, 281]) et le calcul de l'anneau des cobordismes legendriens ([31 à 33]). Le point des connaissances actuelles en théorie des singularités est fait dans les travaux de synthèse [20 à 22, 165, 328].

BIBLIOGRAPHIE

Abréviations

FAP = Funktsional'nyi Analiz i ego Priloshenіya
FAA = Functional Analysis and its Applications (Eng. trans. of FAP)
UMN = Uspekhi Matematicheskykh Nauk
RMS = Russian Mathematical Surveys (Eng. trans. of major part of UMN)
INT = Itogi naouki i tekhniki (Le point des connaissances scientifiques et techniques)

ALGEBRAIC SURFACES
[1] Proc. Mat. Inst. V. A. Steklov, LXXV, Moscow, Nauka (1965), AMS Providence, RI (1967).
A'CAMPO N.
[2] Le nombre de Lefschetz d'une monodromie. Indag. Math. 76 : 2 (1973), 113-118.
A'CAMPO N.
[3] La fonction zêta d'une monodromie. Comm. Math. Helv. 50 : 2 (1975), 233-248.
A'CAMPO N.
[4] Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes. I. Math. Ann. 213 : 1 (1975), 1-32.
A'CAMPO N.
[5] Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes. II. Proc. Int. Cong. Math. Vancouver, 1974, 1 : 1 (1975), 395-404.
A'CAMPO N.
[6] Tresses, monodromie et le groupe symplectique. Comm. Math. Helv. 54 : 2 (1979), 318-327.
ANDREOTTI A.
[7] On Torelli's theorem. Am. J. Math. 80 (1958), 101-121.
ARNOLD V. I.
[8] Sur la disposition d'ovales de courbes algébriques planes réelles, les involutions des variétés différentiables de dimension 4 et l'arithmétique des formes quadratiques entières. FAP 5 : 3 (1971), 1-9.
ARNOLD V. I.
[9] Integrals of rapidly oscillating functions and singularities of projections of Lagrangian manifolds. FAP 6 : 3 (1972), 61-62, FAA 6, 222-225.
ARNOLD V. I.
[10] Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities. FAP 6 : 4 (1972), 3-25, FAA 6, 254-272.
ARNOLD V. I.
[11] Remarks on the stationary phase method and the Coxeter numbers. UMN 28 : 5 (1973), 17-44, RMS 28 : 5, 19-48.
ARNOLD V. I.
[12] Critical points of smooth functions and their normal forms. UMN 30 : 5 (1975), 3-65, RMS 30 : 5, 1-75.

ARNOLD V. I.
[13] Some open problems in the theory of singularities. Proc. Sem. S. L. Sobolev, 1 (1976), 5-15. Eng. trans.: Proc. AMS Symp. Pure Math. 40, Part 1 (1983).
ARNOLD V. I.
[14] Wave front evolution and the equivariant Morse lemma. Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976). 557-582.
ARNOLD V. I.
[15] Index of a singular point of a vector field, the Petrovskii-Oleinik inequality and mixed Hodge structures. FAP 12 : 1 (1978), 1-14.
ARNOLD V. I.
[16] Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k, C_k, F_4 and singularities of evolutes. UMN 33 : 5 (1978), 91-105, RMS 33 : 5, 99-116.
ARNOLD V. I.
[17] Critical points of smooth functions. Proc. Int. Congress of Math., Vancouver 1 (1974), 19-41.
ARNOLD V. I.
[18] On some problems in singularity theory. K. Patodi memorial volume. Bombay, 1979.
ARNOLD V. I.
[19] Singularities of Legendre varieties, of evolvents and of fronts at an obstacle. Ergodic theory and dynamical systems 2 (1982), 301-309.
ARNOLD V. I.
[20] Singularities of ray systems. UMN 38 : 2 (1983), 77-147; RMS (1983).
ARNOLD V. I.
[21] Singularities of ray systems. ICM, Warsaw, 1983; Elsevier, Amsterdam, 1984, 27-50.
ARNOLD V. I.
[22] Catastrophe theory. Springer, Berlin, 1984, 1-82.
ARNOLD V. I.
[23] Singularities in variational calculus. UMN 39 : 5 (1984), 256.
ARNOLD V. I.
[23'] Singularities in variational calculus. INT. Problèmes actuels des mathématiques 22 (1983), 3-55.
ARNOLD V. I.
[24] Vanishing inflexions. FAP 18 : 3 (1984), 58-59.
ARNOLD V. I.
[25] Remarques sur les structures de Poisson dans le plan et sur d'autres puissances des formes de volume. Tr. sém. I. Petrovski, 11 (1985).
ARNOLD V. I., OLEINIK O. A.
[26] The topologie of real algebraic manifolds. Vest. MGU, sér. math. 6 (1979), 7-17.
ARNOLD V. I., SHANDARIN S. F., ZELDOVICH Ya. B.
[27] Elements of large-scale structure of the Universe. UMN I. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics 20 (1982), 111-130.
ARNOLD V. I., VARCHENKO A. N., GIVENTAL A. B., KHOVANSKI A. G.
[28] Singularities of functions, wave fronts, caustics and multidimensional integrals. Math. Phys. Reviews 4 (1984), 1-92.
ATIYAH M. F.
[29] Resolution of singularities and division of distributions. Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 145-150.
ATIYAH M., BOTT R., GARDING L.
[30] Gap series for hyperbolic differential operators with constant coefficients. UMN 26 : 2 (1971), 25-100.

AUDIN M.
[31] Quelques remarques sur certains groupes de cobordisme lagrangien. Univ. Paris-sud, 1983, 1-16.
AUDIN M.
[32] Remarques sur les nombres caractéristiques entiers de certaines immersions lagrangiennes. C. r. Acad. sci., Paris, 297 (1983), 561-563.
AUDIN M.
[33] Classes caractéristiques d'immersions lagrangiennes définies par des variétés de caustiques (d'après Vasiliev). Sém. Sud-Rhodarien de géométrie, t. I, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984.
BABENKO K. I.
[34] Sur le développement asymptotique du noyau de Dirichlet des séries de Fourier sphériques centrales multiples. DAN SSSR 243 : 5 (1978), 1097-1100.
BARLET D.
[35] Forme hermitienne canonique sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée. Invent. math. 81 : 1 (1985), 115-154.
BARLET D.
[36] Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques. Ann. sci. Ec. Norm. Sup. 17 : 2 (1984), 293-315.
BARLET D.
[37] Contribution du cup-produit de la fibre de Milnor aux pôles de $|f|^{2\lambda}$. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 34 : 4 (1984), 75-107.
BASSET A. B.
[38] The maximum number of double points on a surface. Nature 73 (1906), 246.
BEAUVILLE A.
[39] Sur le nombre maximum de points doubles d'une surface dans P^3 (μ (5) = 31). Algebraic geometrie, Anger, 1978, Sythoff and Noordhoff, 1980, 207-215.
BENEDETTI R., GRAGNOLINI P.
[40] Versal families of matrices with respect to unitary conjugation. Adv. Math. 54 : 3 (1984), 314-335.
BERNSTEIN D. N.
[41] Le nombre de racines de systèmes d'équations. FAP 9 : 3 (1975), 1-4.
BERNSTEIN D. N., KUSHNIRENKO A. G., HOVANSKY A. G.
[42] Newton polyhedra. UMN 31 : 3 (1976), 201-202.
BERNSTEIN I. N.
[43] The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter. FAP 6 : 4 (1972), 26-40.
BERNSTEIN I. N., GELFAND S. I.
[44] Méromorphie de la fonction P^λ. FAP 3 : 1 (1969), 84-86.
BERRY M. V.
[45] Waves and Thom's theorem. Adv. Phys. 25 (1976), 1-26.
BERRY M. V.
[46] Singularities in waves and rays. Les Houches Summer School, 1980, Amsterdam, North-Holland, 1981.
BERRY M. V., NYE J. F.
[47] Fine structure in caustic functions. Nature, London, 267 (1977), 34-36.
BERRY M. V., UPSTILL C.
[48] Catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns. Progress in optics XVIII. North-Holland, 1980.
BJÖRK J. E.
[49] Rings of differential operators. North-Holland, Amsterdam, 1979.
BOURBAKI N.
[50] Groupes et algèbres de Lie. Hermann, Paris, 1971.

BRIANSON J., SKODA H.
[51] Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de C^n. C. r. Acad. sci., Paris, sér. A, 278 (1974), 949-951.
BRIESKORN E.
[52] Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen. Manuscripta Math. 2 (1970), 103-161.
BRIESKORN E.
[53] Sur les groupes de tresses (d'après Arnold), Sém. Bourbaki, 401 (1971/72), 22-44; Lecture Notes in Math. 317, Springer, Berlin, 1973.
BRIESKORN E.
[54] Special singularities — resolution, deformation and monodromy. Amer. Math. Soc. Lecture Notes prepared in connection with the Summer Institute on Algebraic Geometry held at Humboldt State University, Arcata, California, 1974.
BRIESKORN E.
[55] Die Milnorgritter des exzeptionellen unimodularen Singularitäten. Bonner Math. Shriften 150 (1983), 1-225.
BRUCE J. W.
[56] An upper bound for the number of singularities on a projective hypersurface. Bull. London Math. Soc. 13 : 1 (1981), 47-50.
BRUCE J. W.
[57] Counting singularities. Proc. Roy. Soc., Edinburgh, A93 : 1, 2 (1982), 137-159.
BRUCE J. W., GAFFNEY T.
[58] Simple singularities of mappings $(C, 0) \to (C^2, 0)$. J. London Math. Soc. 26 : 3 (1982), 465-474.
BRUCE J. W., GIBLIN P. J.
[59] Smooth stable maps of discriminant varieties. Proc. London Math. Soc. 50 : 3 (1985), 535-551.
BRUCE J. W., GIBLIN P. J.
[60] Outlines and their duals. Proc. London Math. Soc. 50 : 3 (1985), 552-570.
BRUCE J. W., GIBLIN P. J.
[61] Two-parameter families of plane caustics by reflexion. Proc. London Math. Soc. 50 : 3 (1985), 571-576.
CASSOU-NOGUES P.
[62] Prolongement des séries de Dirichlet associées à un polynôme à deux indéterminées. Inst. des Hautes Etudes Scientifiques, 1983, préprint, 1-38.
CASSOU-NOGUES P.
[63] Racines de polynômes de Bernstein. Univ. de Bordeaux, 1983. préprint, 1-34.
CASSOU-NOGUES P.
[64] Séries de Dirichlet et intégrales associées à un polynôme à deux indéterminées. Univ. de Bordeaux, 1983, préprint, 1-83.
CATANESE F., CERESA G.
[65] Constructing sextic surfaces with a given number of nodes. J. Pure Appl. Algebra 23 (1982), 1-12.
CATTANI E., KAPLAN A.
[66] The monodromy weight filtration for a several variables degenerations of Hodge structures of weight two. Inv. Math. 52 : 2 (1979), 131-142.
CATTANI E., KAPLAN A.
[67] On the local monodromy of a variation of Hodge structure Bull. AMS 4 (1981), 116-118.
CATTANI E., KAPLAN A.
[68] Polarized mixed Hodge structures and the monodromy of a variation of Hodge structure. Préprint, 1981, 1-25.

CHERN S. S.
[69] Complex manifolds. Chicago, 1956.
CHMUTOV S. V.
[70] Monodromy groups of singularities of functions of two variables. FAP 15 : 1 (1981), 61-66.
CHMUTOV S. V.
[71] On the monodromy of isolated singularities. Travaux de la XVIe Conférence algébrique d'U.R.S.S. Leningrad, 1 (1981), 172-173.
CHMUTOV S. V.
[72] The monodromy groups of critical points of functions. Invent. math. 67 (1982), 123-131.
CHMUTOV S. V.
[73] The monodromy groups of critical points of functions. II. Invent. math. 73 (1983), 491-510.
CHMUTOV S. V.
[74] Spectre and equivariant deformations of critical points. UMN 39 : 4 (1984), 113-114.
CLEMENS C. H.
[75] Picard-Lefschetz theorem for families of non singular algebraic varieties acquiring ordinary singularities. Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), 93-108.
CLEMENS C. H.
[76] Degeneration of Kähler manifolds. Duke Math. J. 44 : 2 (1977), 215-290.
CODDINGTON E. A., LEVINSON N.
[77] The theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill, New York, 1955.
COLIN DE VERDIER Y.
[78] Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaines de R^n. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., sér. 4, 10 : 4 (1977), 559-575.
CORNALBA M., GRIFFITHS P.
[79] Some transcendental aspects of algebraic geometry. *In*: Proc. of Summer Inst. of AMS, Arcata, 1974.
DAMON J.
[80] Topological properties of discrete algebra types. I. The Hilbert-Samuel function. Adv. in Math., supp. sér. 5 (1979), 83-118; II. Real and complexe algebras. Amer. J. Math. 101 : 6 (1979), 1219-1248.
DAMON J.
[81] Topological stability in the nice dimensions. Topology 18 (1979), 129-142.
DAMON J.
[82] Topological triviality of versal unfoldings of complete intersections. Préprint, 1980.
DAMON J.
[83] Finite determinacy and topological triviality. I. Invent. Math. 62 (1980), 299-324.
DAMON J.
[84] Finite determinacy and topological triviality. II. Sufficient conditions and topological stability. Comp. Math. 47 : 2 (1982), 101-132.
DAMON J., GAFFNEY T.
[85] Topological triviality of deformations of functions and Newton filtrations. Invent. Math. 72 (1983), 335-358.
DANILOV V. I.
[86] The geometry of toric manifolds. UMN 33 : 2 (1978), 85-135.
DANILOV V. I.
[87] Newton polyhedra and vanishing cohomology. FAP 13 : 2 (1979), 32-47. FAA 13, 103-112.

DAVYDOV A. A.
[88] Limite d'atteignabilité d'un système commandé multidimensionnel. Travaux de l'Univ. de Tbilissi 232, 233 : 13, 14 (1982), 78-96.
DELIGNE P.
[89] Théorie de Hodge. I. Proc. Int. Congress Math. 1 (1970) Nice, 425-430; II. Publ. Math. IHES 40 (1971), 5-58; III. Publ. Math. IHES 44 (1972), 5-77.
DELIGNE P.
[90] Equations différentielles à points singuliers réguliers. Lecture Notes in Math., 163, Springer, Berlin, 1970.
DELIGNE P.
[91] Les immeubles des groupes de tresses généralisés. Invent. Math. 17 (1972), 273-302.
DEMAZURE M.
[92] Classification des germes à point critique isolé et à nombres de modules 0 ou 1 (d'après Arnold). Sém. Bourbaki, 26e année, 1973/74, 443, février 1974.
DIMCA A.
[93] Germes de fonctions définies sur les singularités isolées d'hypersurfaces. C. r. Acad. Sci. 297 : 2 (1983), 217-219.
DIMCA A., GIBSON G.
[94] Contact unimodular germs from the plane to the plane. Quart. J. Math. 34 : 135 (1983), 281-295.
DOLGACHEV I. V., NIKULIN V. V.
[95] Singularités exceptionnelles d'Arnold et les surfaces K-3. Conférence sur la topologie, Minsk, 1977.
DRUCKER D., FROHARDT D.
[96] Irreducible root systems and finite linear groups of degree two. Bull. London Math. Soc. 14 : 2 (1982), 142-148.
DUFOUR J. P.
[97] Familles de courbes planes différentiables. Topology 22 : 4 (1983), 449-474.
DUISTERMAAT J. J.
[98] Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities. Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 207-281.
DURFEE A. H.
[99] Fibered knots and algebraic singularities. Topology 13 (1974), 47-59.
DURFEE A.
[100] Fifteen characterisations of rational double points and simple critical points. L'enseignement math. 25 : 1, 2 (1979), 131-163.
DURFEE A.
[101] Mixed Hodge structures on punctured neighborhoods. Duke Math. J. 50 (1983), 1017-1040.
DURFEE A., HAIN R.
[102] Mixed Hodge structures on the homotopy of links. Inst. for Advanced Study, préprint, 1985, 1-37.
EBELING W.
[103] Quadratishe formen und Monodromee-Groupen von Singularitäten. Math. Ann. 255 (1981), 463-498.
EHLERS F., LO K.-C.
[104] Minimal characteristic exponent of the Gauss-Manin connection of the isolated singular point and Newton polyhedron. Math. Ann. 259 (1982), 431-441.
EL AMRANI M.
[105] Singularités des fonctions obtenues par intégration sur la fibre $x^2 - y^2 = s$ et identités modulaires. Bull. Sci. Math., 2e sér., 108 (1984), 32-37.

EL ZEIN F.
[106] Dégénérescence diagonale. I. C. r. Acad. Sci. 296 (1983), 51-54; II. C. r. Acad. Sci. 276 (1983), 199-202.
FEDORYUK M. V.
[107] La méthode de phase stationnaire pour les intégrales multidimensionnelles. J. Vytch. math. i math. fiz. 2 : 1 (1962), 145-150.
FEDORYUK M. V.
[108] La méthode du point selle. Nauka, Moscou, 1977.
FRESNEL A.
[109] Mémoire sur la diffraction de la lumière. Mém. de l'Acad. des Sci. 5 (1818), 339-353.
FORSTER O.
[110] Riemannshe Flachen. Heidelberg, 1977.
FUCHS B. L.
[111] Chapitres spéciaux de théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Fizmatguiz, Moscou, 1963.
FUKUDA T.
[112] Types topologiques des polynômes. Publ. IHES 46 (1976), 87-106.
FUKUDA T.
[113] Local topological properties of differentiable mappings. I Invent. Math. 65 : 2 (1981), 227-250.
GABRIELOV A. M.
[114] Intersection matrices for certain singularities. FAP 7 : 3 (1973), 18-32, FAA 7, 182-193.
GABRIELOV A. M.
[115] Bifurcations. Dynkin diagrams and modality of isolated singularities. FAP 8 : 2 (1974), 7-12, FAA 8, 94-98.
GABRIELOV A. M.
[116] Dynkin diagrams for unimodal singularities. FAP 8 : 3 (1974), 1-6, FAA 8, 192-196.
GABRIELOV A. M.
[117] Polar curves and intersection matrices of singularities. Invent. math. 54 : 1 (1979), 15-22.
GABRIELOV A. M., KUSHNIRENKO A. G.
[118] Description of deformations with constant Milnor number for homogeneous functions. FAP 9 : 4 (1975), 67-68, FAA 9, 329-331.
GALLARATI D.
[119] Una superficie dell'ottavo ordine con 160 nodi. Acc. Sci. Lett. 14 (1957), 1-7.
GARDING L.
[120] Sharp fronts of paired oscillatory integrals. Publ. Res. Inst. Math. Sci., ser. A, 12 (1977), 53-68.
GELFAND I. M., SHILOV G. E.
[121] Fonctions généralisées et actions exercées sur elles. I. Fizmatguiz, Moscou, 1959; trad. angl.: Generalised functions, Academic Press, New York, 1964; trad. fr.: Les distributions. Dunod, Paris, 1962.
GIVENTAL A. B.
[122] Convolution of invariants of groups, generated by reflections and connected with simple singularities of functions. FAP 14 : 2 (1980), 4-14, FAA 14, 81-89.
GIVENTAL A. B.
[123] Manifolds of polynomials, having a root of fixed comultiplicity and the generalised Newton equation. FAP 16 : 1 (1982), 13-17, FAA 16, 10-14.
GIVENTAL A. B.
[124] Asymptotic of intersection form for quasi-homogeneous singularities. FAP 16 : 4 (1982), 63-65.

GIVENTAL A. B.
[125] Lagrangean manifolds with singularities and irreducible sl_2-modulus. UMN 38 : 6 (1983), 123-124; RMS (1983),
GIVENTAL A. B.
[126] On the maximum number of singular points on the projective hyperplane. FAP 17 : 3 (1983), 73-74.
GODBILLON C.
[127] Géométrie différentielle et mécanique analytique. Paris, 1969.
GORINE E. A.
[128] Sur les propriétés asymptotiques des polynômes et des fonctions algébriques. UMN 16 : 1 (1961), 91-118.
GORYUNOV V. V.
[129] Géometry of bifurcation diagrams of simple projections to the line. FAP 15 : 2 (1981), 1-8, FAA 15, 77-82.
GORYUNOV V. V.
[130] Adjacences de spectres de certaines singularités. Vest. MGU sér. mat. 4 (1981), 19-22.
GORYUNOV V. V.
[131] Projections d'intersections complètes de dimension 0 sur la droite et l'hypothèse $K(\pi, 1)$. UMN 37 : 3 (1982), 179-180.
GORYUNOV V. V.
[132] Bifurcation diagrams of some simple and quasi-homogeneous singularities. FAP 17 : 2 (1983), 23-37.
GORYUNOV V. V.
[133] Singularités de projections d'intersections complètes. INT. Problèmes actuels des mathématiques 22, 167-206, Moscou, VINITI, 1983 (en russe). Trad. angl. : J. Sov. math., 27 (1984).
GREUEL G.-M., STEENBRINK J.
[134] On the topologie of smoothable singularities. Preprint n° 31, Univ. Kaiserslautern, 1981.
GRIFFITHS P.
[135] Monodromy of homology and periods of integrals on algebraic manifolds. Mimeographed notes, Princeton Univ., 1968.
GRIFFITHS P.
[136] On the periods of certain rational integrals. I. Ann. Math., ser. 2, 90 : 3 (1969), 460-495; II. Ann. Math., ser. 2, 90 : 3 (1969), 496-541.
GRIFFITHS P.
[137] Periods of integrals on algebraic manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 228-296.
GRIFFITHS P., HARRIS J.
[138] Principles of Algebraic Geometry. John Wiley and sons, New York, 1978.
GRIFFITHS P., SCHMID W.
[139] Recent development in Hodge theory, a discussion of techniques and results. Proc. Int. Colloq. on discrete sub-groups of Lie groups. Bombay, 1973, 31-127.
GUILLEMIN V., STERNBERG Sh.
[140] Geometric asymptotics. Providence, 1977.
GUDKOV D. A.
[141] Topologie of real projective algebraic manifolds. UMN 29 : 4 (1974), 3-79.
GUDKOV D. A., KRAKHNOV A. D.
[142] On a periodicity of Euler characteristic of real algebraic manifolds M-1. FAP 7 : 2 (1974), 15-19.
GUNNING R., ROSSI H.
[143] Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall, New York, 1965.

GUSEIN-ZADE S. M. (= GOUSSEIN-ZADÉ)
[144] Intersection matrices for certain singularities of functions of two variables. FAP 8 : 1 (1974), 11-15, FAA 8, 10-13.
GUSEIN-ZADE S. M.
[145] Dynkin diagrams for singularities of functions of two variables. FAP 8 : 4 (1974), 23-30, FAA 8, 295-300.
GUSEIN-ZADE S. M.
[146] The characteristic polynomial of classical monodromy for a series of singularities. FAP 10 : 3 (1976), 78-79, FAA 10, 229-230.
GUSEIN-ZADE S. M.
[147] Monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces. UMN 32 : 2 (1977), 23-65, RMS 32 : 2, 23-69.
GUSEIN-ZADE S. M.
[148] Distinguished bases of simple singularities. FAP 14 : 4 (1980), 73-74, FAA 14, 307-308.
GUSEIN-ZADE S. M.
[149] Index of a singular point of a gradient vector field. FAP 18 : 1 (1984), 7-12.
GUSEIN-ZADE S. M., NEKHOROCHEV V. N.
[150] On the adjency of singularities A_k to the points of the stratum μ = const of singularities. FAP 17 : 4 (1983), 82-83.
HAMM H.
[151] Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume. Math. Ann. 191 : 3 (1971), 235-252.
HAMM H., LE Dung Trang
[152] Un théorème de Zariski du type de Lefschetz. Annales Sci. de l'Ecole Norm. Sup. (1973), 317-356.
HIRONAKA H.
[153] Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I. II. Ann. Math. 79 (1964), 109-203, 205-326.
HOVANSKY A. G. (= KHOWANSKY)
[154] Newton polyhedra and toroidal manifolds. FAP 11 : 4 (1977), 56-67, FAA 11, 289-295.
HOVANSKY A. G.
[155] Newton polyhedra and the genus of complete intersections. FAP 12 : 1 (1978), 51-61, FAA 12, 38-46.
HOVANSKY A. G.
[156] Newton polyhedra and the Euler-Jacobi formula. UMN 33 : 6 (1978), 245-246.
HOVANSKY A. G.
[157] Index of a polynomial vector field. UMN 36 : 4 (1981), 234.
HOVANSKY A. G.
[158] On one class of systems of transcendental equations. DAN SSSR 255 (1980), 804-807.
HOVANSKY A.
[159] Sur les racines complexes de systèmes d'équations algébriques ayant un petit nombre de monômes. C. r. Acad. Sci., Paris, 292 (1981), 937-940.
HOVANSKY A.
[160] Théorème de Bezout pour les fonctions de Liouville. IHES, préprint n° 45, septembre 1981, 1-31.
HOVANSKI A. G.
[161] Real analytical manifolds with a finiteness property and complex abelian integrals. FAP 18 : 2 (1984), 40-50.
HOVANSKI A. G.
[162] Polyèdres de Newton (résolution de singularités). INT, sér. Problèmes actuels des mathématiques, 22 (1983), VINITI, Moscou, 207-239. Trad. angl. : J. Sov. Math., 27 (1984).

HUA L.-K.
[163] Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, Leipzig, 1959.
ILYUTA G. G.
[164] Monodromie and vanishing circles of boundary singularities. FAP 19 : 3, 11-21.
ITOGI NAÚKI I TEKHNIKI (INT)
[165] Problèmes actuels des mathématiques 22 (1983), VINITI, Moscou.
JANSSEN W. A. M.
[166] Skew-symmetric vanishing lattices and their monodromy groups. Math. Ann. 266 (1983), 115-133.
JANSSEN W. A. M.
[167] Skew-symmetric vanishing lattices and their monodromy groups. II. Math. Ann. 272 (1985), 17-22.
JEANQUARTIER P.
[168] Développement asymptotique de la distribution de Dirac. C. r. Acad. Sci. Paris 271 (1970), 1159-1161.
KARATSUBA A. A.
[169] I. M. Vinogradov (90th anniversary). UMN 36 : 6 (1981), 3-15.
KARPUSHKIN V. N.
[170] Uniform estimates of oscillatory integrals in R^2. DAN SSSR 257 (1981), 804-808.
KARPUSHKIN V. N.
[171] Uniform estimates of oscillatory integrals. UMN 36 : 4 (1981), 213.
KARPUSHKIN V. N.
[172] Uniform estimates of oscillatory integrals with parabolic or hyperbolic phase. Proc. I. Petrovski Sem. 9 (1983), 3-39.
KARPUSHKIN V. N.
[173] Theorem on uniform estimates of oscillatory integrals with a phase depending on two parameters. Proc. I. Petrovski Sem. 10 (1983).
KASHIWARA M.
[174] *B*-functions and holonomic systems. Rationality of roots of *b*-functions. Invent. Math. 38 (1976), 33-53.
KATZ N.
[175] Nilpotent connections and the monodromy theorem. Application of a result of Turrittin. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 39 (1970), 175-232.
KATZ N. M.
[176] The regularity theorem in algebraic geometry. *In*: Actes Cong. Int. Math., Nice, 1 (1970), 437-443, Dunod, Paris.
KAZARNOVSKII B. Ya.
[177] On the zeros of exponential sums. DAN SSSR 257 : 4 (1981), 804-808.
KEMPF G., KNUDSEN F., MUMFORD D., SAINT-DONAT B.
[178] Toroidal embeddings. Lecture Notes in Math. 339, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
KHARLAMOV V. M.
[179] Nombre maximal de composantes d'une surface de degré 4 dans RP^3. FAP 6 : 4 (1972), 101.
KHARLAMOV V. M.
[180] Nouvelles congruences pour la caractéristique d'Euler de variétés algébriques réelles. FAP 7 : 2 (1973), 74-78.
KHARLAMOV V. M.
[181] L'inégalité généralisée de Petrovski. FAP 8 : 2 (1974), 50-56.
KHARLAMOV V. M.
[182] L'inégalité généralisée de Petrovski. II. FAP 9 : 3 (1975), 93-94.

KHARLAMOV V. M.
[183] Congruences supplémentaires pour la caractéristique d'Euler des variétés algébriques réelles de dimension paire. FAP 9 : 4 (1975), 51-60.
KHARLAMOV V. M.
[184] Types topologiques de surfaces non singulières de degré 4 dans $\mathbf{R}P^3$. FAP 10 : 4 (1976), 55-68.
KHARLAMOV V. M.
[185] Types isotopiques de surfaces non singulières de degré 4 dans $\mathbf{R}P^3$. FAP 12 : 1 (1978), 86-87.
KHOWANSKY A. G.
[186] Fewnomials and Pfaff manifolds. Proc. of Intern. Congress of Math., Warsaw, 1983; Elsevier, Amsterdam, 1984, 549-564.
KMETY F.
[187] Résolution des singularités des courbes. *In*: Lecture Notes in Math. 409.
KNORRER H.
[188] Zum $K(\pi, 1)$-Problem für isolierte Singularitäten von volligen Duchshnitten. Comp. Math. 45 : 3 (1982), 333-340.
KOCHMAN F.
[189] Bernstein polynomials and Milnor algebrae. Proc. N. Acad. Sci. USA 73 : 8 (1976).
KOUCHNIRENKO A. G. (= KUSHNIRENKO)
[190] Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. Invent. math. 32 (1976), 1-31.
KUSHNIRENKO A. G.
[191] Newton polyhedron and Milnor number. FAP 9 : 1 (1975), 74-75.
KREISS H. O.
[192] Über syzygetische Flächen. Ann. Math. 41 (1955), 105-111.
KULIKOV V. S.
[193] Counting of the singularities of embedding of generic algebraic surface in the projective space P^3. FAP 17 : 3 (1983), 15-27.
KULIKOV V. S.
[194] On the number of singular focal projection centres of an algebraic surfaces. UMN 39 : 5 (1984), 245-246.
LAMOTKE K.
[195] Die Homologie isolierter Singularitäten. Math. Zeit. 143 (1975), 27-44.
LANDIS E. E.
[196] Estimations de variations d'ensembles de valeurs inférieures de fonctions différentiables dans le voisinage du point de minimum. Vestnik MGU, sér. math., 3 (1980), 24-28.
LANDIS E. E.
[197] Tangential singularities in contact geometrie. UMN 37 : 4 (1982), 96.
LANDMAN A.
[198] On the Picard-Lefschetz transformation for algebraic manifolds acquiring general singularities. Trans. Amer. Math. Soc. 181, July (1973), 89-126.
LANDO S. K.
[199] Normal forms for degrees of volume forms. FAP 19 : 2 (1985), 78-79.
LAUFER H.
[200] Ambient deformations for exceptional sets in two manifolds. Invent. Math. 55 (1979), 1-36.
LAZZERI F.
[201] Some remarks on the Picard-Lefschetz monodromy. Quelques journées singulières. Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1974.
LE D. T.
[202] Sur les nœuds algébriques. Comp. Math. 25 : 3 (1972), 281-321.

LE D. T.
[203] Le théorème de la monodromie singulier. C. r. Acad. Sci., Paris, AB 288 : 21 (1979), A 985-A 988.
LE D. T.
[204] La monodromie n'a pas de points fixes. J. Fac. of Sci., Univ. of Tokyo, Sec. I.A. 22 : 3 (1981), 409-427.
LE D. T., RAMANUJAM C. P.
[205] The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type. Amer. J. Math. 98 (1976), 67-78.
LE D. T., SAITO K.
[206] The local π_1 of the complement of a hypersurface with normal crossings in codimension 1 is abelian. RIMS, 1981, 1-31.
LE D. T., TEISSIER B.
[207] Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières. Ann. of Math. 114 (1981), 457-491.
LE D. T., TEISSIER B.
[208] Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. II. Proc. of Symp. in Pure Math. 40 : 2 (1983). 65-103.
LERAY J.
[209] Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe. Paris, 1959.
LEVANTOVSKI A. V.
[210] On the singularities of the boundary of stability. Vestnik MGU, ser. math. 6 (1980), 20-22.
LEVANTOVSKI A. V.
[211] On the boundary of a set of stable matrix. UMN 35 : 2 (1982), 213-214.
LEVANTOVSKII L. V.
[212] Singularities of stability domain boundary. FAP 16 : 1 (1982), 44-48.
LEVINE J.
[213] Polynomial invariants of knots in codimension two. Ann. Math. 84 (1966), 537-554.
LINNIK Yu. V.
[214] Propriétés ergodiques de corps algébriques. Len. Univ. Press, 1967.
LIPMAN J., TEISSIER B.
[215] Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals. Michigan Math. J. 28 (1981), 97-116.
LIVSCHITZ I. S.
[216] Automorphismes du complémentaire à l'ensemble de bifurcation de fonctions pour les singularités simples. FAP 15 : 1 (1981), 38-42.
LOESER F.
[217] Exposant d'Arnold et sections planes. C. r. Acad. Sci., Paris, sér. I, 298 : 19 (1984), 485-488.
LOESER F.
[218] Fonctions $|f|^s$, théorie de Hodge et polynômes de Bernstein-Saito. Centre de Math., Ecole Polytechnique, préprint (1985), 1-13.
LOESER F.
[219] Quelques conséquences locales de la théorie de Hodge. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 35 : 1 (1985), 75-92.
LOOIJENGA E.
[220] A period mapping of certain semiuniversal deformations. Comp. math. 30 : 3 (1975), 299-316.
LOOIJENGA E.
[221] The complement of the bifurcation variety of a simple singularity. Invent. Math. 23 (1974), 105-116.
LOOIJENGA E.
[222] The discriminant of a real simple singularity. Comp. Math. 37 (1978), 51-62.

LOOIJENGA E., STEENBRINK J.
[223] Milnor number and Tjurina number of complete intersections. Math. Ann. 271 (1985), 121-124.
LYASHKO O. V.
[224] Decompositions of simple singularities of functions. FAP 10 : 2 (1976), 49-56, FAA 10, 122-127.
LYASHKO O. V.
[225] Classification of critical points on manifolds with singular boundary. FAP 17 : 3 (1983), 28-36.
LYASHKO O. V.
[226] La géométrie des diagrammes de bifurcation. INT. Problèmes actuels des mathématiques 22 (1983), VINITI, Moscou, 94-129 Trad. angl.: J. Sov. Math. 27 (1984).
MALGRANGE B.
[227] Sur les polynômes de Bernstein. UMN 29 : 4 (1974), 81-88.
MALGRANGE B.
[228] Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée. Lecture Notes in Math. 459, 98-119, Springer, Berlin, 1974.
MALGRANGE B.
[229] Intégrales asymptotiques et monodromie. Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure (4) 7 (1974), 405-430.
MALYSHEV A. V.
[230] Sur la représentation d'entiers par des formes quadratiques positives. Travaux Inst. V. Steklov 65 (1962).
MANIN Yu. I.
[231] Algebraic curves on fields with derivation. Izv. Acad. Nauk SSSR, ser. math. 22 (1958), 737-756.
MANIN Yu. I.
[232] Rational points of the algebraic curves on functional fields. Izv. Acad. Nauk SSSR, ser. math. 27 (1963), 1395-1440.
MARKUSHEVITCH A. I.
[233] Introduction à la théorie classique des fonctions abéliennes. Nauka, Moscou, 1979.
MASLOV V. P.
[234] Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques. Moscou, Ed. MGU, 1965.
MASLOV V. P.
[235] Méthodes opératorielles. Nauka, Moscou, 1973; trad. française: Ed. Mir, 1986.
MASLOV V. P., FEDORUK M. V.
[236] Approximation quasi classique pour les équations de la mécanique quantique. Nauka, Moscou, 1976.
MATHER J.
[237] Stratifications and mappings. UMN 27 : 5 (1972), 85-118, Academic Press, N. Y. (1973), 195-232.
MATHER J., YAU St. S.-T.
[238] Classification of isolated hypersurface singularities by their modular algebras. Invent. Math. 69 (1982), 243-252.
MATOV V. I.
[239] On unimodal function's germs on a manifold with boundary. FAP 14 : 1 (1980), 69-70.
MATOV V. I.
[240] Singularités des fonctions du maximum sur une variété à bord. Travaux du Séminaire I. Petrovski 6 (1981), 195-222.
MATOV V. I.
[241] Germes de fonctions unimodaux et bimodaux sur la variété à bord. Travaux du Séminaire I. Petrovski 7 (1981), 174-189.

MATOV V. I.
[242] Topological classification of the maxima and minima function's germs of generic function families. UMN 37 : 4 (1982), 167-168; RMS (1982).
McKAY J.
[243] Cartan matrices, finite groups of quaternions and Kleinian singularities. Proc. Amer. Soc. 81 : 1 (1981), 153-154.
MILNOR J.
[244] Morse Theory. Princeton Univ. Press, 1963.
MILNOR J.
[245] Singular points of complex hypersurfaces. Princeton Univ. Press, 1968.
MILNOR J.
[246] On the Betti numbers of real varieties. Proc. A.M.S. 15 (1964), 275-280.
MIYAOKA Y.
[247] The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants. Math. Ann. 268 (1984), 159-171.
MOND D.
[248] On the classification of germs of maps from R^2 to R^3. Proc. Lond. Math. Soc. 50 : 2 (1985), 333-369.
MUMFORD D.
[249] Algebraic geometrie. I. Complex projective varieties. Springer, Heidelberg, 1976.
NGUYEN H. D., NGUYEN T. D.
[250] Stabilité de l'interaction géométrique entre deux composantes holonomes simples. C. r. Acad. Sci. 291 (1980), 113-116.
NIKULIN V. V.
[251] Entire symmetrical bilinear forms and some their geometrical applications. Izv. Acad. Nauk SSSR, ser. math. 43 : 1 (1979), 111-177.
NILSSON N.
[252] Some growth and ramification properties of certain integrals. Arkiv. Math. 5 (1963), 527-540.
NILSSON N.
[253] Monodromy and asymptotic properties of certain multiple integrals. Arkiv. Math. 18 : 2 (1980), 181-198.
NYE J. F.
[254] Optical caustics in the near field from liquid drops. Proc. R. Soc. London A 361 (1978), 21-41.
NYE J. F.
[255] Optical caustics from liquid drops under gravity: observations of the parabolic and symbolic umbilics. Philos. Trans. R. Soc. London 292 (1979), 25-44.
NYE J. F.
[256] The motion and structure of dislocations in wave fronts. Proc. R. Soc. London A 378 (1981), 219-239.
NYE J. F., COOLEY C. R., THORNDIKE A. S.
[257] The structure and evolution of flow field and their vector fields. J. Phys. A: Math. Gen. 11 : 8 (1978), 1455-1490.
NYE J. F., POTTER J. R.
[258] The use of the catastrophe theorie to analyse the stability and toppling of icebergs. Annals of Glaciology 1 (1980), 49-54.
NYE J. F., THORNDIKE A. S.
[259] Events in evolving three-dimensional vector fields. J. Phys. A: Math. Gen. 13 (1980), 1-14.
OLEINIK O. A.
[260] Estimations de nombres de Betti d'hypersurfaces algébriques réelles. Math. sb. 28 (1951), 635-640.

OLEINIK O. A.
[261] Sur la topologie de courbes algébriques réelles sur une surface algébrique. Math. Sb. 29 (1951), 133-156.
OREVKOV S. Yu.
[262] Bifurcations de surfaces de niveau d'une fonction du point critique simple ou unimodal. UMN 39 : 2 (1984), 181-182.
OREVKOV S. Yu.
[263] Bifurcations de l'hypersurface de niveau de la somme directe de deux fonctions. Vestnik MGU, sér. math. 6 (1984), 10-13.
PALAMODOV V. P.
[264] Développement asymptotique d'intégrales oscillantes à point de phase isolé stationnaire. DAN SSSR 250 : 6 (1980), 1321-1324.
PERRON B.
[265] « μ const » implique « type topologique constant » en dimension complexe trois. C. r. Acad. Sci. 295 (1982), 735-738.
PERRON B.
[266] The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type in dimension three. Sing. and Dyn. Syst. Proc. Int. Conf. Heraklion, 30 aug.-6 sept. 1983, Amsterdam, 1985, 239-248.
PETROV G. S.
[267] On the number of zeroes of elliptic integrals. FAP 18 : 2 (1984), 73-74.
PETROV G. S.
[268] On the number of zeroes of complete elliptic integrals. FAP 18 : 2 (1984), 87-88.
PETROVSKI I. G.
[269] Sur la topologie des courbes réelles et algébriques. C. r. Acad. Sci. Paris 197 (1933), 1270-1273.
PETROVSKY I. G.
[270] On the topologie of real plane algebraic curves. Ann. Math. 39 (1938), 189-209.
PETROVSKI I. G.
[271] Sur la diffusion d'ondes et de lacunes pour le système d'équations hyperboliques. Izv. Acad. Nauk SSSR, sér. math. 8 : 3 (1944), 101-106.
PETROVSKII I. G., OLEINIK O. A.
[272] Topological properties of real algebraic surfaces. Izv. Acad. Sci. SSSR 13 (1949), 389-402.
PHAM F.
[273] Formules de Picard-Lefscbetz généralisées et ramification des intégrales. Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 333-367.
PHAM F.
[274] Remarque sur l'équisingularité universelle. Faculté des Sciences, Univ. Nice, 1970, 1-24.
PHAM F.
[275] Caustiques, phase stationnaire et microfonctions. Acta Scientarum Vietnamicarum 2 : 2 (1977).
PHAM F.
[276] Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin. Birkhäuser, Boston, 1979; Stuttgart, 1981.
PHAM F.
[277] Vanishing homologies and the *n* variable saddlepoint method. AMS 1981 Summer Inst. on « Singularities », Arcata, Calif., 1981, 1-25.
PHAM F.
[278] Structures de Hodge mixtes associées à un germe de fonction à point critique isolé. Astérisque 101-102 (1983), 268-285.
PINKHAM H.
[279] Singularités exceptionnelles, la dualité étrange d'Arnold et les surfaces *K*-3. C. r. Acad. Sci. Paris 284 (1977), 615-618.

PLATONOVA O. A.
[280] Singularities of projections of smooth surfaces. UMN 39 : 2 (1984), 149-150.
PLATONOVA O. A.
[281] Projection of smooth surfaces. Proc. Sem. I. Petrovski 10 (1984), 135-149.
DU PLESSIS A.
[282] On the determinacy of smooth map-germs. Invent. Math. 58 (1980), 107-160.
DU PLESSIS A.
[283] On the genericity of topologically finitely-determined map-germs. Topology 21 : 2 (1982), 131-156.
POLOTOVSKI G. M.
[284] Catalogue de courbes M-décomposables d'ordre 6. DAN SSSR 236 : 3 (1977), 548-551.
RANDALL J.
[285] Topological sufficiency of smooth map-germs. Invent. Math. 67 (1982), 117-122.
RANDOL B.
[286] A lattice point problem I. Trans. AMS 121 (1966), 257-268.
RANDOL ·B.
[287] A lattice point problem II. Trans. AMS 125 (1966), 101-113.
RANDOL B.
[288] On the Fourier transform of the indicator function of a planar set. Trans. AMS 139 (1969), 271-278.
RANDOL B.
[289] On the asymptotic behaviour of the Fourier transform of the indicator function of a convex set. Trans. AMS 139 (1969), 279-285.
ROHLIN V. A.
[290] The Gudkov hypothese demonstration. FAP 6 : 2 (1972), 62-64.
ROHLIN V. A.
[291] Congruences modulo 16 in the 16th Gilbert problem. FAP 6 : 4 (1972), 58-64.
ROHLIN V. A.
[292] Congruences modulo 16 in the 16th Gilbert problem. II. FAP 6 : 2 (1973), 91-92.
ROHLIN V. A.
[293] Complex orientations of real algebraic curves. FAP 8 : 4 (1974), 71-75.
ROHLIN V. A.
[294] Complex topological characteristics of real algebraic curves. UMN 33 : 5 (1978), 77-89.
SAITO K.
[295] Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen. Invent. Math. 14 (1971), 123-142.
SAITO K.
[296] On a linear structure of a quotient variety by a finite reflection group. Preprint, Kyoto Univ., Japan. Kyoto, 1979.
SAITO K.
[297] A characterization of the intersection form of a Milnor's fiber for a function with an isolated critical point. Proc. Japan Acad., ser. A, 58 : 2 (1982), 79-81.
SAITO K.
[298] On the period of primitive integrals I. RIMS, 1982, 1-235.
SAITO K.
[299] The zeroes of characteristic function χ_f for the exponents of a hypersurface isolated singular point. Adv. Studies in Pure Math. 1 (1982), 193-215.

SAITO K.
[300] Period mapping associated to a primitive form. Preprint, 1983.
SAITO M.
[301] Exponents of a reduced and irreducible plane curve singularity. Preprint, 1982.
SAITO M.
[302] Exponents and the geometric genus of an isolated hypersurface singularity. Proc. of Symp. in Pure Math. 40 : 2 (1983), 465-472.
SAITO M.
[303] Exponents and Newton polyhedra of isolated hypersurface singularities. Inst. Fourier, Grenoble, 1983, 1-10.
SAITO M.
[304] On the structure of Brieskorn lattices. Inst. Fourier, Grenoble, 1983, 1-28.
SAITO M.
[305] Gauss-Manin system and mixed Hodge structure. Proc. Japan Acad., ser. A, 58 : 1 (1982), 29-32.
SCHERK J.
[306] On the Gauss-Manin connection of an isolated hypersurface singularity. Math. Ann. 238 (1978), 23-32.
SCHERK J.
[307] On the monodromy theorem for isolated hypersurface singularities. Invent. Math. 58 (1980), 289-301.
SCHERK J.
[308] A note on two local Hodge filtrations. Preprint, Univ. of Alberta, Edmonton, 1981, 1-7.
SCHERK J.
[309] A propos d'un théorème de Mather et Yau. C. r. Acad. Sci. 296 : 12 (1983), 513-515.
SCHMID W.
[310] Variation of Hodge structures: the singularities of the period mappings. Invent. Math. 22 (1973), 211-319.
SEBASTIANI M.
[311] Monodromie et polynôme de Bernstein, d'après Malgrange. Lecture Notes in Math. 670 (1978), 370-381.
SEBASTIANI M., THOM R.
[312] Un résultat sur la monodromie. Invent. Math. 13 (1971), 90-96.
SEDYKH V. L.
[313] Singularities of the convex envelopes. Sib. Math. J. 24 : 3 (1983), 158-175.
SEDYKH V. L.
[314] Functional modulus of singularities of the convex envelopes of manifolds of codimensions 1 and 2. Math. sb. 119 : 2 (1982), 233-247.
SEIDENBERG A.
[315] A new decision method for elementary algebra. Ann. Math. 60 (1959), 356-374.
SERRE J.-P.
[316] Algèbres de Lie. Semi-simples complexes. New York, 1966.
SERRE J.-P.
[317] Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables tenu à Bruxelles, Paris, 1953, 57-58.
SHAFAREVICH I. R.
[318] Basic algebraic geometry. Springer, Berlin, 1974.
SHERBAK I. G.
[319] On isolated singularities of complete intersections. Proc. sem. I. Petrovski 9 (1983), 230-239.

SHERBAK I. G.
[320] Focal set of a surface with boundary and caustics of the groups B_k, C_k, F_4 generated by reflexions. FAP 18 : 1 (1984), 90-91.
SHERBAK I. G.
[321] Duality of boundary singularities. UMN 39 : 2 (1984), 220-221 ; RMS (1984).
SHERBAK O. P.
[322] Frontal mapping singularities of the sub-varieties of projective space. UMN 37 : 4 (1982), 95-96.
SHERBAK O. P.
[323] Courbes gauches duales projectives et singularités de Legendre. Travaux de l'Univ. de Tbilissi, 232-233 : 13-14 (1982), 280-336.
SHERBAK O. P.
[324] Singularities of evolvents family in a neighborhood of an inflexion point and group H_3 generated by reflexions. FAP 17: 4 (1983), 70-72.
SHOSHITASHVILI A. H.
[325] On analytical sets biholomorphe-equivalent to the quasihomogeneous ones. FAP 17 : 2 (1983), 92-93.
SIERSMA D.
[326] Singularities of functions on boundaries, corners, etc. Quart. J. Math. 32 : 125 (1981). 119-127.
SIERSMA D.
[327] Isolated line singularities. Proc. of Symp. in Pure Math. 40 : 2 (1983), 485-496.
SINGULARITIES
[328] Proc. of Symp. in Pure Math., 40, parts 1, 2 (1983).
SLODOWY P.
[329] Simple singularities and simple algebraic groups. Lect. Notes in Math. 815 (1980), 1-175.
SPRINGER G.
[330] Introduction to Riemann Surfaces. Reeding (Mass.). 1957.
STAGNARO E.
[331] Sul massimo numero di punti doppi isolati di una superficie algebrica di P^3. Rend. Sem. Math. Univ. Padova 59 (1978), 197-198.
STEENBRINK J. H. M.
[332] Limits of Hodge Structures. Invent. Math. 31 : 3 (1975), 229-257.
STEENBRINK J. H. M.
[333] The intersection form for quasihomogeneou ssingularities. Composition Math. 34 : 2 (1977), 211-223.
STEENBRINK J. H. M.
[334] Mixed Hodge structures on the vanishing cohomology. Proc. Nordic Summer School on Real and Complex Singularities, Oslo, 1976, Sijthoff and Noordhoff, 1977.
STEENBRINK J.
[335] Mixed Hodge structures associated with isolated singularities. Proc. Symp. Pure Math. 40 (1983), 513-536.
STEENBRINK J.
[336] Semicontinuity of the singularity spectrum. Math. Inst., Univ. of Leiden, preprint 23 (1983), 1-9.
STEENBRINK J.
[337] Semicontinuity of the singularity spectrum. Invent. Math. 79 : 3 (1985), 557-565.
STEENBRINK J., ZUCKER S.
[338] Variation of mixed Hodge Structure I. Invent. math. 80 : 3 (1985), 489-542.

TARNOPOLSKA-WEISS M.
[339] On the number of lattice points in a compact n-dimensional polyhedron. Proc. Amer. Math. Soc. 74 : 1 (1979), 124-127.
TEISSIER B.
[340] Déformations à type topologique constant I et II. *In*: Sém. Donady-Verdier, Paris, 1972.
TEISSIER B.
[341] Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. Astérisque 7, 8 (1973), 285-362.
TEISSIER B.
[342] Variétés polaires I. Invent. math. 40 : 3 (1977), 267-292.
TERAO H.
[343] Generalized exponents of a free arrangement of hypersurfaces and Shepherd-Todd-Brieskorn formula. Invent. math. 69 (1981), 159-170.
THOM R.
[344] Sur l'homologie des variétés algébriques réelles. *In*: Differential and combinatorial topology. A symposium in honor of M. Morse. Princeton Univ. Press, 1965, 255-265.
TIMOURIAN I. G.
[345] The invariance of Milnor's number implies topological triviality. Amer. J. Math. 99 : 2 (1977), 437-446.
TOGLIATTI E.
[346] Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni aventi il massimo numero finito di punti doppi. Scritti offerti a L. Berzolari, Pavia, 1936, 577-593.
TROTMAN D.
[347] Transverse transversals and homeomorphic transversals. Topologie 24 : 1 (1985), 25-39.
TYURINA G. N.
[348] Locally semiuniversal planar deformations of isolated singularities of complex spaces. Izv. Acad. Sci. SSSR 33 (1969), 1026-1058.
VARCHENKO A. N.
[349] Theorems on the topological equisingularity of families of algebraic manifolds and polynomial mappings. Izv. Acad. Sci. SSSR 36 (1972), 957-1019.
VARCHENKO A. N.
[350] Newton polyhedra and estimations of oscillatory integrals. FAP 10 : 3 (1976), 13-38, FAA 10, 175-196.
VARCHENKO A. N.
[351] Hodge properties of Gauss-Manin connections. FAP 14 : 1 (1980), 44-45, FAA 14, 34-35.
VARCHENKO A. N.
[352] The asymptotics of holomorphic forms determine a mixed Hodge structure. Dokl. Akad. Nauk SSSR 255 (1980), 1035-1038.
VARCHENKO A. N.
[353] The monodromy operator in vanishing cohomologies and the operator of multiplication by f in the local ring. DAN SSSR 260 (1981), 272-276.
VARCHENKO A. N.
[354] An asymptotic mixed Hodge structure in vanishing cohomologies. Izv. Acad. Sci. SSSR, ser. mat. 45 (1981), 540-591.
VARCHENKO A. N.
[355] The complex index of a singularity does not change along the strata $\mu = \text{const}$. FAP 16 : 1 (1981), 1-12, FAA 16, 1-9.
VARCHENKO A. N.
[356] Sur le nombre de points entiers dans un domaine. UMN 37 : 3 (1982), 177-178.

VARCHENKO A. N.
[357] Sur le nombre de points entiers dans des familles de domaines homothétiques. FAP 17 : 2 (1983), 1-6.
VARCHENKO A. N.
[358] Minoration de la codimension de la strate μ = Cte à l'aide d'une structure mixte de Hodge. Vestnik MGU, sér. math. mécan. 6 (1982), 28-31.
VARCHENKO A. N.
[359] Zeta-function of monodromy and Newton's diagrams. Invent. Math. 37 (1976), 253-262.
VARCHENKO A. N.
[360] The Gauss-Manin connection of isolated singular point and Bernstein polynomial. Bull. Sci. Math., 2e sér., 104 (1980), 205-223.
VARCHENKO A. N.
[361] Sur la semi-continuité du spectre et la majoration du nombre des points singuliers de l'hypersurface projective. DAN SSSR 270 : 6 (1983), 1294-1297; Sov. Math. Doklady (1983).
VARCHENKO A. N.
[362] Spectre et décompositions de points critiques de fonctions. DAN SSSR 270 : 2 (1983), 267-270; Sov. Math. Doklady (1983).
VARCHENKO A. N.
[363] Sur la semi-continuité de l'indice de singularité complexe. FAP 17 : 4 (1983), 77-78.
VARCHENKO A. N.
[364] Sur la variation des caractéristiques discontinues de points critiques lors des déformations. UMN 38 : 5 (1983), 126-127.
VARCHENKO A. N.
[365] Comportement asymptotique des intégrales et structure de Hodge. INT. Problèmes actuels des mathématiques 22 (1983), 130-166; J. Sov. Math 27 (1984).
VARCHENKO A. N.
[366] Majoration du nombre de zéros d'une intégrale abélienne réelle dépendant d'un paramètre et cycles limites. FAP 18 : 2 (1984), 1-13.
VARCHENKO A. N.
[367] Sur le résidu local et la forme d'intersection en cohomologie évanescente. Izv. Acad. Nauk SSSR, sér. math., 49 : 1 (1985), 32-54.
VARCHENKO A. N.
[368] On local classification of volume forms in presence of a hypersurface. FAP 19 : 3 (1985), 9-18.
VARCHENKO A. N.
[369] Sur les formes normales de non-différentiabilité de solutions d'équations hyperboliques. Izv. Acad. Nauk SSSR, sér. math., 50 : 1 (1986), 1-19.
VARCHENKO A. N.
[370] L'image de l'application de périodes pour des singularités simples. Méthodes contemporaines d'analyse fonctionnelle en géométrie et topologie, (1986), Ed. de l'Univ. de Voronej, 10-22.
VARCHENKO A. N., CHMUTOV S. V.
[371] The finite irreducible groups generated by reflexions are monodromy groups of convenient singularities. FAP 18 : 3 (1984), 1-14.
VARCHENKO A. N., CHMUTOV S. V.
[372] Sur le cône tangent à la strate μ = Cte. Vestnik Univ. de Moscou, sér. 1 : Mathématiques, mécanique, 1 (1985). 6-9.
VARCHENKO A. N., GIVENTAL A. B.
[373] Period mapping and intersection form. FAP 16 : 1 (1982), 1-14.
VARCHENKO A. N., GUSSEIN-ZADE S. M.
[374] Topology of caustics, of wave fronts and degeneracy of critical points. UMN 39 : 2 (1984), 190-191.

VARCHENKO A. N., HOVANSKI A. G.
[375] Asymptotic behaviour of integrals on vanishing cycles and Newton polyhedron. DAN SSSR 283 : 3 (1985), 521-523.
VARCHENKO A. N., MOLCHANOV S. A.
[376] Applying the method of stationary phase to limit theorems for Markov chains. Dokl. Akad. Nauk SSSR 233 (1977), 11-14. Soviet Math. Doklady 18, 10-13.
VASILIEV V. A.
[377] Asymptotic behaviour of exponential integrals, Newton's diagram and the classification of minimal points. FAP 11 : 3 (1977), 1-11, FAA 11, 163-172.
VASILIEV V. A.
[378] Asymptotic behaviour of exponential integrals in the complex domain. FAP 13 : 4 (1979), 1-12, FAA 13, 239-247.
VASILIEV V. A.
[379] Self-intersections of wave fronts and characteristic numbers of Legendre (Lagrange). FAP 16 : 2 (1982), 68-69.
VASILIEV V. A.
[380] Netteté et condition locale de Petrovski pour les opérateurs strictement hyperboliques à coefficients constants. Izv. Acad. Nauk SSSR, sér. math, 50 : 2 (1986), 251-283.
VERDIER Y.
[381] Stratification de Whitney et théorèmes de Bertini-Sard. Inv. math. 36 (1976), 295-312.
VINOGRADOV I. M.
[382] Méthode des sommes trigonométriques en théorie des nombres. Nauka, Moscou, 1971.
VINOGRADOV I. M.
[383] Variantes spéciales de la méthode des sommes trigonométriques. Nauka, Moscou, 1976.
VIRO O. Ya.
[384] Généralisations des inégalités de Petrovski et d'Arnold sur les courbes à singularités. UMN 33 : 3 (1978), 145-146.
VIRO O. Ya.
[385] Construction de M-variétés. UMN 34 : 4 (1979), 160.
VIRO O. Ya.
[386] Courbes de degré 7, courbes de degré 8 et les hypothèses de Rugsdale. DAN SSSR 254 : 6 (1980), 1306-1310.
VORONIN S. M.
[387] Analytical classification of involution pairs and its applications. FAP 16 : 2 (1982), 21-29.
WAJNRYB B.
[388] The monodromy group of plane curve singularities. Math. Ann. 246 : 2 (1980), 141-154.
WALL C. T. C.
[389] Are maps finitely determined in general ? Bull. Lond. Math. Soc. 11 (1979), 151-154.
WALL C. T. C.
[390] A note on symmetry of singularities. Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 169-175.
WALL C. T. C.
[391] A second note of symmetry of singularities. Bull. London Math. Soc. 12 : 5 (1980), 347-354.
WALL C. T. C.
[392] Topological invariance of the Milnor number modulo 2. Topology 22 : 3 (1983), 345-350.

WALL C. T. C.
[393] Determination of the semi-nice dimensions. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 97 : 1 (1985), 79-88.
WALL C. T. C.
[394] Equivariant jets. Math. Ann. 272 : 1 (1985), 41-65.
WALL C. T. C.
[395] Infinite-determinacy of equivariant map-germs. Math. Ann. 272 : 1 (1985), 67-82.
WELLS R. G.
[396] Differential analysis on complex manifolds. 2nd ed., Springer, 1980.
YANO T.
[397] On the holonomic system of f^s and b-function. Publ. RIMS 12 (1976), 469-480.
YANO T.
[398] On the structure of differential equations associated with some isolated singularities. Soc. Reports of Saitama Univ., ser. A, 9 : 1 (1977), 9-20.
YANO T.
[399] On the theory of b-functions. Publ. RIMS 14 (1978), 111-202.
YAU St. S.-T.
[400] Solvable Lie algebras and Kac — Moody algebras arising from isolated singularities. Univ. of Illinois, 1983, 1-94.
YAU St. S.-T.
[401] Milnor algebras and equivalence relations among holomorphic functions. Bull. Amer. Math. Soc. 9 : 2 (1983), 235-239.
YOSHINAGA E., SUZUKI M.
[402] Normal forms of non-degenerated quasi homogeneous functions with inner modality $\leqslant 4$. Invent. Math. 55 (1979), 185-206.
ZAKALYUKIN V. M.
[403] Bifurcations of wave-fronts depending on one parameter. FAP 10 : 2 (1976), 69-70; FAA 10, 139-140.
ZAKALYUKIN V. M.
[404] Bifurcations of wave-fronts and caustics depending on one parameter, versality of mappings. INT, sér. Problèmes actuels des mathématiques, 22 (1983), VINITI, Moscou, 56-93.
ZARISKI O.
[405] Algebraic surfaces. Springer Verlag, 1971.
ZUCKER S.
[406] Variation of mixed Hodge structure. II. Invent. math. 80 : 3 (1985), 543-565.
ZVONILOV V. I.
[407] Kharlamov inequality and Petrovski — Oleinik inequality. FAP 9 : 2 (1975), 69-70.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES